Kertaustehtäviä

Luku 1

257.

a) Mekaanisessa poikittaisessa aaltoliikkeessä aineen rakenneosat värähtelevät etenemissuuntaan vastaan kohtisuorassa suunnassa. Esimerkkejä ovat muun muassa jousen poikittainen aaltoliike tai veden pinnan aaltoilu.

b) Mekaanisessa pitkittäisessä aaltoliikkeessä aineen rakenneosat värähtelevät aallon etenemissuunnassa. Jousessa pitkittäinen aaltoliike näkyy tihentyminä ja harventumina. Myös ääni on ilmassa pitkittäistä mekaanista aaltoliikettä.

c) Poikittainen mekaaninen aalto voi edetä vain kiinteissä aineissa. Pitkittäinen mekaaninen aalto voi edetä kiinteissä aineissa, nesteissä ja kaasuissa.

258.

a) Yhden jakson aikana aaltoliikkeeseen osallistuvat värähtelijät ovat suorittaneet yhden värähdyksen, so. ovat käyneet molemmissa ääriasennoissa ja palanneet lähtökohtaansa. Samassa ajassa aaltoliike on edennyt aallonpituuden verran. Värähdysliikkeen taajuus ilmoittaa, kuinka monta värähdystä on tapahtunut tietyssä ajassa. Aaltoliikkeen taajuus ilmoittaa, kuinka monta aaltoa on edennyt tarkkailukohdan ohi tiettynä aikana.

b)

– Amplitudin muutokset näkyvät jousen rakenneosien värähtelyn laajuudessa, valon kirkkauden ja äänen voimakkuuden vaihteluina.

– Jousessa taajuuden suureneminen aiheuttaa sen, että useampi aalto ohittaa tarkastelukohdan tietyssä ajassa. Taajuus ja aallonpituus riippuvat toisistaan aaltoliikkeen perusyhtälön mukaisesti, joten valon taajuuden muuttuessa muuttuu myös valon aallonpituus ja se havaitaan valon hajoamisena väreihin. Äänessä taajuuden vaihtelut kuullaan äänen korkeuden vaihteluina.

259.

a) f = 15,0 Hz, λ = 2,25 m, v = ?

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $v = f\lambda = 15{,}0\ \text{Hz} \cdot 2{,}25\ \text{m} = 33{,}75\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

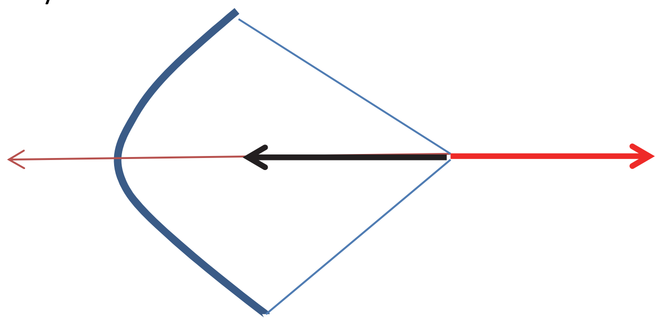
b) Δt = 5,0 min, N = 600, f = ?

Värähtelijän taajuus on $f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{600}{5 \cdot 60\ \text{s}} = 2{,}0\ \frac{1}{\text{s}} = 2{,}0\ \text{Hz}.$

Luku 2

260. k = 65 N/m, x = 0,45 m, T = ?

Jousta jännittävä voima on $\overline{T}$ ja jousen jousivoiman on $\overline{F}$, joka suuruus on $F = kx$. Newtonin III lain, voiman ja vastavoiman lain, mukaisesti voimat $\overline{F}$ ja $\overline{T}$ ovat vastakkaissuuntaisia, mutta yhtä suuria.

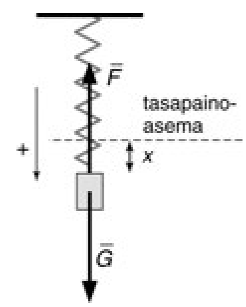


Siten jousta jännittämään tarvittavan voiman T suuruus on

$$T = F = kx = 65\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}45\,\text{m} = 29{,}25\,\text{N} \approx 29\,\text{N}.$$

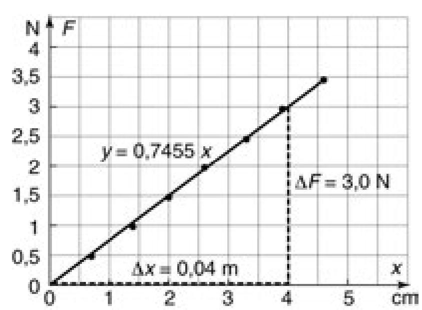
261.

a) Punnukseen vaikutta kaksi voimaa: jousen jousivoima $\overline{F}$ ja punnuksen paino $\overline{G}$. Tasapainotilanteessa jousivoiman $F = kx$ ja punnuksen painon $G = mg$ suuruudet on yhtä suuria. Siten $mg - kx = 0$ eli $kx = mg$.



Lasketaan taulukkoon venymiä vastaavat jousivoiman suuruudet.
Piirretään xF-kuvaaja.

x (cm)	**F** (N)
0,7	0,49
1,4	0,98
2,0	1,47
2,6	1,96
3,3	2,45
3,9	2,94
4,6	3,43



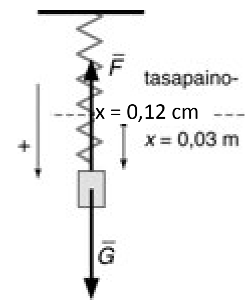
Määritetään jousen jousivakio graafisesti suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{3{,}0\ \text{N}}{0{,}04\ \text{m}} = 75\,\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

b) m = 0,51 kg, x = ?
Punnukseen vaikuttavien voimien suuruudet ovat: paino $G = mg$ ja jousivoima $F = kx$.
Kun positiivinen suunta valitaan alaspäin, niin tasapainotilanteessa
$mg - kx = 0$, josta venymä

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{0,51\ \text{kg} \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{75\ \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,06671\ \text{m} \approx 6,7\ \text{cm}.$$

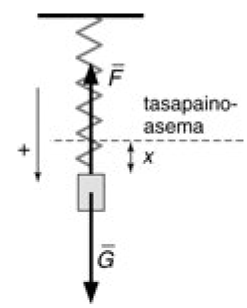
c) m = 0,050 kg, x = 0,12 m, a = ?
Kiihtyvyys on suurin ääriasemassa. Jousta on venytetty 12 cm.
Kiihtyvyys lasketaan Newtonin II lain $\bar{F}_{\text{kok}} = m\bar{a}$ mukaan
punnuksen liikeyhtälöstä $mg - kx = ma$



$$a = \frac{mg - kx}{m} = \frac{0,050\ \text{kg} \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 75\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,12\ \text{m}}{0,050\ \text{kg}} = -1,702\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx -1,7\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

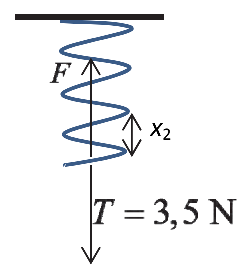
Koska positiivinen suunta on valittu alaspäin, miinusmerkki kertoo, että punnuksen kiihtyvyys on ylöspäin.

