

CASIO[®]

*”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,
vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”*

Laske Laudatur ClassPadilla

Lyhyt matematiikka, syksy 2015



Hyvä Opettaja tai Opiskelija,

Lyhyen matematiikan yo-koe vaatii aina perusteellista harkintaa ja tehtävien mallintamista – jopa enemmän kuin pitkän matematiikan koe. Kädessäsi on vastaukset syksyn 2015 kokeeseen laskettuina ClassPad II Manager-ohjelmalla ja sen versiolla 2.000.4000. Uusimmat päivitykset sekä laskimiin että ohjelmiin löytyvät Casion kansainväliseltä tukisivustolta <https://edu.casio.com>. Ohje laskimien käyttöjärjestelmän päivitykseen on myös parin minuutin videona YouTube-kanavalla <http://bit.ly/fx-cp400>.

Tehtävien ratkaisut on ladattavissa sekä pdf-muodossa että xcp-muodossa Casion suomenkielisiltä tukisivuilta osoitteessa

<http://www.casio-laskimet.fi>

Kuinka vastaan sähköisesti?

Sähköisissä kokeissa yksi mahdollisuus on siirtää vastaukset sähköiseen lomakkeeseen **sieppausnäyttöinä**. ClassPad II Managerissa tämä onnistuu oikean hiiren napin valikosta, funktionäppäimellä F8 tai tehtäväpalkin alavetovalikosta. Siepata voidaan valita koko näkymä tai aktiivisen ikkunan sisältö. Näitä vaihtoehtoja on käytetty tämän vihkosen tekemisessä ja niitä voi myös testata kurssikokeissa.

Toinen mahdollisuus on **tallentaa sähköiset vastaukset tiedostona ja palauttaa tiedosto**. Tämän vihkosen vastaukset on tallennettu myös tiedostoiksi ja osa kuvaajista kuviksi. Vastaukset tallennetaan joko yksi kerrallaan tai koko koesuoritus voidaan laskea ja tallentaa myös yhteen tiedostoon. Tällöin alkupään tehtäviin on helppo palata kokeen loppupuolellakin, mikäli niissä huomaa tarkennettavaa. Tällaiseen työskentelyyn ClassPadeista löytyy sovellus **eActivity**.

Casion ohjelmistot ja lisenssit

Casion symbolisen laskennan ohjelmisto on vapaasti ladattavissa 90 päivän kokeiluun osoitteesta <https://edu.casio.com>. Kokeiluajan jälkeen ohjelman voi aktivoida vuodeksi kerrallaan. Yksittäisiä lisenssejä saa jälleenmyyjiltä ja ryhmälisenssejä Casiolta. Kesästä 2015 alkaen myös kaikki ClassPad fx-CP400 – laskimet tulevat vuosilisenssin kera ja opettajille suunnatut tarjoukset ovat jo vuosia sisältäneet sekä ohjelman että laskimen.

CD-levyllä tulleen ohjelman voi päivittää versioon 2.000.2000. Ohjelman voi muuttaa Subscription – jakeluversioksi, jolloin CD-levyn asennuskoodilla aktivointi on voimassa vuoden 2018 loppuun saakka sisältäen kaikki tulevatkin päivitykset.

Kokeiden digitalisoitumisen myötä myös lyhyen matematiikan opiskelijoilla on kokeissa käytössään CAS-työkalut. Casion ClassPad II Manager on yksinkertainen ja helppokäyttöinen – ja sopii erinomaisesti lyhyen matematiikan symboliseksi ohjelmistoksi. Katso vinkkejä YouTubesta <http://bit.ly/fx-cp400>

Mukavaa kuluva kouluvuotta,

Espoossa 23.9.2015

Pepe Palovaara

Tehtävä 1.

- a) Laske luvun -1 vastaluvun ja luvun 5 käänteisluvun keskiarvo.
 b) Neliön sivun pituus on 2 ja ympyrän halkaisijan pituus on myös 2 . Kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on suurempi kuin ympyrän pinta-ala?
 c) Ratkaise yhtälö $2^{3x-2}=2^{x+1}$.

