YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 23.9.2015
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Alustava pisteitys

1. a)	Vastaluku on $-(-1)=1$ ja käänteisluku $\frac{1}{5}$.	1
	Keskiarvo on $\dfrac{1+\frac{1}{5}}{2}=\dfrac{\frac{6}{5}}{2}=\frac{3}{5}$.	1
b)	Neliön sivu $s=2$, jolloin sen pinta-ala $A_n=2^2=4$. Ympyrän halkaisija = 2, jolloin ympyrän säde $r=1$ ja pinta-ala $A_y=\pi\cdot 1^2=\pi$.	1
	Vertailu: $\dfrac{A_n}{A_y}=\dfrac{4}{\pi}=1{,}2732\ldots$, joten neliön pinta-ala on n. 27 % suurempi.	1
c)	Koska kantaluvut ovat samat, verrataan eksponentteja: $3x-2=x+1$	1
	$\Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.	1

2.	Yhdistämällä sisemmän suunnikkaan vastakkaiset kärjet havaitaan, että kuvio muodostuu kahdeksasta kolmiosta.	2
	Kunkin kolmion kanta = 2 ja korkeus = 1.	2
	Pienempi suunnikas sisältää näistä puolet, joten sen pinta-ala on $4 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2}$ cm^2 = 4 cm^2. (Tai: Ala = puolet ison suunnikkaan alasta, eli $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2$ cm^2 = 4 cm^2.)	2

3. a)	Kuvion mukaan y-koordinaattia 1 vastaavat x-koordinaatit ovat $x = -1$ ja $x = 3$.	2
b)	Kuvaaja leikkaa x-akselin tai on sen alapuolella,	1
	kun $0 \le x \le 2$.	1
c)	Kuvion perusteella funktio on vähenevä,	1
	kun $-2 \le x \le 1$.	1

4. a)	Koiran aivojen massa m_a saadaan yhtälöstä $1{,}0 = \dfrac{m_a}{0{,}012 \cdot 10^{2/3}}$,	1
	josta $m_a = 1 \cdot 0{,}012 \cdot 10^{2/3}$	1
	$= 0{,}0556... \approx 0{,}056$ (kg).	1
b)	Ihmisen keskimääräinen massa m saadaan yhtälöstä $7{,}5 = \dfrac{1{,}35}{0{,}012 \cdot m^{2/3}}$,	1
	josta $m^{2/3} = \dfrac{1{,}35}{0{,}012 \cdot 7{,}5} = 15$.	1
	Täten $m = 15^{3/2} = 58{,}0947... \approx 58$ (kg)	1

5.	Ylemmän kolmion korkeus on h. Koska kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk), niin saadaan verranto $\dfrac{h}{33} = \dfrac{55}{63}$,	3
	josta $h = \frac{33 \cdot 55}{63} = 28{,}8095...$	2
	Laudan korkeus on siten h + 55 = 83,8095… ≈ 84 (cm).	1

6. a)	Lausekkeet ovat $a(x) = 0{,}0662x + 4{,}02$	1
	ja $b(x) = 0{,}0799x + 3{,}75$	1
b)	Kokonaishinnat ovat samat, kun $0{,}0662x + 4{,}02 = 0{,}0799x + 3{,}75$	1
	$\Leftrightarrow 0{,}0137x = 0{,}27 \Leftrightarrow x = \frac{0{,}27}{0{,}0137} = 19{,}7080\ldots$ Kuukausikulutuksen tulisi olla noin 19,7 kWh.	1
c)	Vuotuinen kokonaishinta yhtiöllä A: $12 \cdot 4{,}02 + 2000 \cdot 0{,}0662 = 180{,}64$ euroa	1
	Yhtiöllä B: $12 \cdot 3{,}75 + 2000 \cdot 0{,}0799$=204,80 euroa	
	Vuoden aikana yhtiö B veloittaa $204{,}80 - 180{,}64 = 24{,}16$ euroa enemmän.	1

