YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 18.3.2015
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Alustava pisteitys

1.	Kuvaajan perusteella **suora 1** kulkee origon ja pisteen (1,2) kautta.	1
	Sen kulmakerroin on silloin $\frac{2}{1}=2$ ja yhtälö $y=2x$.	1
	Suora 2 kulkee pisteiden (0,1) ja (1,0) kautta. Sen kulmakerroin on $\frac{0-1}{1-0}=-1$.	1
	Se leikkaa y-akselin kohdassa $y=1$. Yhtälö on siten $y=-x+1$.	1
	Suora 3 on x-akselin suuntainen ja leikkaa y-akselin kohdassa $y=-\frac{1}{2}$.	1
	Tämä on myös suoran yhtälö.	1

2. a)	$x(4x-2)-3x(x-1)-x=4x^2-2x-3x^2+3x-x=x^2$,	1
	jonka arvo on 1, kun $x=-1$.	1
b)	Esimerkkiyhtälö $x^2-1=0$,	1
	jonka yksi juuri on 1.	1
c)	Sijoitetaan $x=2$ yhtälöön $x(x-5)+ax=2$,	1
	jolloin saadaan $2\cdot(-3)+2a=2 \Leftrightarrow 2a=8 \Leftrightarrow a=4$.	1

3. a)	Vertailu: $\frac{226-18}{220-18}$	1
	$=\frac{208}{202}=1{,}0297...$,	1
	joten naisen maksimisyke on noin 3 % korkeampi.	1
b)	Alaraja on $0{,}60\cdot(226-30)=117{,}6\approx 118$.	2
	Yläraja on $0{,}70\cdot(226-30)=137{,}2\approx 137$.	1

4. a)	Pythagoraan mukaan $BC=\sqrt{8{,}1^2-4{,}4^2}$	1
	$=\sqrt{46{,}25}=6{,}8007...\approx 6{,}8$ (cm).	1
b)	Jos terävät kulmat ovat γ ja α, niin $\sin\gamma=\frac{4{,}4}{8{,}1}=0{,}5432... \Rightarrow \gamma=32{,}9024...^\circ\approx 32{,}9^\circ$.	1
	Tällöin $\alpha=90^\circ-\gamma\approx 57{,}1^\circ$.	1
c)	Pinta-ala on $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC$	1
	$=\frac{1}{2}\cdot 4{,}4\cdot 6{,}8007\ldots=14{,}9616...\approx 15{,}0$ (cm^2)	1

5. a)	(h,T)-koordinaatiston pisteiden $(0,15)$ ja $(11,-56)$ kautta kulkevan suoran s kulmakerroin $k=\frac{-56-15}{11-0}=-\frac{71}{11}$.	1
	Tämä tarkoittaa, että alueella $0\le h\le 11$ km ilma jäähtyy 71 astetta, kun noustaan 11 km ylöspäin.	1
	Kilometrin nousua kohti ilma jäähtyy $\frac{71}{11}=6{,}4545...\approx 6{,}5$ astetta.	1
b)	Suora s leikkaa T-akselin kohdassa $T=15$ ja sen kulmakerroin $k=-\frac{71}{11}$.	1
	Sen yhtälö on siten $T(h)=-\frac{71}{11}h+15$, jossa $0\le h\le 11$ km.	1
	Kuvaaja on se osa suorasta s, joka vastaa arvoja $0\le h\le 11$.	1

6.	Pressun pinta-alaehto: $(x+2h)\cdot 1=10$,	1
	josta $x=10-2h$.	1
	Pinon tilavuus $V(h)=x\cdot 1\cdot h=(10-2h)h=10h-2h^2,\quad h>0$.	1
	$V'(h)=10-4h$, jonka nollakohta on $h=\frac{5}{2}$.	1
	Koska funktion $V(h)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, on kyseessä maksimikohta.	1
	Tällöin leveys $x=10-2h=5$ (m) ja pinon korkeus on 2,5 m.	1