Ratkaisu:

a) Luvun -1 vastaluku on 1 ja luvun 5 käänteisluku $\frac{1}{5}$. Näiden keskiarvo on

$$\frac{1 + \frac{1}{5}}{2}$$

$$\frac{3}{5}$$

b) Lasketaan pinta-alojen suhde. Ympyrän pinta-alaan tarvitaan säde, joka on puolet halkaisijasta.

$$\frac{2^2}{\pi \cdot 1^2}$$

$$\frac{4}{\pi}$$

$$\frac{4}{\pi}$$

1.273239545

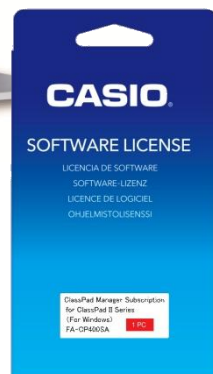
Koska neliön pinta-ala on n. $1,27$ -kertainen ympyrään alaan verrattuna, on se myös n. 27% suurempi.

c) Ratkaistaan tehtävän yhtälö

$$\text{solve}(2^{3x-2}=2^{x+1}, x)$$

$$\left\{ x = \frac{3}{2} \right\}$$

Ratkaisu on $x = \frac{3}{2}$.



Tämän vihkosen tehtävät on ratkaistu ClassPad II Manager –ohjelmalla. Ohjelma tulee laskimen fx-CP400 mukana tai sen voi hankkia myös ilman laskinta. Kysy lisää kirjakauppiaaltasi tai ota yhteyttä info@casio.fi

Tehtävistä on otettu sieppausnäytöt (ruudun-kaappaukset, screenshotit) ja ne on liitetty tähän vihkoseen sellaisenaan. Tätä vastaustekniikkaa voi käyttää myös sähköisissä kokeissa. Sieppausnäytön saa ohjelmasta näppäimellä F8, oikean hiiren valikosta tai ClassPad Managerin ikkunan valikosta Muokkaa → Sieppausnäyttö.

Tehtävä 2.

Suunnikkaan sisälle piirretään pienempi suunnikas, jonka kärjet ovat alkuperäisen suunnikkaan sivujen keskipisteissä. Laske pienen suunnikkaan pinta-ala käyttämällä kuvioon merkittyjä pituuksia.

Ratkaisu:

Jaetaan punaisella piirretty suunnikas vaakasuoralla lävistäjällä kahdeksi yhteneväksi kolmioksi. Tällöin sen pinta-alaksi saadaan

$$2 * \frac{1}{2} * 4 * 1$$

4

Vastaus on 4 cm^2 .

Tehtävä 3.

Oheisessa kuviossa on erään funktion $f(x)$ kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla ne muuttujan x arvot, joille $-2 \leq x \leq 4$ ja

- $f(x) = 1$
- $f(x) \leq 0$
- $f'(x) \leq 0$.

Ratkaisu:

- $x = -1$ ja $x = 3$ (kuvaaja on korkeudella 1)
- $0 \leq x \leq 2$ (kuvaaja on x -akselilla tai sen alapuolella)
- $-2 \leq x \leq 1$ (funktio on vähenevä, alaraja tulee tehtävän ehdosta)

Tehtävä 4.

Nisäkäslajien aivojen kokoa voidaan verrata kehon kokoon EQ-luvulla, joka lasketaan lajin keskimääräisen edustajan massoista kaavalla

$$EQ = \frac{\text{aivojen massa}}{0,012 * (\text{kehon massa})^{\frac{2}{3}}}$$

kun massat ilmoitetaan kilogrammoina.

- Tyypillisen koiran massa on 10 kg, ja lajin EQ-luku on 1,0. Mikä on koiran aivojen massa?
- Erään taulukon mukaan ihmisen EQ-luku on 7,5, ja ihmisaivojen massa on keskimäärin 1,35 kg. Mitä lukuarvoa on tällöin käytetty ihmisen keskimääräiselle massalle?

Ratkaisu:

Merkitään aivojen massaa m_{aivot} ja kehon massaa m_{keho} yksikkönä kg.

- Sijoitetaan tunnetut luvut paikoilleen yhtälöön ja ratkaistaan aivojen massa

$$\text{solve}(1.0 = \frac{m_{\text{aivot}}}{0.012 * (10)^{\frac{2}{3}}}, m_{\text{aivot}})$$

{ $m_{\text{aivot}} = 0.055699066$ }

eli koiran aivojen massa on n. 0,056 kg.

