XXIII Keski-Suomen lukiolaisten matematiikkakilpailu 23.1.2014, tehtävien ratkaisut

1. Avaruusalus sijaitsee tason origossa $(0, 0)$ ja liikkuu siitä vakionopeudella johonkin suuntaan, joka ei muutu. Tykki sijaitsee tason pisteessä $(0, -10)$, tietää aluksen nopeuden ja pyrkii ampumaan alusta. Tykin ammus ja alus liikkuvat samaa vauhtia ja tykki ampuu välittömästi (tähtääminen tai ammuksen suunnan valitseminen eivät vie aikaa). Ammuksen suunta ja nopeus pysyvät vakioina ampumisen jälkeen. Tykki pystyy ampumaan ammuksen mihin tahansa suuntaan.

   (a) Mihin suuntiin alus voi lentää siten, että tykki ei voi siihen osua? Anna kaikki turvalliset suunnat. (3 pistettä)

   (b) Alus lähtee kuitenkin lentämään vaaralliseen suuntaan. Jos tykki tähtää hyvin, niin missä tason pisteessä tykin ammus osuu alukseen? Anna vastaus kaikille aluksen vaarallisille lentosuunnille. (3 pistettä)

   Perustele vastauksesi.

   Ratkaisu: Koska alus ja ammus liikkuvat samaa vauhtia, voi ammus osua vain jos etäisyys origoon O ja tykin sijaintiin T on sama. Näin tapahtuu selvästi suoralla $(x, -5)$, missä x käy läpi reaaliluvut. Muualla näin ei tapahdu: Olkoot A piste, jossa ammus osuu alukseen. Jos A ei kuulu mainitulle suoralle, niin kolmion $\triangle AOT$ sivujanat AO ja AT ovat eripituiset. Tämän näkee määrittämällä ensin apupisteen B, joka sijaitsee pisteen A kanssa samalla vaakasuoralla ja lisäksi y-akselilla. Tällöin Pythagoraan lauseen nojalla etäisyys sivujanat ovat yhtä pitkän jos ja vain jos janat OB ja OT ovat yhtä pitkät.

   Alus on siis turvassa, jos sen lentoreitti ei leikkaa suoraa $(x, -5)$, x reaaliluku, eli jos lentää ylemmälle puolitasolle tai x-akselin suuntaisesti.

   Jos alus liikkuu pitkin puolisuoraa (at, bt), missä $t \geq 0$, niin osumapiste saadaan ratkaistua yhtälöparista

   $$(x, -5) = (at, bt).$$

   Saadaan $x = -5a/b$, kun oletetaan että $b \neq 0$. Tällöin $t = -5/b > 0$ jos $b < 0$, eli alus lentää alemmalle puolitasolle. Muuten yhtälöparilla ei ole ratkaisua, jossa $t \geq 0$.

2. Olkoot a ja n lukua 1 suurempia kokonaislukuja joille luku $a^n - 1$ on alkuluku. Osoita, että tällöin

   (a) $a = 2$ ja (2 pistettä)

   (b) n on alkuluku. (4 pistettä)

   Määritelmiä: Kokonaislukua $n > 1$ sanotaan *alkuluvuksi*, jos ainoat positiiviset kokonaisluvut joilla se on jaollinen ovat 1 ja n. Kokonaisluku n on *jaollinen* kokonaisluvulla m jos on olemassa kokonaisluku k siten, että $n = km$.

   Vihje: kaikille positiivisille kokonaisluvuille c ja m pätee

   $$c^m - 1 = (c-1)(c^{m-1} + c^{m-2} + \cdots + c + 1).$$

   Ratkaisu:

   (a) Vihjeen kaavan perusteella

   $$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1).$$

   Jos nyt $a > 2$, niin $a - 1 > 1$, joten luvulla $a^n - 1$ on ykköstä isompi tekijä $a - 1$. Koska $n > 1$, niin $a^n - 1 > a - 1$; siispä kyseinen tekijä ei ole luku $a^n - 1$ itse. Toisin sanoen $a^n - 1$ ei voi olla alkuluku jos $a > 2$.