262. m = 0,485 kg, x_1 = 0,112 m, k = ?
Lasketaan ensin jousivakio.
Punnukseen vaikutta kaksi voimaa: jousen jousivoima $\bar{F}$ ja punnuksen paino $\bar{G}$. Tasapainotilanteessa jousivoiman $F = kx$ ja punnuksen painon $G = mg$ suuruudet on yhtä suuria. Siten $mg - kx = 0$ eli $kx = mg$.

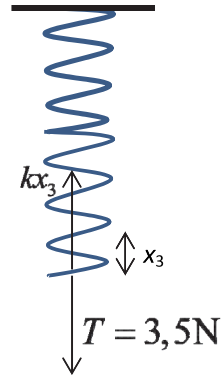


Jousivakio on $k = \frac{F}{x_1} = \frac{0,485\ \text{kg} \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,112\ \text{m}} = 42,4808\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$

a) T = 3,5 N, x_2 = ?
Venyttävän voiman suuruus on T = 3,5 N. Voiman ja vastavoiman lain mukaisesti tasapainotilanteessa jousivoima on yhtä suuri eli F = 3,5 N.
Yhtälön $F = kx$ mukaisesti, jousi venyy

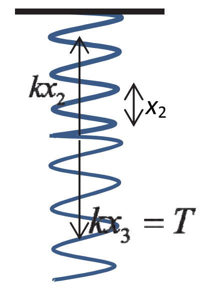


$$x_2 = \frac{F}{k} = \frac{3,5\ \text{N}}{42,4808\ \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,08239\ \text{m} \approx 8,2\ \text{cm}\ .$$



b) T = 3,5 N, $x_{3,\text{kok}}$ = ?, k' = ?
Jouset ripustetaan peräkkäin.
Jousta venytetään voimalla $\overline{T}$, jonka suuruus on T = 3,5 N. Alemman jousen jousivoima tasapainotilanteessa on yhtä eli $T - kx_3 = 0$ eli $kx_3 = T$.
Alemman jousen venymä on

$$x_3 = \frac{T}{k} = \frac{3,5\ \text{N}}{42,4808\ \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,08239\ \text{m} \approx 82\ \text{mm}.$$



Alempi jousi ja ylempi jousi vetävät toisiaan yhtä suurilla ja vastakkaissuuntaisilla voimilla.
Koska jousien jousivakio on yhtä suuri, ylempi jousi venyy yhtä paljon kuin alempi jousi.

Koska yksi jousi venyy 8,239 cm, kaksi jousta venyy 16,478 cm ≈ 16,5 cm.
Yhteinen jousivakio on $F = k'2x$, josta

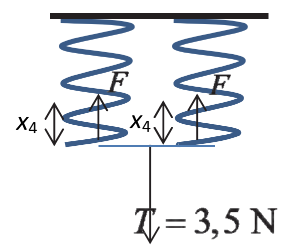
$$k' = \frac{F}{2x} = \frac{3,5\ \text{N}}{2 \cdot 0,08239\ \text{m}} = 21,2404\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 21\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

c) T = 3,5 N, x_4 = ?, k' = ?
Kun jouset ripustetaan rinnakkain, molempiin jousiin vaikuttaa venyttävästä voimasta puolet eli

$$F = \frac{T}{2} = \frac{3,5\ \text{N}}{2} = 1,75\ \text{N}.$$

$$F = kx_4$$

$$x_4 = \frac{F}{k} = \frac{1,75\ \text{N}}{42,4808\ \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,041195\ \text{m} \approx 4,1\ \text{cm}$$



Jouset venyvät puolet yhden jousen venymästä, joten $F = k'\frac{1}{2}x$.

Yhteinen jousivakio on $k' = \frac{F}{\frac{1}{2} \cdot x} = \frac{2 \cdot 3,5\ \text{N}}{0,08239\ \text{m}} = 84,9618\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 85\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Luku 3

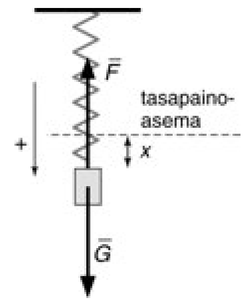
263. m = 0,45 kg, x = 0,0018 m

a) k = ?

Newtonin toisen lain mukaan tasapainotilanteessa

$\overline{F}_{\text{kok}} = \overline{0}$ eli $mg - kx = 0$, josta

$kx = mg$.



Jousivakio on

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{0,45\ \text{kg} \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,018\ \text{m}} = 245,25\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 250\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

b) T = ?

Jousen värähdysaika on

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,45\ \text{kg}}{245,25\ \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 0,26914\ \text{s} \approx 0,27\ \text{s}$$

264. m_1 = 1,0 kg, T = 2,0 s, m_2 = 0,35 kg, x_2 = ?

Jousen värähdysaika saadaan yhtälöstä $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$, josta ratkaistaan jousivakio

$$k = \frac{4\pi^2 m_1}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1,0\ \text{kg}}{(2,0\ \text{s})^2} = 9,8696\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 9,9\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Tasapainotilanteessa $m_2 g - kx_2 = 0$, josta jousen venymä

$$x_2 = \frac{m_2 g}{k} = \frac{0,350\ \text{kg} \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,8696\ \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,347886\ \text{m} = 0,35\ \text{m}.$$

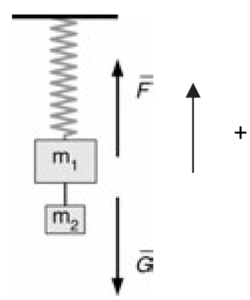
265. x = 0,128 m, m_1 = 0,52 kg, m_2 = 0,22 kg

a) a_1 = ?, a_2 = ?

Ratkaistaan jousivakio tasapainoehdosta ja sijoitetaan se punnuksen m_1 liikeyhtälöön.

Kun punnukset ovat yhdessä, tasapainotilanteessa $F - G = 0$ ja

$kx - (m_1 + m_2)g = 0$, josta jousivakio



$$k = \frac{(m_1 + m_2)g}{x} = \frac{(0,52\ \text{kg} + 0,22\ \text{kg}) \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,128\ \text{m}} = 56,71\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Kun naru on poltettu poikki, punnuksen m_1 liikeyhtälö on $kx - m_1 g = m_1 a_1$.