- Ratkaistaan vastaavasti ihmisen massa (vain positiivinen arvo kelpaa massaksi):

$$\text{solve}(7.5 = \frac{1.35}{0.012 * (m_{\text{keho}})^{\frac{2}{3}}}, m_{\text{keho}} | m_{\text{keho}} > 0)$$

{ $m_{\text{keho}} = 58.09475019$ }

Ihmisen keskimääräinen massa on n. 58 kg.

Tehtävä 5.

Alla olevassa kuviossa on silitylauta sivusta katsottuna. Siihen liittyvät mitat on merkitty kuvioon. Laske silityslaudan korkeus lattiasta.

Ratkaisu:

Vaakasuorat pinnat ja laudan kehikko muodostavat kaksi yhdenmuotoista kolmiota (kk, samankohtaiset kulmat ja ristikulmat), joten muodostuvan ylemmän kolmion korkeus h saadaan verrantoyhtälöstä

$$\text{solve}\left(\frac{33}{h} = \frac{63}{55}, h\right)$$

$$\{h=28.80952381\}$$

ja laudan korkeudeksi $55+28.8095\dots \approx 84$ cm.

Tehtävä 6.

Kahden sähköyhtiön A ja B hinnoittelu perustuu kiinteään kuukausittaiseen perusmaksuun, johon lisätään sähkön kulutuksen mukainen lisämaksu. Yhtiöiden tarjoamat hinnat selviävät alla olevasta taulukosta.

(Kuva YTL)

Yhtiö	Perusmaksu €/kk	Yksikköhinta snt/kWh
A	4,02	6,62
B	3,75	7,99

- a) Muodosta lausekkeet $a(x)$ ja $b(x)$ kummankin yhtiön tarjoaman sähkön kokonaishinnalle, kun sähköä kuluu x kWh ja aikavälinä on yksi kuukausi.
- b) Kuinka suuri täytyisi sähkönkulutuksen olla kuukausittain, jotta kokonaishinnat olisivat samat?
- c) Kuinka suuri on sähkön kokonaishintojen välinen ero vuoden aikana, jos sähköä kuluu 2000 kWh vuodessa?

Ratkaisu:

a) Määritellään funktiot $a(x)$ ja $b(x)$ tehtävän mukaisesti:

$$\text{define } a(x)=4.02+0.0662x$$

done

$$\text{define } b(x)=3.75+0.0799x$$

done

b) Hinnat ovat sama kun

$$\text{solve}(a(x)=b(x), x)$$

$$\{x=19.7080292\}$$

eli kulutuksen ollessa n. 19,7 kWh.

c) Ero hintojen välillä on

$$(12*4.02+0.0662*2000)-(12*3.75+0.0799*2000)$$

$$-24.16$$

Vastaus: Hintaero on vuodessa 24,16 euroa. Yhtiö B on kalliimpi.

Ilmainen trial-versio ClassPad II Manager-ohjelmasta on ladattavissa kansainvälisiltä sivuilta osoitteessa <https://edu.casio.com> etusivun alareunan linkistä.

Näiltä sivuilta löydät myös päivitykset sekä laskimiin että ohjelmiin. Voit myös kirjautua sisään ja hallinnoida lisenssejäsi.

Usein Kysytyt Kysymykset (UKK, FAQ) on suomennettu palvelemaan suomalaisia asiakkaita. Löydät vinkkejä ja vastauksia useimmin esitettyihin kysymyksiin.

The screenshot shows a website interface with several sections: 'Products' (Product information for each model), 'Educational Resources' (Check out this extensive collection of support materials for teachers and students), 'Support' (Support information), 'Trial-versio' (Download Free Trial Version / Subscription Series), 'Päivitykset, FAQ' (Download Resources), and 'User's Guide' (User's Guide for hardware and software can be downloaded). There are also search bars and 'submit' buttons.

Tehtävä 7.

Kotimaisen meetvurstin rasvapitoisuus on 36 painoprosenttia. Kuinka monta prosenttia rasvaa meetvurstista pitää vähentää, jotta tuotteen uudeksi rasvapitoisuudeksi tulee 30 painoprosenttia?

