

## XXIII Keski-Suomen lukiolaisten matematiikkakilpailu 23.1.2014

LASKINTA SAA KÄYTTÄÄ.

1. Avaruusalus sijaitsee tason origossa  $(0, 0)$  ja liikkuu siitä vakionopeudella johonkin suuntaan, joka ei muutu. Tykki sijaitsee tason pisteessä  $(0, -10)$ , tietää aluksen nopeuden ja pyrkii ampumaan alusta. Tykin ammus ja alus liikkuvat samaa vauhtia ja tykki ampuu välittömästi (tähtääminen tai ammuksen suunnan valitseminen eivät vie aikaa). Ammuksen suunta ja nopeus pysyvät vakioina ampumisen jälkeen. Tykki pystyy ampumaan ammuksen mihin tahansa suuntaan.
  - (a) Mihin suuntiin alus voi lentää siten, että tykki ei voi siihen osua? Anna kaikki turvalliset suunnat. (3 pistettä)
  - (b) Alus lähtee kuitenkin lentämään vaaralliseen suuntaan. Jos tykki tähtää hyvin, niissä missä tason pisteessä tykin ammus osuu alukseen? Anna vastaus kaikille aluksen vaarallisille lentosuunnille. (3 pistettä)

Perustele vastauksesi.

2. Olkoot  $a$  ja  $n$  lukua 1 suurempia kokonaislukuja joille luku  $a^n - 1$  on alkuluku. Osoita, että tällöin
  - (a)  $a = 2$  ja (2 pistettä)
  - (b)  $n$  on alkuluku. (4 pistettä)

**Määritelmiä:** Kokonaislukua  $n > 1$  sanotaan *alkuluvuksi*, jos ainoat positiiviset kokonaisluvut joilla se on jaollinen ovat 1 ja  $n$ . Kokonaisluku  $n$  on *jaollinen* kokonaisluvulla  $m$  jos on olemassa kokonaisluku  $k$  siten, että  $n = km$ .

**Vihje:** kaikille positiivisille kokonaisluvuille  $c$  ja  $m$  pätee

$$c^m - 1 = (c - 1)(c^{m-1} + c^{m-2} + \dots + c + 1).$$

3. Peliluola suunnittelee ottavansa käyttöön pelin, jossa pelin pitäjä antaa pelaajalle kahden euron kolikon heitettäväksi neliöistä muodostuvaan ruudukkoon yhden euron maksua vastaan. Pelaaja saa pitää kolikon jos se on kokonaisuudessaan jonkin ruudun sisällä, mutta muussa tapauksessa pelin pitäjä pitää kolikon. Kuinka pitkiä ruutujen sivujen pitäisi olla, että peli olisi reilu? (Oletetaan, että kolikko voi pudota ruudukon sisällä minne tahansa yhtä suurella todennäköisyydellä ja että ruudukko on niin suuri ettei reunakäyttäytymistä tarvitse erikseen huomioida.) (6 pistettä)
4. Muuan kansainvälinen pikaruokaketju myy uppopaistettuja kanapaloja 6, 9 ja 20 palan annoksissa.
  - (a) Osoita, että voit tilata kanapaloja minkä tahansa määrän, joka on kolmella jaollinen ja vähintään 6. (1 piste)
  - (b) Osoita, että voit tilata tasan 44, 45, 46, 47, 48, tai 49 palaa. (1 piste)
  - (c) Osoita, että *et* voi tilata tasan 43 palaa. (2 pistettä)
  - (d) Osoita, että voit tilata kanapaloja minkä tahansa määrän, joka on vähintään 44 palaa. (2 pistettä)