Ratkaistaan jousessa kiinni olevan punnuksen kiihtyvyys

$$a_1 = \frac{kx - m_1 g}{m_1} = \frac{56,71\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,128\ \text{m} - 0,52\ \text{kg} \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,52\ \text{kg}} = 4,15\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 4,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Irtoavan punnuksen m_2 kiihtyvyys on $9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) T = ?

Värähtelyn jaksonaika on

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,52\ \text{kg}}{56,71\ \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 0,602\ \text{s} \approx 0,60\ \text{s}.$$

Luku 4

266. f = 8,5 Hz, v = 12,4 m/s, s = 55 m

a) T = ?, λ = ?

Värähdysaika on $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8{,}5\ \text{Hz}} = 0{,}11765\ \text{s} \approx 0{,}12\ \text{s}.$

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan aallonpituus $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{12{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{8{,}5\ \text{Hz}} = 1{,}45882\ \text{m} \approx 1{,}5\ \text{m}.$

b) t = ?

Värähtelijä siirtyy ääriasennosta toiseen ajassa $t = \frac{T}{2} = \frac{0{,}11765\ \text{s}}{2} = 0{,}058825\ \text{s} = 0{,}059\ \text{s}.$

c) t = ?

Aalto etenee kysytyn matkan ajassa $t = \frac{s}{v} = \frac{55\ \text{m}}{12{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4{,}43548\ \text{s} \approx 4{,}4\ \text{s}.$

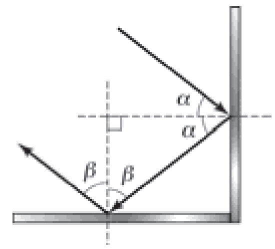
267.

a) Keinu heilahtelee edes takaisin lapsen ja keinun muodostaman systeemin ominaisvärähtelytaajuudella. Kun keinuvaa lasta tönäistään sopivassa vaiheessa, keinun vauhti kasvaa. Lapseen vaikutetaan tietyllä voimalla peräkkäisten heilahdusten aikana samassa heilahduksen vaiheessa.

b) Jaksollinen epätasaisuus tiessä aiheuttaa epämiellyttäviä resonanssivärähtelyjä autossa.

Luku 5

268.



Heijastumislain mukaan ensimmäisessä peilissä heijastuskulma on tulokulman suuruinen eli *α*.
Heijastuskulma toisesta peilistä on

$$\beta = 180° - 90° - \alpha$$
$$\beta = 90° - \alpha$$

269. v_1 = 3 800 m/s, v_2 = 5 100 m/s, α_1 = 35,5°

a) α_2 = ?

Taittumislain $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ mukaan taitekulman sini on

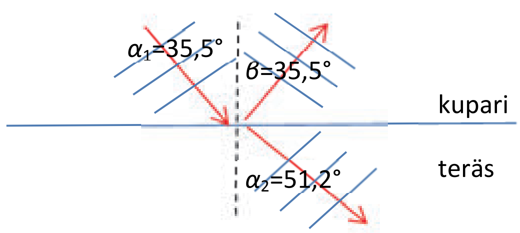
$$\sin\alpha_2 = \frac{v_2 \sin\alpha_1}{v_1} = \frac{5\,100\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 35{,}5°}{3\,800\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

josta taitekulma $\alpha_2 = 51{,}2024° \approx 51°$.

b) *β* = ?

Heijastuskulma on yhtä suuri kuin tulokulma eli $\beta = 35{,}5°$.

c)

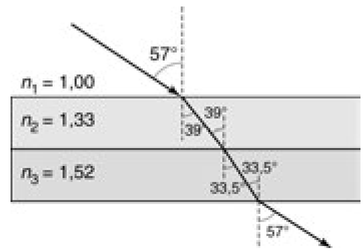


Luku 6

270.

Oikea vastaus c.
Vesi on aalto-opillisesti tiheämpää kuin ilma, taittuminen tapahtuu normaalista poispäin. Aina tapahtuu heijastuminen.

271. $\alpha_1 = 57°$, $\alpha_2 = ?$, $\alpha_3 = ?$, $\alpha_4 = ?$, $\alpha_5 = ?$, $\alpha_6 = ?$



Taittumislain mukaan $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$, josta

$\sin\alpha_2 = \dfrac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1 = \dfrac{1,00}{1,33}\cdot\sin 57°$ ja taitekulma $\alpha_2 = 39,09288° \approx 39°$.

Toisessa rajapinnassa tulokulman on edellisen rajapinnan taitekulman suuruinen eli $\alpha_3 = 39,09288°$ ja taitekulma

$\sin\alpha_4 = \dfrac{1,33}{1,52}\cdot\sin 39,09288°$, josta taitekulma $\alpha_4 = 33,48763°$.

Lasketaan vielä taittuminen ilmaan. Alimman rajapinnan tulokulma on $\alpha_5 = 33,48763°$ ja taitekulma $\sin\alpha_6 = \dfrac{1,52}{1,00}\cdot\sin 33,48763°$, josta $\alpha_6 = 56,9999° \approx 57°$.

Lasilevyissä tapahtuu siis yhdensuuntaissiirtymä.

272. $n_1 = 1,00$, $n_2 = 1,33$, $\alpha_1 = 85°$, $\alpha_2 = ?$

a) Taittumislain $n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2$ nojalla

$\sin\alpha_2 = \dfrac{n_1\sin\alpha_1}{n_2} = \dfrac{1,00\cdot\sin 85°}{1,33}$ ja $\alpha_2 = 48,505° \approx 48,5°.$

b) $c_1 = c_0 = 2,998\cdot10^8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, $\lambda_1 = \lambda_0 = 589\ \text{nm}$, $\lambda_2 = ?$, $c_2 = ?$, $f_2 = ?$

Valon nopeus ilmassa on yhtä suuri kuin tyhjiössä.