Ratkaisu:

On syytä huomata, että rasvan vähennyksen jälkeen meetvurstin massa muuttuu. Merkitään massaa ennen muutosta x ja muutoksen jälkeen y , jolloin ennen muutosta $0,36x$ on rasvaa ja loput $0,64x$ muita aineksia.

Kun rasvaa vähennetään, sitä on $0,30y$ muiden ainesten pysyessä ennallaan eli $0,64x$. Tästä saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista toinen muuttujista (tässä esimerkissä y):

$\text{solve}(0.30y+0.64x=y, y)$

$$\{y=0.9142857143 \cdot x\}$$

Muutoksen jälkeen rasvaa on siis

$$0.30 \cdot 0.9142857143 \cdot x$$

$$0.2742857143 \cdot x$$

jolloin sitä on vähennetty prosentteina

$$100 \cdot \frac{0.36x - 0.2742857143 \cdot x}{0.36x}$$

$$23.80952381$$

eli noin 24%.

Tehtävä 8.

Ympyräsektorin pinta-ala A on säteen r ja kaarenpituuden b avulla lausuttuna $A = \frac{br}{2}$. Määritä sellaisen ympyräsektorin säde, jonka piirin piirin pituus on 1,00 metriä ja pinta-ala on mahdollisimman suuri.

Ratkaisu:

Piiri on $2r+b$, joten voidaan ratkaista b yhtälöstä

$\text{solve}(2r+b=1, b)$

$$\{b=-2 \cdot r+1\}$$

Tällöin sektorin alan lauseke saadaan muotoon

$$A = \frac{b \cdot r}{2} \mid b = -2 \cdot r + 1$$

$$A = -0.5 \cdot r \cdot (2 \cdot r - 1)$$

$\text{expand}(-0.5 \cdot r \cdot (2 \cdot r - 1))$

$$-r^2 + 0.5 \cdot r$$

jossa $0 < r < 0.5$. Lasketaan alan suurin arvo:

$$f_{\text{Max}}(-r^2 + \frac{r}{2}, r)$$

$$\{\text{MaxValue}=0.0625, r=0.25\}$$

Säde on siis 0,25 metriä.

Vaihtoehtoisesti suurimman arvon voi perustella näin: Pinta-alan lauseke on muuttujan r suhteen toisen asteen polynomifunktio, jonka kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli. Suurin arvo saadaan sen ainoassa derivaatan nollakohdassa:

$$\frac{d}{dr} \left(-r^2 + \frac{r}{2} \right)$$

$$-0.5 \cdot (4 \cdot r - 1)$$

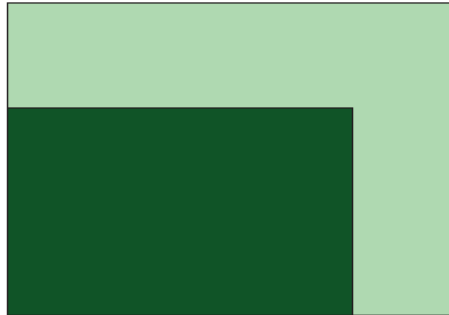
$\text{solve}(-0.5 \cdot (4 \cdot r - 1) = 0, r)$

$$\{r=0.25\}$$

Tehtävä 9.

Suorakulmion muotoisen nurmikentän koko on 20,0 m x 12,0 m. Sen pinta-ala halutaan kaksinkertaistaa lisäämällä kahdelle sivulle yhtä leveä nurmikaistale oheisen kuvion mukaisesti. Määritä näin saadun nurmikentän pituus ja leveys 0,1 metrin tarkkuudella.

(Kuva YTL)



Ratkaisu:

Merkitään lisättävän nurmikaistaleen leveyttä $x > 0$ ja ratkaistaan sille arvo yhtälöstä $\text{solve}((12+x)(20+x)=2*12*20, x) | x > 0$

$$\{x=6.271057451\}$$

Uuden nurmikentän mitat ovat $20+x$ ja $12+x$ eli n. 26,3 m x 18,3 m.

Tehtävän voi laskea likiarvoisesti myös taulukoimalla mittoja 0,1 metrin välein ja laskemalla vastaava pinta-ala. Tällöin ei mahdollisesti saa aivan täysiä pisteitä.