   (b) Jos n ei ole alkuluku, niin $n = kl$ joillain luvuilla $1 < k < n$ ja $1 < l < n$. Nyt voimme kirjoittaa vihjeen kaavan perusteella

   $$a^n - 1 = (a^k)^l - 1 = (a^k - 1)(a^{k(l-1)} + a^{k(l-2)} + \cdots + a^k + 1).$$

   Siis luvulla $a^n - 1$ on tekijä $a^k - 1$ joka on suurempi kuin yksi, koska $k > 1$. Koska toisaalta $k < n$, pätee että $a^k - 1 < a^n - 1$, joten tekijä $a^k - 1$ ei myöskään ole luku $a^n - 1$ itse. Siis luku $a^n - 1$ ei ole alkuluku, jos n ei ole alkuluku.

3. Peliluola suunnittelee ottavansa käyttöön pelin, jossa pelin pitäjä antaa pelaajalle kahden euron kolikon heitettäväksi neliöistä muodostuvaan ruudukkoon yhden euron maksua vastaan. Pelaaja saa pitää kolikon jos se on kokonaisuudessaan jonkin ruudun sisällä, mutta muussa tapauksessa pelin pitäjä pitää kolikon. Kuinka pitkiä ruutujen sivujen pitäisi

olla, että peli olisi reilu? (Oletetaan, että kolikko voi pudota ruudukon sisällä minne tahansa yhtä suurella todennäköisyydellä ja että ruudukko on niin suuri ettei reunakäyttäytymistä tarvitse erikseen huomioida.) (6 pistettä)

Ratkaisu: Riittää tarkastella yhtä ruutua, koska ruudukko on symmetrinen ja riittävän suuri. Kolikko on kokonaan ruudun sisällä, jos sen keskipiste on vähintään kolikon säteen (d) päässä ruudun reunasta. Näin ollen, jos ruudun sivun pituus on x, niin kolikon keskipisteen pitää olla ruudussa, jonka sivun pituus on $x - 2d$.

Jotta peli olisi reilu, niin pelin odotusarvon tulisi olla 0. Koska pelaaja voi joko voittaa tai hävitä tasan yhden euron, niin voiton todennäköisyyden tulisi olla 0.5. Näin on, jos voittoalueen ja häviöalueen pinta-alat ovat samat, eli alkuperäisen ruudun ala on kaksinkertainen verrattuna voiton antavan ruudun alaan. Koska ruutujen pinta-alat ovat x^2 ja $(x-2d)^2$, niin sivun pituus saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$x^2 = 2(x-2d)^2 = 2x^2 - 8dx + 8d^2.$$

Tämä voidaan muokata muotoon

$$x^2 - 8dx + 8d^2 = 0$$

josta edelleen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\begin{aligned} x &= \frac{8d \pm \sqrt{(8d)^2 - 4 \times 1 \times 8d^2}}{2} \\ &= 4d \pm \sqrt{8d^2} \\ &= \begin{cases} 2d\left(2-\sqrt{2}\right) \\ 2d\left(2+\sqrt{2}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Näistä ainoastaan jälkimmäinen käy ratkaisuksi, sillä $2-\sqrt{2} < 1$, eikä kolikko mahtuisi ruutuun ollenkaan jos sivun pituus olisi $2d\left(2-\sqrt{2}\right)$.

4. Muuan kansainvälinen pikaruokaketju myy uppopaistettuja kanapaloja 6, 9 ja 20 palan annoksissa.

   (a) Osoita, että voit tilata kanapaloja minkä tahansa määrän, joka on kolmella jaollinen ja vähintään 6.

(b) Osoita, että voit tilata 44, 45, 46, 47, 48, tai 49 palaa.

(c) Osoita, että *et* voi tilata tasan 43 palaa.

(d) Osoita, että voit tilata kanapaloja minkä tahansa määrän, joka on vähintään 44 palaa.

Ratkaisu:

(a) Olkoon tilattava määrä n. Kolmella jaollisuus tarkoittaa sitä, että $n = 3k$ jollain $k \geq 2$.