Valon nopeus vedessä $c_2 = \dfrac{c_1}{n_2} = \dfrac{2,998\cdot10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,33} = 2,2541\cdot10^8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,3\cdot10^8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}.$

Natriumin keltaisen valon aallonpituus ilmassa on yhtä suuri kuin tyhjiössä, joten aallonpituus vedessä on $\lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{n_2} = \dfrac{589\cdot10^9\ \text{m}}{1,33} = 442,8571\cdot10^9\ \text{m} \approx 440\ \text{nm}.$

Aaltoliikkeen perusyhtälön $c = \lambda f$ mukaan taajuus vedessä on

$$f_2 = \frac{c_2}{\lambda_2} = \frac{2,2541\cdot10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{442,8571\cdot10^{-9}\ \text{m}} = 5,0899\cdot10^{14}\ \text{Hz} = 5,1\cdot10^{14}\ \text{Hz}.$$

Luku 7

273. v_1 = 343 m/s, v_2 = 5 100 m/s

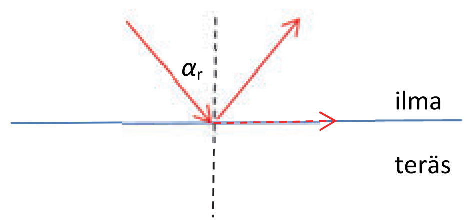
a) Kokonaisheijastuminen on mahdollista vain, kun ääni pyrkii aalto-opillisesti tiheämmästä aineesta harvempaan aineeseen eli äänen nopeus kasvaa mentäessä rajapinnan yli. Siten kokonaisheijastuminen voi tapahtua, kun ääni etenee ilmasta teräkseen.

b) v_1 = 343 m/s, v_2 = 5 100 m/s, α_r = ?

Taittumislaki äänelle on $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$.

Kun taitekulma $\alpha_2 = 90°$, taittumislaista saadaan kokonaisheijastuksen rajakulma

$$\frac{\sin\alpha_r}{\sin 90°} = \frac{v_1}{v_2}$$

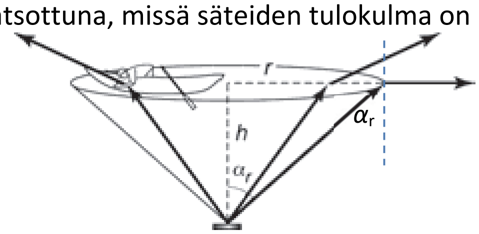


$$\sin\alpha_r = \frac{v_1}{v_2} = \frac{343\,\frac{m}{s}}{5100\,\frac{m}{s}}$$

josta rajakulma $\alpha_r = 3{,}85633° \approx 3{,}9°$.

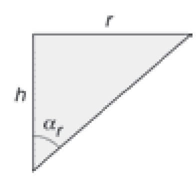
274. h = 1,2 m, n_1 = 1,33, n_2 = 1,00, r = ?

Valon tullessa vedestä ilmaan voi tapahtua kokonaisheijastuminen. Anna näkee korun silloin, kun siitä heijastuneet valonsäteet pääsevät taittumaan ilmaan. Koru näkyy siitä alueesta katsottuna, missä säteiden tulokulma on pienempi kuin kokonaisheijastuksen rajakulma.



Taittumislain $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ mukaan kokonaisheijastuksen rajakulma saadaan yhtälöstä

$$\frac{\sin\alpha_r}{\sin 90°} = \frac{n_2}{n_1}$$

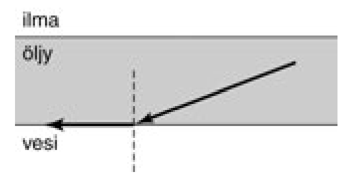


$\sin\alpha_r = \frac{1{,}00}{1{,}33}$ ja $\alpha_r \approx 48{,}75°$.

Kokonaisheijastuksen määräämä näkyvyys alue saadaan ehdosta $\frac{r}{h} = \tan\alpha_r$, josta ympyrän säde on $r = h\tan\alpha_r = 1{,}2\text{ m}\cdot\tan 48{,}75° = 1{,}368\text{ m} \approx 1{,}4\text{ m}$.

Valo kokonaisheijastuu alueen, jonka säde on 1,4 metriä, ulkopuolelta. Koska tämän alueen sisäpuolelle tuleva valo taittuu vedenpinnassa normaalista poispäin, kaulakorun voi periaatteessa nähdä paljon kauempaakin kuin kokonaisheijastusympyrän sisältä.

275. $\alpha_r = 69,5°$, , $\lambda_i = 628\ \text{nm}$, $n_i = 1{,}00$, $n_v = 1{,}33$, $\lambda_ö = ?$



Kokonaisheijastus tapahtuu, kun öljyssä kulkeva laser-säde osuu öljyn ja veden rajapintaan, joten $n_ö > n_v$. Taittumislain

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

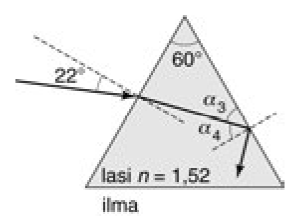
mukaan kokonaisheijastuksen rajakulma on

$\dfrac{\sin\alpha_r}{\sin 90°} = \dfrac{n_v}{n_ö}$, josta $n_ö = \dfrac{n_v}{\sin\alpha_r}$.

Edelleen taittumislain mukaan $\dfrac{\lambda_i}{\lambda_ö} = \dfrac{n_ö}{n_i}$, josta

$$\begin{aligned}
\lambda_ö &= \frac{\lambda_i n_i}{n_ö} \\
&= \frac{\lambda_i n_i \sin\alpha_r}{n_v} \\
&= \frac{628\ \text{nm}\cdot 1{,}00\cdot \sin 69{,}5°}{1{,}33} \\
&= 442{,}278\ \text{nm} \approx 442\ \text{nm}.
\end{aligned}$$

276.



Ratkaistaan taittumislain $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$ perusteella taitekulma prisman ensimmäisessä lasipinnassa

$\sin\alpha_2 = \dfrac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1 = \dfrac{1{,}00}{1{,}52}\cdot\sin 22°$, josta $\alpha_2 = 14{,}2676°$.

Lasketaan tulokulma α_4 toisessa lasipinnassa

$$\alpha_3 = 180° - 60° - (90° - 14{,}2676°) = 44{,}2676°$$

$$\alpha_4 = 90° - \alpha_3 = 90° - 44{,}2676° = 45{,}7324°$$

Lasi-ilmarajapinnan kokonaisheijastuksen rajakulma on

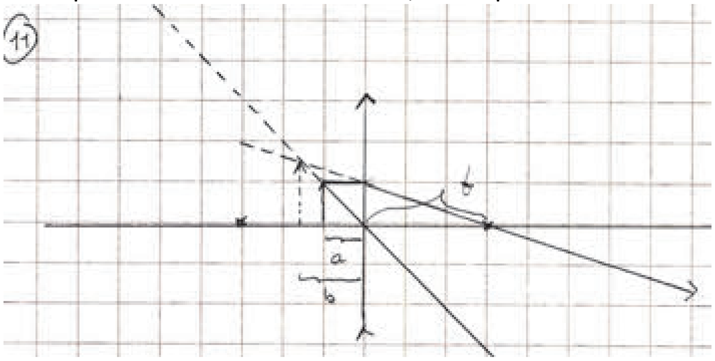
$\sin\alpha_r = \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1{,}00}{1{,}52}$ ja $\alpha_r = 41{,}1395°$.