<table>
<tr><td>7.</td><td>Laaditaan taulukko:
<table>
<tr><th></th><th>Nopeus (km/h)</th><th>Aika (min)</th></tr>
<tr><td>Talvi</td><td>x</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Kesä</td><td>$x+20$</td><td>12</td></tr>
</table></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Nopeus ja matka-aika ovat kääntäen verrannollisia suureita.</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Saadaan verranto: $\frac{x}{x+20}=\frac{12}{15}$,</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>josta $15x=12x+240 \Leftrightarrow x=80$ (km/h).</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>TAI:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Olkoot tieosuuden pituus s, kesänopeus v_k, talvinopeus v_t. Talvella kulunut aika 15 min = 0,25 h ja kesällä kulunut aika 12 min = 0,20 h.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Nopeusehdosta $v_k=v_t+20$ saadaan yhtälö $\frac{s}{0,20}=\frac{s}{0,25}+20$,</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>josta $s=20$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Talvinopeusrajoitus $v_t=\frac{20}{0,25}=80$ (km/h).</td><td>1</td></tr>
</table>

8. a)	Populaatio 24 tunnin kuluttua on $N(24)=1000\cdot 1,25^{24}$	1
	$=211758,2368...\approx 212\,000$ yksilöä.	1
b)	Koska mallin kasvukerroin on 1,25,	1
	kasvaa populaatio joka tunti 25 %.	1
c)	Populaation koko ylittää miljoonan, kun $N(t)>1\,000\,000$ eli $10^3\cdot 1,25^t>10^6 \Leftrightarrow 1,25^t>1000$.	1
	Ottamalla puolittain 10-kantaiset logaritmit, saadaan $t\lg 1,25>3$ $\Leftrightarrow t>\frac{3}{\lg 1,25}=30,9565...$, joten miljoona ylittyy 31 tunnin kuluttua.	1

9.	Käyrä $y=(x+1)(x+3)(x-4)$ leikkaa x-akselin, kun $x+1=0 \vee x+3=0 \vee x-4=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-3 \vee x=4$. Näistä keskimmäinen on $x=-1$.	1
	Käyrän yhtälö on avattuna $y=x^3-13x-12$.	1
	Derivaatasta $y'=3x^2-13$	1
	saadaan tangentin kulmakertoimeksi $y'(-1)=3-13=-10$.	1
	Jos kysytty kulma on α, niin $\tan\alpha=-10$,	1
	josta $\alpha=-84{,}2894...^\circ \approx -84{,}3^\circ$.	1

10.	Tuloksen 10 pistettä voi saavuttaa vain arvaamalla kaikki oikein, joten $P(10)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.	1
	Tulosta 9 pistettä ei voi saavuttaa mitenkään, sillä yksi väärä arvaus antaa $9-1=8$ pistettä. Näin ollen $P(9)=0$.	1
	Tuloksessa 8 pistettä yksi väärä vastaus voi sattua 10:een eri kysymykseen.	1
	Binomitodennäköisyyden kaavalla: $P(8)=\binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9=10\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.	2
	Kysytty todennäköisyys on $P(8)+P(9)+P(10)=11\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ $=0{,}0107...\approx 1\ \%$	1