Jos luku k on parillinen, ts. $k = 2l$ jollain $l \geq 1$, niin $n = 6l$. Tällöin siis tilataan l kpl 6 palan annoksia.

Jos luku k on pariton, ts. $k = 2l+1$ jollain l, niin $n = 6l+3$. Tällöin tilaamalla yksi 9 palan annos jää vielä tilattavaksi $6l + 3 - 9 = 6(l - 1)$ palaa, ja voidaan siis tilata vielä $(l - 1)$ 6 palan annosta.

(b) Annetuista luvuista 45 ja 48 ovat jaollisia kolmella, joten kohdan (a) perusteella näiden määrien tilaaminen onnistuu. Muissa tapauksissa havaitaan, että $44 = 24+20 = 4\times 6+20$, $46 = 40+6 = 2 \times 20 + 6$, $47 = 20 + 27 = 20 + 3 \times 9$, ja $49 = 2 \times 20 + 9$.

(c) Tilataan x kpl 6 palan, y kpl 9 palan, ja z kpl 20 palan annoksia. Olisi siis löydettävä ei-negatiiviset kokonaisluvut x, y, z niin, että

$$6x + 9y + 20z = 43.$$

Mahdollisia muuttujan z arvoja ovat 0 tai 1. Tapauksessa $z = 0$ saadaan

$$6x + 9y = 43.$$

Tämän yhtälön vasen puoli on jaollinen kolmella, mutta oikea puoli ei. Siis yhtälön toteuttavia kokonaislukuja x, y ei ole. Vastaavasti tapauksessa $z = 1$ saadaan

$$6x + 9y = 23.$$

Tälläkään yhtälöllä ei voi olla kokonaislukuratkaisuja, koska 23 ei ole jaollinen kolmella.

(d) Kohdan (a) perusteella kolmella jaollisten lukumäärien tilaaminen onnistuu. Voidaan siis olettaa, että haluttu palojen lukumäärä n *ei* ole kolmella jaollinen, jolloin joko $n = 3k + 1$ tai $n = 3k + 2$.

Ensimmäisessä tapauksessa

$$n = 3k + 1 = 3k - 19 + 20 = 3k - 39 + 2 \times 20 = 3(k - 13) + 2 \times 20.$$

Tilataan siis 2 kpl 20 palan annoksia, jolloin jäljelle jää $3(k-13)$ palaa; nämä voidaan tilata (a)-kohdan mukaisesti, kunhan $3(k-13) \geq 6$, mistä $k \geq 15$, ja edelleen $n \geq 46$.

Tapauksessa $n = 3k + 2$ saadaan

$$n = 3k + 2 = 3k - 18 + 20 = 3(k - 6) + 20,$$

joten tilataan 1 20 palan annos ja loput $3(k-6)$ palaa (a)-kohdan mukaan; rajoitteesta $3(k-6) \geq 6$ saadaan $k \geq 8$, eli $n \geq 26$.

Ylläolevien päätelmien ja (a)-kohdan perusteella voidaan tilata mikä tahansa määrä, joka on vähintään 46. Toisaalta 44 ja 45 palan tilaukset ovat mahdollisia (b)-kohdan perusteella, siis voidaan tilata mikä tahansa määrä joka on vähintään 44.

Toinen tapa: Kohdan (b) luvut ovat kuusi peräkkäistä kokonaislukua. Siispä näistä luvuista löytyy jokainen mahdollinen jakojäännös, joka syntyy kuudella jaettaessa. Kahden luvun, joilla jakojäännös on sama, erotus on jaollinen kuudella; ts. jos $n = 6k + l$ ja $m = 6j + l$ (jakojäännös l sama molemmissa), niin

$$n - m = 6k + l - 6j - l = 6(k - j).$$

Näin ollen mikä tahansa määrä, joka on vähintään 44, saadaan tilattua tilaamalla (b)-kohdan kappalemääristä se, jolla on sama jakojäännös, ja sen jälkeen sopiva määrä 6 palan annoksia.