Koska tulokulma on suurempi kuin kokonaisheijastuksen rajakulma, tapahtuu kokonaisheijastuminen.

Luku 8

277. $f = 3{,}0$ cm, $a = 1{,}0$ cm

a) $b = ?$ kupera linssi on kokoava linssi, esine polttovälillä



Linssin kuvausyhtälöstä $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ratkaistaan kuvan etäisyys linssistä

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{3{,}0\ \text{cm}} - \frac{1}{1{,}0\ \text{cm}} = -0{,}66667\ \frac{1}{\text{cm}}\ .$$

Kuvan etäisyyden arvoksi saadaan siten $b = \frac{1}{-0{,}66667\ \frac{1}{\text{cm}}} = -1{,}499993\ \text{cm} \approx -1{,}5\ \text{cm}$.

b) $m = ?$ Viivasuurennos on $m = \frac{k}{e} = \left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{-1{,}499993\ \text{cm cm}}{1{,}0\ \text{cm}}\right| = 1{,}499993 \approx 1{,}5$.

c) Kuva on suurennettu, oikeinpäin oleva valekuva.

278. $D = -2{,}5$ d, $a = 60{,}0$ cm, $b = ?$, $m = ?$

Linssin taittovoimakkuus on polttovälin käänteisluku, joten linssin polttoväli on

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{-2{,}5\ \text{d}} = \frac{1}{-2{,}5\ \frac{1}{\text{m}}} = -0{,}40\ \text{m}\ .$$

(Miinus-merkki ilmaisee, että linssillä on valepolttopiste, eli linssi on kovera.)

Linssin kuvausyhtälöstä $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ voidaan laskea nyt kuvan etäisyyden käänteisarvo

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{-0{,}40\ \text{m}} - \frac{1}{0{,}60\ \text{m}} = -4{,}16667 \frac{1}{\text{m}}\ .$$

Kuvan etäisyys linssistä on siten $b = \frac{1}{-4{,}16667 \frac{1}{\text{m}}} = -0{,}24\ \text{m} = -24\ \text{cm}$.

Kuvan viivasuurennus on $m = \frac{k}{e} = \left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{-24{,}0\ \text{cm}}{60{,}0\ \text{cm}}\right| = 0{,}40$.

279. e = 18 mm, k = 3,4 m, b = 30,0 cm, f = ?

Ratkaistaan viivasuurennoksen yhtälöstä $\frac{k}{e}=\left|\frac{b}{a}\right|$ kuvan etäisyys linssistä.

Kuvan etäisyydeksi saadaan

$$a=\frac{e}{k}b=\frac{0{,}018\text{ m}}{3{,}4\text{ m}}\cdot 30{,}0\text{ m}=0{,}1588235\text{ m}.$$

Linssin polttoväli saadaan ratkaisemalla kuvausyhtälöstä linssin taittovoimakkuus

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{0{,}1588235\text{ m}}+\frac{1}{30\text{ m}}=6{,}3296308\ \frac{1}{\text{m}},$$

josta saadaan linssin polttoväli

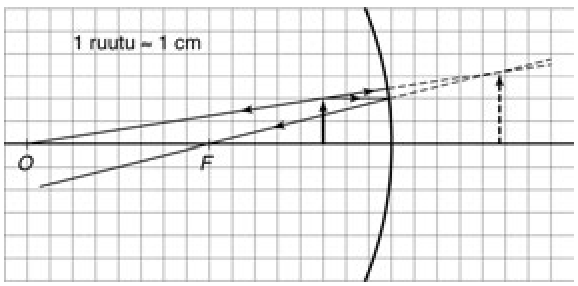
$$f=\frac{1}{6{,}3296308\ \frac{1}{\text{m}}}=0{,}159871\text{ m}\approx 16\text{ cm}.$$

Luku 9

280.

Kupera peili muodostaa esineestä aina pienennetyn oikeinpäin olevan valekuvan. Äärettömän kaukaa tulevat valonsäteet kohtaavat polttopisteessä. Kun esinettä tuodaan lähemmäs peiliä, valekuva siirtyy myös lähemmäs peiliä. Samalla valekuvan koko hieman kasvaa.

281.

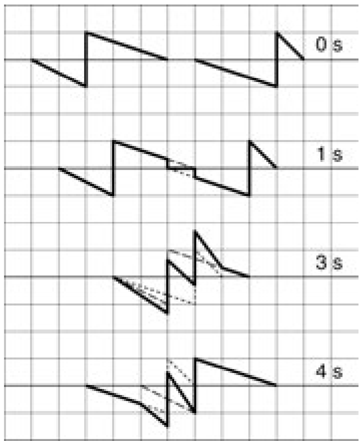


a) Todellisella kuvalla tarkoitetaan linssin läpi kulkeneiden tai peilistä heijastuneiden valonsäteiden leikatessa syntyvää kuvaa, joka voidaan saadaan näkyviin varjostimelle. Valekuva on valonsäteiden jatkeiden leikkauskohtaan syntyvä kuva. Se on peilin takana tai linssin edessä, eikä sitä voida saada näkyviin varjostimelle.

b) Kuva on peilin taakse syntyvä oikein päin oleva, suurennettu valekuva, jonka etäisyydeksi saadaan kuvasta mittaamalla 4,8 cm.

Luku 10

282.



283.

a) Aalloilla on sama aallonpituus. Kuvasta nähdään, että

$$1\frac{3}{4}\lambda = 1{,}0\ \text{m}$$

$$\lambda\ =\ 0{,}5714\ \text{m}\ \approx\ 0{,}57\ \text{m}.$$

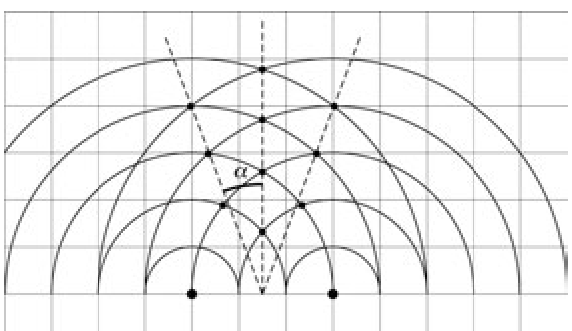
b) Kuvasta nähdään, että matkaero on $\frac{3}{2}\lambda = 1{,}5\lambda$.

c) Kuvasta nähdään, että vaihe-ero on

$$\frac{1}{2}\lambda = 0{,}5\lambda.$$

284.