<table>
<tr><td>11.
a)</td><td>Taulukoidaan tiedot:
<table>
<tr><th>Tiedostojen määrä (kpl)</th><th>Tiedoston koko (kt)</th><th>Luvattu hinta/tiedosto (€)</th><th>Kopiointinopeus/ tiedosto (s)</th></tr>
<tr><td>Kuvatiedostot x</td><td>10</td><td>100</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Tekstitiedostot y</td><td>1</td><td>8</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Kokonaispalkkio $K(x,y)=100x+8y$, jossa $x,y\geq 0$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Rajoitusehdot: $\begin{cases}10x+1y\leq 1000\\ 5x+1y\leq 600\end{cases}$, joissa $x,y\geq 0$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Leftrightarrow \begin{cases}y\leq -10x+1000\\ y\leq -5x+600\end{cases}.$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Rajoitussuorien leikkauspiste: $\begin{cases}10x+y=1000\\ 5x+y=600\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=80\\ y=200\end{cases}.$
Suorien leikkauspisteet akseleilla: $\begin{cases}10x+y=1000\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=100\\ y=0\end{cases}$ ja
$\begin{cases}x=0\\ 5x+y=600\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=600\end{cases}.$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Vertaillaan K-funktion arvoja kärkipisteissä:
$K(0,600)=4800,\ K(80,200)=9600,\ K(100,0)=10000$. Koska viimeisin arvo on suurin, kannattaa vakoojan kopioida pelkkiä kuvatiedostoja 100 kpl.</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>12.
a)</td><td>Merkitään: kuvaruudun leveys $=16a$, korkeus $=9a$ ja lävistäjä $d=40$ tuumaa $=40\cdot 2{,}54$ cm $=101{,}6$ cm.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Pythagoraan lauseen mukaan $(16a)^2+(9a)^2=d^2$, josta
$337a^2=d^2 \Leftrightarrow a=\dfrac{d}{\sqrt{337}}=5{,}5345\ldots$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Kuvaruudun leveys on $16a=88{,}5520\ldots\approx 88{,}6$ (cm) ja korkeus $9a=49{,}8105\ldots\approx 49{,}8$ (cm).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Kuvaruudun pinta-ala on $(9a)(16a)=144a^2$</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>$=4410{,}8\ldots\approx 4\,411(\text{cm}^2)$.</td><td>1</td></tr>
</table>

13.	Jos arvosanan numeroarvo on x ja lukumäärä (frekvenssi) on f, niin saadaan taulukko:	3

x	f	$f \cdot x$	x^2	$f \cdot x^2$
7	7	49	49	343
6	20	120	36	720
5	30	150	25	750
4	16	64	16	256
3	9	27	9	81
2	4	8	4	16
0	0	0	0	0
Σ	86	418		2166

	Arvosanojen keskiarvo $\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{418}{86} = 4,8604... \approx 4,86$.	1
	Arvosanojen keskihajonta $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\dfrac{2166}{86} - \left(\dfrac{418}{86}\right)^2}$ $= 1,2497\ldots \approx 1,25$.	2

14. a)	Jos vuotuinen korkokerroin on x, niin saadaan ehto $1000 \cdot x^3 = 1086,37$,	1
	josta $x^3 = \frac{1086,37}{1000} = 1,08637 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1,08637}$	1
	$= 1,0279... \approx 1,028$. Nimellinen vuosikorkoprosentti on siten noin 2,8.	1
b)	Inflaation takia rahan arvo on laskenut. 1 000 € vuonna 2010 vastaa $1000 \cdot 1,085$ € = 1 085 € vuonna 2013.	1
	Todellista korkoa talletukselle on kertynyt siten $1086,37 - 1085 = 1,37$ (€) kolmessa vuodessa.	2

15. a)	Sivuvektorit ovat $\overrightarrow{OA} = 2\bar{i} + \bar{j}$ ja $\overrightarrow{OB} = 2\bar{i} - 4\bar{j}$.	1
	Tällöin lävistäjävektori $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (2+2)\bar{i} + (1-4)\bar{j} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$. Neljäs kärki on siten $(4,-3)$.	1
b)	Pinta-ala on $\lvert\overrightarrow{OA}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{OB}\rvert = \sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2}$	1
	$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$.	1
c)	Särmävektorit ovat $\overrightarrow{OA} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ ja $\overrightarrow{OC} = 2\bar{i} - 2\bar{k}$.	1
	Tällöin avaruuslävistäjävektori on $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (1+1+2)\bar{i} + (2-1)\bar{j} + (1+1-2)\bar{k} =$ $4\bar{i} + \bar{j}$. Origon vastainen kärki on siten (4,1,0).	1