Kun sivun pituus kasvaa, niin pinta-alakin kasvaa. Taulukosta riittää siis etsiä kaksinkertaista pinta-alaa 480 m^2 vastaavat sivun pituudet. Lasketaan A- ja B-sarakkeisiin sivujen pituudet 0,1 m välein ja C-sarakkeeseen alueen pinta-ala sivujen tulona:

	A	B	C
1	20	12	240
2	20.1	12.1	243.21
3	20.2	12.2	246.44
4	20.3	12.3	249.69
5	20.4	12.4	252.96
6	20.5	12.5	256.25
7	20.6	12.6	259.56
8	20.7	12.7	262.89
9	20.8	12.8	266.24
10	20.9	12.9	269.61
11	21	13	273
12	21.1	13.1	276.41
13	21.2	13.2	279.84
14	21.3	13.3	283.29
15	21.4	13.4	286.76
16	21.5	13.5	290.25

	A	B	C
60	25.9	17.9	463.61
61	26	18	468
62	26.1	18.1	472.41
63	26.2	18.2	476.84
64	26.3	18.3	481.29
65	26.4	18.4	485.76
66	26.5	18.5	490.25
67	26.6	18.6	494.76
68	26.7	18.7	499.29
69			
70			
71			
72			
73			
74			
75			

Tehtävä 10.

Suora $y = 3 - 3x$ rajaa positiivisten koordinaattiakselien kanssa kolmion. Millä kulmakertoimen k arvolla suora $y = kx$ jakaa tämän kolmion kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan?

Ratkaisu:

Annetun suoran leikkauspisteen positiivisten akselien kanssa ovat

$$y=3-3x \mid x=0$$

$$y=3$$

$$\text{solve}(0=-3 \cdot x+3, x)$$

$$\{x=1\}$$

Tällöin jakamattoman kolmion pinta-ala on

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1$$

$$\frac{3}{2}$$

Tehtävän mukaisesti osiin jaettu kolmio muodostuu siis kahdesta pinta-alaltaan $\frac{3}{4}$ olevasta kolmiosta. Origin kautta kulkeva jakosuora säilyttää alemman kolmion kannan, jonka pituus on 1. Koska kolmion pinta-ala on oltava $\frac{3}{4}$, voidaan kolmiolle ratkaista korkeus h :

$$\text{solve}\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h = \frac{3}{4}, h\right)$$

$$\left\{h = \frac{3}{2}\right\}$$

Tämä on samalla alkuperäisen kolmiota rajoittavan suoran pisteen y -koordinaatti. Ratkaista vastaava x -koordinaatti

$$y=3-3x \mid y=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} = -3 \cdot x + 3$$

$$\text{solve}\left(\frac{3}{2} = -3 \cdot x + 3, x\right)$$

$$\left\{x = \frac{1}{2}\right\}$$

Jakava suora kulkee origin ja pisteen $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ kautta, joten sen kulmakerroin on

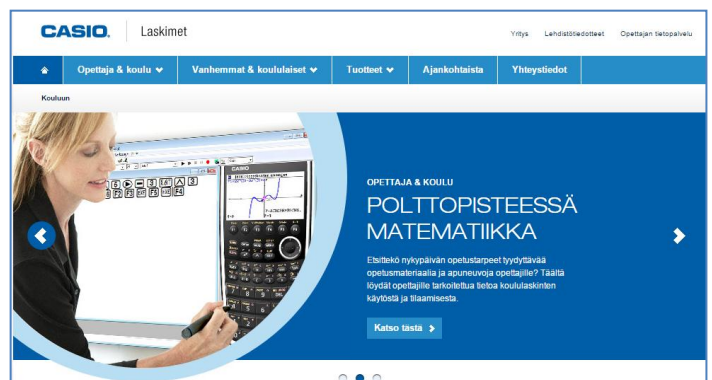
$$\left(\frac{3}{2}\right) / \left(\frac{1}{2}\right)$$

3

Vastaus: Kulmakerroin on 3.