Ratkaistaan tehtävä piirtämällä.
Mitataan kuvasta kysytty kulma. α = 20°.



Luku 11

285. *d* = 4,2 mm, λ = 470 nm, *k* = 2
Hilayhtälön mukaan

$$d\sin\theta = k\lambda$$

$$\sin\theta = \frac{k\lambda}{d} = \frac{2 \cdot 470 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{4,2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}$$

$$\theta = 0,01282^\circ \approx 0,013^\circ$$

286.

a) Valon osuessa hilaan tapahtuu diffraktio. Viereisistä raoista lähtevät aallot interferoivat vahvistavasti niissä suunnissa, joissa niiden matkaero on aallonpituuden kokonainen monikerta.

b) λ = 633 nm, 340 rakoa/mm, intensiteettimaksimien luku määrä = ?

Hilavakio on $d = \frac{1}{340}\text{mm.}$

Hilayhtälön mukaisesti maksimit ovat suunnissa, joissa toteutuu ehto $d\sin\theta = k\lambda$.

Koska

$$0^\circ \le \theta < 1$$

$$\sin\theta = \frac{k\lambda}{d} < 1,$$ jolloin

$$k < \frac{d}{\lambda} = \frac{\frac{1}{340}\cdot 10^{-3}\,\text{m}}{633\cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 4,6464$$

Koska kertaluku *k* on kokonaisluku, näkyy varjostimella 9 maksimia eli *k*: n arvoja 0 ... 4 vastaavat intensiteettimaksimit. Päämaksimin molemmille puolille tulee neljä sivumaksimia.

287. λ = 670 nm, 23 valomaksimia, *d* = ?, *N* = ?

a) Valomaksimien lukumäärä on 23, jolloin uloimman valomaksimin kertaluku *k* = 11. Suurin teoreettinen taipumiskulma on 90°.

Hilayhtälöstä $d\sin\alpha = k\lambda$ saadaan hilavakioksi

$$d = \frac{k\lambda}{\sin 90^0} = \frac{11\cdot 670\cdot 10^{-9}\,m}{1} = 7,37\cdot 10^{-6}\,\text{m} \approx 7,4\ \mu\text{m.}$$

Rakojen määrä *N* / mm saadaan hilavakion käänteislukuna, joka jaetaan tuhannella

$$d = \frac{1\,\text{mm}}{N}$$

$$N = \frac{1\,\text{mm}}{d} = \frac{1\cdot 10^{-3}\,\text{m}}{7,37\cdot 10^{-6}\,\text{m}} = 1,35685\cdot 10^{2} \approx 140.$$

Hilassa on noin 140 rakoa/mm.

b) λ = 670 nm, *k* = 1, *a* = 150 cm, *b* = 3,2 cm / 2 = 1,6 cm, *d* = ?

Taipumiskulma saadaan trigonometrian avulla $\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1,6\text{ cm}}{150\text{ cm}}$, josta $\alpha = 0,611°$.

Hiuksen paksuus vastaa hilassa rakojen välimatkaa. Hilayhtälöstä $d\sin\alpha = k\lambda$ saadaan hiuksen paksuus

$$d = \frac{k\lambda}{\sin\alpha} = \frac{1\cdot 670\cdot 10^{-9}\,\text{m}}{\sin 0,611^0} = 6,28\cdot 10^{-5}\,\text{m} \approx 0,063\text{ mm}.$$

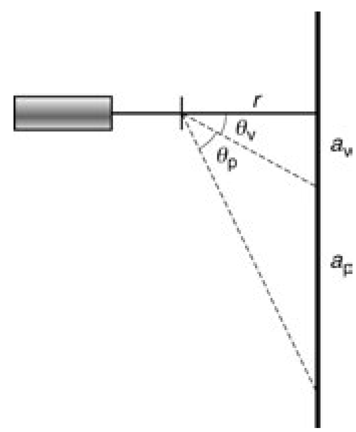
Luku 12

288.

a) Prisman läpi kulkeva valo taittuu prismaan tullessaan ja siitä poistuessaan samaan suuntaan. Prisman materiaalin taitekerroin riippuu valon aallonpituudesta niin, että violetin valon taitekerroin on suurin ja punaisen pienin. Valkoinen valo sisältää kaikki näkyvän valon aallonpituudet, jolloin valosta violetti taittuu eniten ja punainen vähiten, jolloin valkoinen valo hajoaa väreihin kulkiessaan prisman läpi.

b) Öljyläikässä värit syntyvät, kun öljykalvon yläpinnasta heijastunut valo interferoi alapinnasta heijastuneen valon kanssa. Värit riippuvat kalvon paksuudesta ja katselusuunnasta. Vinosti katsottaessa silmään tuleva alapinnasta heijastunut valo kulkee kalvon sisällä pidemmän matkan kuin suoraan ylhäältä katsottaessa. Silloin vahvistavasti interferoiva aallonpituuskin muuttuu. Ne aallonpituudet, joille heijastuneiden säteiden matkaero on aallonpituuden monikerta, $N\lambda$, vahvistuvat, ja ne joille matkaero poikkeaa puoli aallonpituutta monikerrasta, eli on $(N+½)\lambda$, sammuvat. (Jos matkaeroa joudutaan laskemaan, on huomattava, että valon aallonpituus öljyssä ei ole sama kuin ilmassa.)

289. L = 0,760 m, 600 rakoa/mm, λ_v = 400 nm, λ_p = 750 nm, k = 2, Δa = ?



Interferenssimaksimit saadaan hilayhtälöstä $d\sin\theta = k\lambda$, jossa d on hilan hilavakio ja k sivumaksimin kertaluku.

Hilan hilavakio on $d = \frac{1\text{ mm}}{600} = \frac{1\cdot 10^{-3}}{600}\text{m} = 1{,}6667\cdot 10^{-6}\text{ m}$.

Ratkaistaan hilayhtälöstä taipumiskulman sinin ja lasketaan toisen kertaluvun valomaksimin taipumiskulma violetille ja punaiselle valolle

$$\sin\theta_v = \frac{k\lambda_v}{d} = \frac{2\cdot 400\cdot 10^{-9}\cdot 600}{10^{-3}\text{ m}} = 0{,}48 \Rightarrow \theta_v = 28{,}685402°$$

$$\sin\theta_p = \frac{k\lambda_p}{d} = \frac{2\cdot 750\cdot 10^{-9}\cdot 600}{10^{-3}\text{ m}} = 0{,}90 \Rightarrow \theta_p = 64{,}158067°$$

Sivumaksimin leveys saadaan, kun lasketaan sivumaksimien reunojen etäisyydet a_p ja a_v päämaksimista, ja lasketaan niiden erotus. Kuvasta nähdään, että sivumaksimin etäisyyden, varjostimen etäisyyden ja taipumiskulman välinen yhteys on $\tan\theta = \frac{a}{r}$. Leveydeksi saadaan tällöin:

$$\Delta a = a_p - a_v = r(\tan\theta_p - \tan\theta_v) = 0{,}76\text{ m}\,(\tan 64{,}16° - \tan 28{,}69°) = 1{,}153423\text{ m} \approx 1{,}2\text{ m}.$$

290. r = 0,60 m, E = 75 lx, I = ?