7.	Olkoon meetvurstia $100a$, josta rasvaa $36a$. Rasvaa poistetaan x.	1
	Yhtälö uuden pitoisuuden mukaan: $\frac{36a - x}{100a - x} = \frac{30}{100}$,	1
	josta $360a - 10x = 300a - 3x$	1
	$\Leftrightarrow 7x = 60a \Leftrightarrow x = \frac{60a}{7}$.	1
	Vertailu: $\frac{\frac{60a}{7}}{36a}$	1
	$= \frac{5}{21} = 0{,}2380\ldots \approx$ 24 %	1

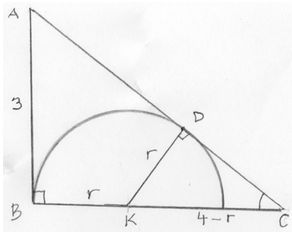
8.	Sektorin piirin pituus on $b + 2r$.	1
	Ehtoyhtälöstä $b + 2r = 1$ saadaan $b = 1 - 2r$.	1
	Sektorin pinta-ala $A(r) = \frac{br}{2} = \frac{1}{2}r - r^2$, jossa $0 < r < \frac{1}{2}$.	1
	Koska alan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, saadaan alan suurin arvo paraabelin huipussa.	1
	Siinä $A'(r) = \frac{1}{2} - 2r = 0$,	1
	joka toteutuu, kun $r = \frac{1}{4} = 0{,}25$ (m). Tämä on samalla kysytty säteen pituus.	1

9.	Suorakulmion alkuperäinen pinta-ala $= 20{,}0 \cdot 12{,}0 = 240$ (m^2).	1
	Lisättävän nurmikaistaleen leveys on x. Uusi suorakulmion pituus on $20 + x$ ja leveys $12 + x$.	1
	Suorakulmion pinta-ala on nyt $(20 + x)(12 + x)$.	1
	Kaksinkertaistumisesta saadaan yhtälö $(20 + x)(12 + x) = 2 \cdot 240$, joka sievenee muotoon $x^2 + 32x - 240 = 0$.	1
	Ratkaisukaavalla saadaan $x = -16 \pm 4\sqrt{31}$, joista vain positiivinen juuri $6{,}2710... \approx 6{,}3$ on kelvollinen.	1
	Nurmikentän pituus on tällöin $20{,}0 + x \approx 26{,}3$ (m) ja leveys $12{,}0 + x \approx 18{,}3$ (m).	1

10.	Suora $y = 3 - 3x$ leikkaa akselit pisteissä (0,3) ja (1,0).	1
	Syntyvän suorakulmaisen kolmion hypotenuusan keskipiste on $\left(\frac{0+1}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.	1
	Jakosuora kulkee tämän pisteen kautta, koska tällöin osakolmioilla on sama kanta (= hypotenuusan puolikas) ja sama korkeus (= origon etäisyys annetusta suorasta).	3
	Kysytty kulmakerroin $k = \frac{3/2}{1/2} = 3$.	1

11. a)	Merkitään tammikuun alkua ajanhetkellä $t = 0$, jolloin huhtikuun loppua vastaa $t = 4$ ja joulukuuta $t = 12$. Ajan t yksikkö on kuukausi. Lineaarista kasvua kuvaa suora, joka kulkee pisteiden (1, 7817) ja (4, 13238) kautta.	1
	Suoran yhtälö on $y = \frac{13238-7817}{4-1}t + 7817 = 1807t + 7817$.	1
	Myyntiarvio on $y(12) = 1807 \cdot 12 + 7817 = 29\,501$ (kpl).	1
b)	Eksponentiaalista kasvua kuvaa yhtälö $y(t) = y(1) \cdot k^{t-1}$, jossa k on kasvukerroin.	1
	Se saadaan yhtälöstä $13238 = 7817 \cdot k^3$, josta $k^3 = \frac{13238}{7817}$ $\Leftrightarrow k = \sqrt[3]{\frac{13238}{7817}}$ [=1, 1919…].	1
	Myyntiarvio on $y(12) = 7817 \cdot k^{11} = 53939{,}68... \approx 53\,940$ (kpl).	1