Usean vuoden yo-kokeiden ratkaisut sekä lyhyen että pitkään matematiikkaan löytyvät Casion suomenkielisiltä tukisivuilta linkistä <http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opetusmateriaalia/>

Viimeisimmistä kokeista löytyy myös ClassPadin eActivity-sovelluksella tehdyt tiedostot. Ne avautuvat kaksoinapsauttamalla suoraan ClassPad Manageriisi.



The screenshot shows the Casio website's navigation menu with options: Opettaja & koulu, Vanhemmet & koululaiset, Tuotteet, Ajankohtaista, and Yhteyshiedot. Below the menu is a banner for 'POLTTOPISTEESSÄ MATEMATIIKKA' featuring a woman using a Casio ClassPad. The banner text includes: 'OPETTAJA & KOULU POLTTOPISTEESSÄ MATEMATIIKKA' and 'Etteikö nykyäpäivän opetusarpeet tyydyttävää opetusmateriaalia ja apuneuvoja opettajille? Täällä löydät opettajille tarkoitettua tietoa koululaskinten käytöstä ja tilaamisesta.' A 'Katso tästä' button is also visible.

Tehtävä 11.

Uusi puhelinmalli tuli markkinoille tammikuun alussa. Mallia myytiin tammikuun aikana 7817 kappaletta ja huhtikuun aikana 13238 kappaletta. Esitä arvio puhelinmallin joulukuun myynnille, kun oletetaan, että myynti kasvaa

- a) lineaarisesti
b) eksponentiaalisesti.

Ratkaisu:

a) Kolmessa kuukaudessa (tammikuun loppu – huhtikuun loppu) kasvua on kappaleissa
13238–7817

5421

Jos kasvun oletetaan olevan lineaarista, niin kuukausittainen kasvu on

$$\frac{5421}{3}$$

1807

puhelinta ja joulukuun myynniksi voidaan ennustaa

$$7817+11*1807$$

27694

b) Merkitään kuukausittaista kasvukerrointa $k > 0$, jolloin se voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\text{solve}(k^3 * 7817 = 13238, k)$$

 $\{k=1.191957457\}$

Myynnin ennuste joulukuulle on

$$1.191957457^{11} * 7817$$

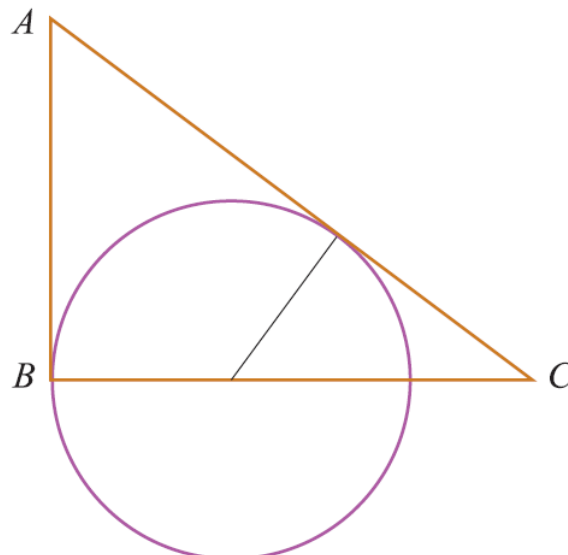
53939.68633

eli noin 53940 kpl.

Tehtävä 12.

suorakulmaisen kolmion ABC kateettien pituudet ovat $AB = 3$ ja $BC = 4$. Ympyrän keskipiste sijaitsee pidemmällä kateetilla. Lisäksi ympyrä kulkee pisteen B kautta ja sivuaa kolmion hypotenuusaa. Määritä ympyrän säde.

(Kuva YTL)



Ratkaisu:

Merkitään ympyrän keskipistettä K ja säteen ja janan AC leikkauspistettä D. Pythagoraan lauseen nojalla janan AC pituus on

$$\sqrt{3^2+4^2}$$

5

Koska $AB = AD$ yhtenevien kolmioiden AKB ja AKD takia, niin jana $DC = 2$. Merkitään ympyrän sädettä x , jolloin soveltamalla Pythagoraan lausetta suorakulmaiseen kolmioon KDC saadaan ratkaistua säde x

$$\text{solve}(2^2+x^2=(4-x)^2, x)$$

$$\left\{x=\frac{3}{2}\right\}$$

Ympyrän säde on $\frac{3}{2}$.