Ratkaistaan valaistusvoimakkuuden yhtälöstä $E = \frac{I}{r^2}$ valovoima

$I = r^2 E$.

Sijoitetaan lukuarvot

$I = r^2 E = (0,60\ \mathrm{m})^2 \cdot 75\ \mathrm{lx} = 27\ \mathrm{cd}$.

291. I = 220 cd, r = 1,2 m, E = ?

Sijoitetaan valaistusvoimakkuuden yhtälöön $E = \frac{I}{r^2}$ lukuarvot, jolloin

$$E = \frac{I}{r^2} = \frac{220}{1,2^2} \frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2} = 152,7778 \frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2} \approx 150\ \mathrm{lx}.$$

Luku 13

292.

a) Valo on sähkömagneettista säteilyä. Sen kuvaamiseen voidaan käyttää aaltomallia, jossa sähkö- ja magneettikenttä aaltoilevat valon etenemissuuntaa vastaan kohtisuorissa suunnissa. Polarisaatiossa tarkastellaan sähkökentän värähtelyä. Valo on täysin polarisoitunutta, jos sähkökenttä värähtelee vain yhdessä valon etenemissuuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa (tasossa).

b) Valo polarisoituu esimerkiksi heijastuessaan eristeaineen pinnasta, sirotessaan ilmakehän hiukkasista ja kulkiessaan polarisoivien aurinkolasien läpi. Myös nestekidenäytöt perustuvat polarisaatioon.

293. λ = 589,3 nm, n_1 = 1,000, n_2 = 1,491, α_B = ?

Brewsterin lain mukaan eristeaineen pinnasta heijastunut valo on täysin polarisoitunutta, jos heijastuneen ja taittuneen valonsäteen välinen kulma on suora.

Valon on tultava pintaan Brewsterin kulmassa α_B, jolle pätee

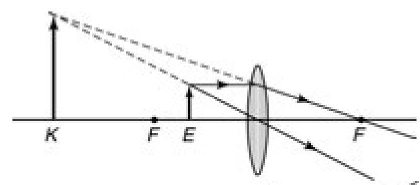
$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

Tulokulman tangentti on siten $\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,491}{1,000} = 1,491$,

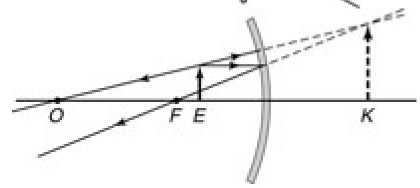
josta tulokulman arvoksi saadaan $\alpha_B = 56,15°$.

294.

a) Väite ei pidä paikkaansa. Kupera linssi muodostaa esineestä valekuvan silloin kun esineen etäisyys linssistä on pienempi, kuin linssin polttoväli.

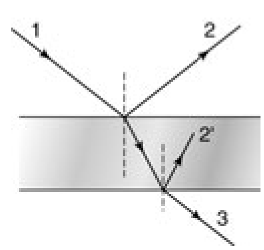


b) Väite pitää paikkansa. Peilistä heijastuneet valonsäteet hajaantuvat, ja niiden jatkeet kohtaavat peilin takana.



c) Väite pitää paikkansa. Valon taitekulma on suurempi kuin tulokulma, kun se tulee rajapintaan, jonka toisella puolella on optisesti harvempaa ainetta. Taitekulma saavuttaa silloin arvon 90°, kun tulokulma on alle 90°. Tätä tulokulmaa sanotaan kokonaisheijastuksen rajakulmaksi, α_r. Sitä suuremmilla tulokulmilla valoa ei pääse rajapinnan läpi, vaan valo heijastuu rajapinnasta kokonaan. Lasin taitekerroin näkyvälle valolle on suurempi kuin veden taitekerroin. Lasi on siis optisesti tiheämpi aine, kuin vesi, ja valo voi kokonaisheijastua.

d) Väite pitää paikkansa. Valonsäteen mennessä lasilevyn läpi, se heijastuu osittain lasilevyn etu- ja takapinnasta. Molemmista pinnoista heijastuvat valonsäteet 2 ja 2’ ovat osittain polarisoituneet niin, että niissä pinnan suuntaiset sähkökentän värähtelyt ovat voimakkaampia. Siten myös levyn läpi päässyt valonsäde 3 on osittain polarisoitunut.

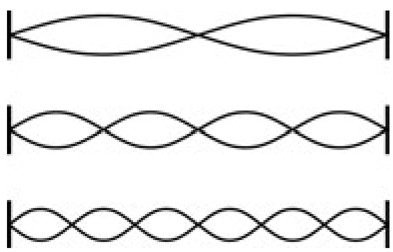


Luku 14

295. f_1 = 220 Hz, f_2 = ?, f_3 = ?, f_4 = ?, ..

a) Vapaan kielen perusvärähtelyssä, jonka taajuus on f_1, ainoat solmukohdat ovat kielen kiinnityskohdissa. Tällöin kielessä olevan seisovan aallon aallonpituus on $\lambda_1 = 2L$, jossa L on kielen pituus. Kun kitaran kieltä painetaan keskeltä kevyesti, kieleen voi syntyä vain sellaisia värähtelyjä, joissa kielen keskellä on solmukohta. Silloin kielen värähdellessä matalimmalla taajuudella f_2 seisovan aallon aallonpituus on sama kuin kielen pituus $\lambda_2 = L$. Koska aaltojen etenemisnopeus kielessä on molemmissa tapauksissa sama, aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $v = f_2\lambda_2$ ja $v = f_1\lambda_1$. Yhdistämällä yhtälöt saadaan $f_2\lambda_2 = f_1\lambda_1$, ja ilmaisemalla aallonpituudet kielen pituuden avulla saadaan $f_2L = f_1 2L$. Kysytty taajuus on siten

$$f_2 = 2f_1 = 2\cdot 220\text{ Hz} = 440\text{ Hz}.$$



b) Myös mahdollisissa ylätaajuuksissa keskellä on solmukohta, joten ne ovat taajuuden f_2 monikertoja:

$$2\cdot f_2 = 2\cdot 440\text{ Hz} = 880\text{ Hz}$$

$$3\cdot f_2 = 3\cdot 440\text{ Hz} = 1320\text{ Hz}$$

$$4\cdot f_2 = 4\cdot 440\text{ Hz} = 1760\text{ Hz}$$

eli yleisesti mahdolliset ylätaajuudet ovat

$$f_n = n\cdot f_2 = n\cdot 440\text{ Hz},\ n = 2,3,4,...$$

296.