12.	Merkinnät: Ympyrän keskipiste on *K*, ympyrän sivuamispiste hypotenuusalla on *D* ja ympyrän säde on *r*. (Kuvio alla)	
	Hypotenuusan pituus $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$.	1
	$KC=4-r$	1
	Kolmiot *ABC* ja *KDC* ovat yhdenmuotoiset (kk, molemmissa suorakulma ja lisäksi kulma *C* on yhteinen).	2
	Saadaan verranto $\frac{r}{4-r}=\frac{3}{5}$,	1
	josta $5r=12-3r$, eli $r=\frac{3}{2}$.	1



13. a)	Aika, jonka kuivaaja toimii = *t.* Muuttuja noudattaa jakaumaa $N(15,2;2,5)$. Yksikkönä on kuukausi. Tällöin muuttuja $T=\frac{t-15,2}{2,5}$ noudattaa normitettua jakaumaa $N(0,1)$.	1
	Todennäköisyys sille, että kuivaaja kestää enintään takuuajan 1 v, on $P(t\leq 12)=P\left(T\leq\frac{12-15,2}{2,5}\right)=\Phi(-1,28)=1-\Phi(1,28)$	1
	$\approx 1-0,8997=0,1003$. Takuukorjaukseen joutuu siten noin 10 % kuivaajista.	1
b)	Todennäköisyys sille, että kuivaaja kestää vioittumatta yli 18 kk, on $P(t>18)=1-P(t\leq 18)$	1
	$=1-P\left(T\leq\frac{18-15,2}{2,5}\right)=1-\Phi(1,12)$	1
	$\approx 1-0,8686=0,1314$. Yli 1,5 vuotta kestää siis noin 13 % kuivaajista.	1

14. a)	Veron määrä $f(x)=0,30\cdot 40000+0,32\cdot(x-40000)$	1
	$=0,32x-800$, kun $x>40000$.	1
b)	Veron määrä on $f(41700,23)=0,32\cdot 41700,23-800$	1
	$=12544,0736\approx 12544,07$ (€).	1
c)	Veronalainen osuus on $0,85\cdot 41700,23\approx 35445,20$. Tästä menee pääomatuloveroa 30 % eli 0,30 · 35445,20 = 10 633,56 (€).	1
	Henkilön veroprosentti on siten $\frac{10633,56}{41700,23}\cdot 100\approx 25,5$.	1

15. a)	Korin suurin korkeus saadaan, kun sinitermin arvo = 1 ja pienin korkeus, kun termin arvo on -1. Suurin korkeus on siten 17 + 55 = 72 (m) ja pienin $-17+55=38$ (m).	1
	Maailmanpyörän halkaisija on siten $72-38\,[=2\cdot 17]=34$ (m).	1
b)	Maksimikorkeus saavutetaan, kun on ensi kertaa voimassa $\sin\left(\frac{\pi t}{25}\right)=1$,	1
	eli kun $\frac{\pi t}{25}=\frac{\pi}{2}+n2\pi$, josta pienin t saadaan arvolla $n=0$. Tällöin yhtälö on $\frac{\pi t}{25}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow t=\frac{25}{2}=12{,}5$ (s).	1
c)	Kysytty ajanhetki saadaan yhtälöstä $y(t)=45$, eli $17\sin\left(\frac{\pi t}{25}\right)+55=45 \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi t}{25}\right)=\frac{45-55}{17}=-0{,}5882...$	1
	$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{25}=-0{,}6288...\vee \frac{\pi t}{25}=\pi+0{,}6288...\Leftrightarrow \quad t=-\frac{25\cdot 0{,}6288...}{\pi}\approx -5{,}0044...$ tai $t=25+\frac{25\cdot 0{,}6288...}{\pi}\approx 30{,}0044....$	1
	Negatiivinen arvo ei käy sillä $t\geq 0$.Vastaus on noin 30,0 s.	1