Tehtävä 13.

Hiustenkuivaaja toimii voittumatta ajan, joka on normaalijakautunut odotusarvona 15,2 kuukautta ja keskihajontana 2,5 kuukautta. Kuivaajalla on yhden vuoden takuu.

- Kuinka monta prosenttia kuivaajista joutuu takuukorjaukseen?
- Kuinka monta prosenttia kuivaajista toimii voittumatta yli 18 kuukautta?

Ratkaisu:

a) Kyseessä on normaalijakauman kertymäfunktion arvo $X \leq 12$, missä X ="laitteen vikaantumisaika kuukausina".
normCDF(0, 12, 2.5, 15.2)

0.1002725674

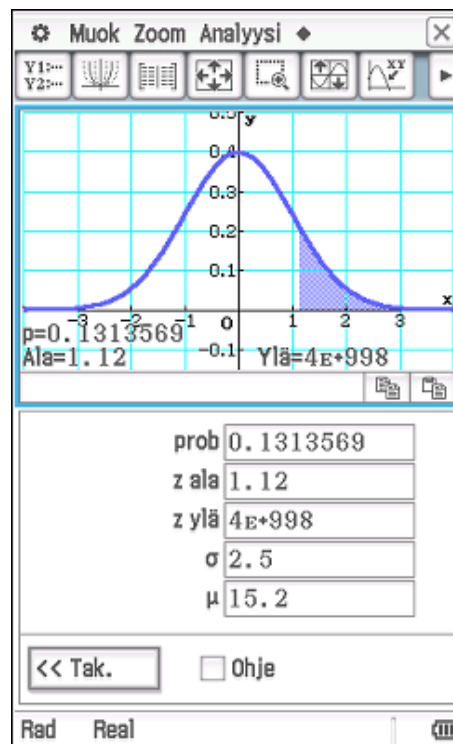
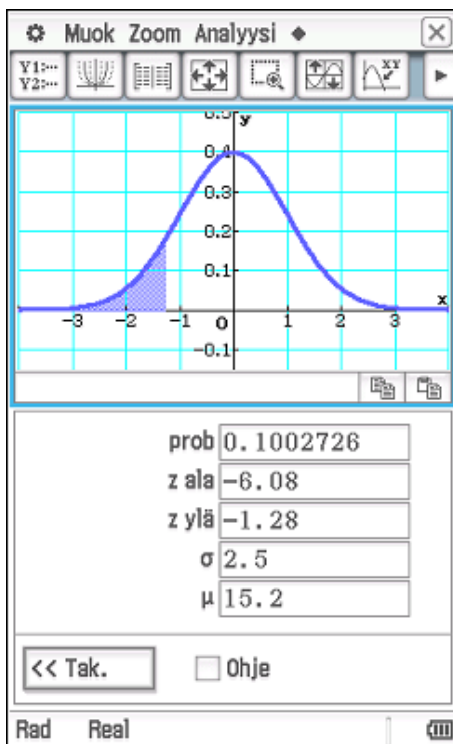
Siis noin 10% laitteista joutuu takuukorjaukseen.

b) Lasketaan nyt normaalijakauman kertymäfunktion arvo, kun $X > 18$:
normCDF(18, ∞, 2.5, 15.2)

0.131356881

N. 13% laitteista kestää yli 18 kuukautta.

Sama tehtävä on ratkaistu graafisesti Taulukko-sovelluksen jakaumien kautta ClassPad Managerilla.



Normitetuiksi arvoiksi saadaan a-kohdassa -1,28 (yläraja) ja b-kohdassa 1,12 (alaraja).

Kuvaaja selventää asiaa ja auttaa arvioimaan vastauksen suuruusluokan oikeaksi.

Tehtävä 14.

Vuonna 2014 pääomatulojen veroprosentti on 40000 euroon saakka 30 ja sen yli menevältä osalta veroprosentti on 32.