Resonanssi on ilmiö, jossa värähtelijälle syötetään energiaa sen ominaistaajuudella. Useimmissa värähtelevissä systeemeissä (kuten esimerkiksi kitaran kieli tai tuulessa huojuva lipputanko) ominaistaajuudet ovat systeemin muodostuvien seisovien aaltojen taajuuksia. Siten resonanssi voi syntyä, jos systeemiin syötetään energiaa taajuudella, joka voi aiheuttaa värähtelevään systeemiin seisovia aaltoja, tai vahvistaa systeemissä olevien seisovien aaltojen värähtelyä.

Luku 15

297. f = 440 Hz, v= 340 m/s, l = ?

Kaikukopan sisälle syntyvän seisovan aallon pituus on neljä kertaa kopan pituus $\lambda = 4l$, sillä avoimeen päähän syntyy perusvärähtelyssä ääniaallon kupu ja suljettuun päähän solmu.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $v = f\lambda$, joten laatikon pituus on

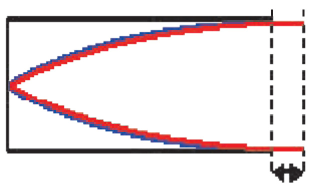
$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{\frac{v}{f}}{4} = \frac{v}{4f}.$$

Kun ääniraudan taajuus on f = 440 Hz ja äänen nopeus ilmassa on $v = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, niin kaikukopan pituus on

$$l = \frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4 \cdot 440\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 0{,}1932\ \mathrm{m} \approx 19\ \mathrm{cm}.$$

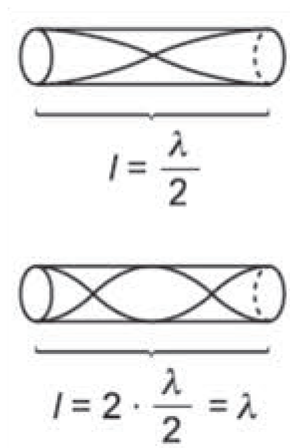
Huom.

Todellisuudessa kupukohta syntyy hieman kaikukopan ulkopuolella, joten kaikukoppa on hieman lyhyempi kuin edellä laskettu tulos ilmoittaa. Tästä löytyy tietoa internetistä hakusanalla end correction.



298.

a) Putkessa oleva ilmapatsas resonoi kaiuttimen kanssa. Interferenssin vaikutuksesta putkeen syntyy seisova aaltoliike. Putken avoimiin päihin syntyy kuvut ja välille yksi tai useita solmukohtia.



b) l = 1,10 m, f_1 = 150 Hz, f_2 = 295 Hz

Äänenvoimakkuuden ensimmäinen maksimi syntyy, kun putkessa on yksi solmu, tällöin värähtelevän ilmapatsaan pituus on puolet aallonpituudesta eli $L = \frac{\lambda}{2}$.

Toinen maksimi syntyy, kun putkessa on kaksi solmua: tällöin ilmapatsaan pituus on kaksi aallonpituuden puolikasta eli $L = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} = \lambda$.

Äänen nopeus saadaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$

$$f_1 = 150\ \text{Hz} \quad v_1 = f_1 2L = 150\ \frac{1}{\text{s}} \cdot 2 \cdot 1{,}10\ \text{m} = 330\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$f_2 = 295\ \text{Hz} \quad v_1 = f_1 L = 295\ \frac{1}{\text{s}} \cdot 1{,}10\ \text{m} = 324{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Lasketaan nopeuksien keskiarvo $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{330\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + 324{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 327\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Luku 16

299.

a) Äänen ominaisuuksia kuvaavat nopeus, taajuus ja intensiteettitaso.

b) Äänen nopeus havaitaan esimerkiksi siinä, miten nopeasti kaukana tapahtuva paukahdus kuullaan. Äänen taajuus havaitaan äänen korkeutena. Äänen voimakkuus havaitaan äänen kuuluvuutena.

c) Äänen nopeutta voidaan mitata esimerkiksi kaiun avulla tai seisovan aaltoliikkeen avulla. Äänen taajuutta voi mitata resonanssin avulla tai äänen taajuusmittarilla. Intensiteettitaso voidaan mitata desibelimittarilla.

300.

a) I = 1000 W/m^2, L = ?

Äänen intensiteettitaso on

$L = 10\lg\left(\frac{I}{I_o}\right)\text{dB}$, jossa

I on havaittava intensiteetti ja Io = 10–12 W/m^2 kuulokynnyksen intensiteetti. Siten

$$L = 10\lg\left(\frac{I}{I_o}\right)\text{dB} = 10\log\left(\frac{1000\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{10^{-12}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}\right)\text{dB} = 150\text{ dB}.$$

b) p = 0,5 cm^2, P = ?

Intensiteetti on $I = \frac{P}{A}$, joten teho on

$$P = IA = 1000\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\cdot 0{,}5\text{ cm}^2 = 0{,}05\text{ W}.$$

301. L_1 = 80 dB, L_{20} = ?

I on havaittava intensiteetti ja Io = 10–12 W/m^2 kuulokynnyksen intensiteetti.

Äänen intensiteettitaso desibeleinä on $L = 10\log\frac{I}{I_0}$ dB.

Logaritmin määritelmästä seuraa $\frac{I}{I_0} = 10^{\frac{L_1}{10}}$ ja $I = I_0\cdot 10^{\frac{L_1}{10}}$.

Yhden viulun intensiteetti on $I_1 = I_0\cdot 10^{\frac{L_1}{10}} = 1\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\cdot 10^{\frac{80}{10}} = 1{,}00\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

Kaksikymmentä viulua aiheuttaa kaksikymmentäkertaisen intensiteetin $I_{20} = 20I_1$.

Intensiteettitaso desibeleinä on nyt

$$L_{20} = 10\cdot\log\frac{I_{20}}{I_0} = 10\cdot\log\frac{20I_1}{I_0} = 10\cdot\log\frac{20\cdot 1{,}00\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}} = 93{,}0103\text{ dB} \approx 93\text{ dB}.$$

Solisti soittaa yleensä eri säveliä kuin muut soittajat.