- a) Muodosta lauseke $f(x)$ pääomatuloveron suuruudelle, kun pääomatulo x on yli 40000 euroa vuodessa.
 b) Laske veron määrä, kun pääomatuloja on 41700,23 euroa vuodessa.
 c) kun yksityishenkilö saa osinkotuloa pörssiyhtiön osakkeista, niin veronalainen osuus on 85% osinkotuloista. Tästä osuudesta maksetaan pääomatuloveroa yllä mainitun säännön mukaisesti. Kuinka monta prosenttia veroa henkilö maksaa osinkotuloistaan, kun osingon määrä on 41700,23 euroa vuodessa?

Ratkaisu:

a) Määritellään funktio

$$\text{define } f(x)=0.3*40000+0.32*(x-40000)$$

done

b) Sijoitetaan a-kohdan funktioon pääomatulot

$$f(41700.23)$$

12544.0736

jolloin veron suuruudeksi saadaan n. 12544,07 euroa.

c) Koska $0,85*41700,23 < 40000$, niin vero on koko määrältä 30%:

$$0.3*0.85*41700.23$$

10633.55865

mikä on sentin tarkkuudella 10633,56 euroa. Henkilön veroprosentiksi tulee tällöin

$$\frac{10633.56}{41700.23} * 100$$

25.50000324

Vastaus: Veroprosentti on 25,5.

Tehtävä 15.

Aino ja Mikko ovat maailmanpyörän kyydissä. Korin korkeus y merenpinnan tasosta mitattuna on

$$y=17\sin\left(\frac{\pi t}{25}\right)+55 \text{ metriä,}$$

kun ajan t yksikkönä on sekunti ja kulma ilmaistaan radiaaneina.

- a) Laske korin suurin ja pienin korkeus sekä maailmanpyörän halkaisija.
 b) Kuinka monen sekunnin jälkeen kori saavuttaa ensimmäisen kerran maksimikorkeutensa hetken $t=0$ jälkeen?
 c) Kuinka monen sekunnin kuluttua kori on ensimmäisen kerran hetken $t=0$ jälkeen 45 metrin korkeudella merenpinnan tasosta? Voit ratkaista tämän kohdan joko graafisesti kuvaajan avulla, kun $0 \leq t \leq 50$ sekuntia, tai laskemalla lausekkeiden avulla.

Ratkaisu:

a) Koska sinifunktio on rajoitettu välille $-1 \leq \sin x \leq 1$, niin korin suurin korkeus on metreissä

$$17*1+55$$

72

ja vastaavasti pienin korkeus

$$17*(-1)+55$$

38

Maailmanpyörän halkaisija metreissä on näiden erotus

$$72-38$$

34

Vaihtoehtoisesti halkaisija voidaan päätellä amplitudin avulla: $2*17=34$.

b) Ratkaistaan yhtälöstä se hetki t , jolloin sinifunktio saa suurimman arvonsa:

$$\text{solve}(\sin\left(\frac{\pi t}{25}\right)=1, t)$$

$$\{t=50 \cdot \text{constn}(1)+12.5\}$$

Ensimmäisen kerran kori on maksimikorkeudessaan 12,5 sekunnin kuluttua.

c) Ratkaistaan yhtälöstä hetki t , jolloin funktio saa arvon 45:

$$\text{solve}(17 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{25}\right)+55=45, t) \mid 0 \leq t \leq 50$$

$$\{t=30.00442765, t=44.99557235\}$$

Maaailmanpyörän kori on ensimmäisen kerran lähdön jälkeen 45 metrin korkeudella n. 30 sekuntia lähdöstä.

Huom.

Huom: Ajan hetkellä $t=0$ kori ei ole ala-asennossa, vaan korkeudella 55 metriä:

$$17 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{25}\right)+55 \mid t=0$$

55

Mikäli haluat perehtyä ClassPadin käyttöön lukion matematiikan kurssien osalta, on [YouTuben](#) kanava "fx-CP400" hyvä tapa aloittaa. Lyhyillä videoilla on näytetty askel kerrallaan ongelman ratkaisu symbolisella ClassPad Managerilla. Jokaisen videon kuvaustekstissä on kuvattu ratkaistava ongelma ja joissain tehtävissä on opetettu hieman teoriaa laskujen takana.

Videon asetuksista voi asettaa resoluution mahdollisimman korkeaksi ja avata videon koko näytön tilaan. Tällöin on helpompaa nähdä opastus ja korostetut kursorin liikkeet. Ja videossahan voi aina palata taaksepäin!

