Lukion matematiikka

ClassPad II Manager apuvälineenä

Pertti Lehtinen, Pepe Palovaara

Saatesanat

Hyvä lukija,

Tämä oppikirja on tarkoitettu lukion matematiikan opiskelun tueksi sekä kertauskirjaksi niin ylioppilas- kuin kurssikokeisiinkin. Opiskelun aikana kirjan esimerkit valottavat opiskeltavaa asiaa monelta kantilta ja videoidut ratkaisut opastavat itseopiskeluun ja hyvään apuvälineen hallintaan.

Kirjan jokaisessa luvussa on esitetty selkeästi teoria ja rikastettu sitä esimerkkien avulla. Aihepiireittäin on koottu 15 keskeisintä tehtävää, jotka on jaettu kahteen luokkaan.

- ***Alkuosan tehtävät*** on tarkoitettu perustietojen testaamiseen ja ne on osattava laskea ilman apuvälineitä – aivan kuten ylioppilaskokeissa tai kurssikokeissakin. Tehtävien vastaukset löytyvät kirjan lopusta.

- ***Loppuosan tehtävät*** ovat vaikeampia ja soveltavampia. Näiden tehtävien avulla voidaan mitata syvällisemmän hallinnan taso ja perustaitojen omaksuminen. Jokaisen loppuosan tehtävän kohdalta löytyy kaksi linkkiä.

    - ”***tiedosto***”-linkki johtaa pilvipalvelun kautta jaettuun ClassPad II Managerin tiedostoon, joka voidaan ladata omalle koneelle. Klikkaamalla ladattua tiedostoa se aukeaa ClassPad II Managerissa ja tehtyjä laskuja voidaan tutkia tai muokata sovelluskohtaisesti.

      Moni tehtävistä on ratkaistu Pääsovelluksessa, joten nämä laskut näkyvät Pääsovelluksessa. Vastaavasti geometriset kuvat ovat Geometria-sovelluksessa, tilastolaskut Tilastosovelluksessa, jne.

    - ”***video***”-linkki avaa videon, jossa esitetään vaiheittainen ratkaistu suomeksi puhuttuna. Videoiden tarkoitus on kertoa tehtävien perustelut ja niissä käytetyt laskutoimitukset. Näistä videoista saat myös hyviä vinkkejä ClassPad II Managerin käytöstä matemaattisena apuvälineenä.

Tehtäväosion alussa on myös linkki soittolistaan, jonne kaikki kurssin videoidut ratkaisut on tallennettu. Kirjan lisäksi suosittelemme tutustumista vanhoihin ylioppilaskokeisiin.

Mukavia hetkiä kirjan parissa!

Turussa 1.10.2016

Tekijät

Pertti Lehtinen
FM, lehtori
TSYK

Pepe Palovaara
FM, Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

Sisällysluettelo

Sisällysluettelo

Sisällysluettelo

Sisällysluettelo

M1 Funktiot ja yhtälöt

Pitkän matematiikan kurssin M1 Funktiot ja yhtälöt keskeisiä sisältöjä ovat murtolukujen peruslaskutoimitukset, potenssi, ensimmäisen asteen yhtälö, neliöjuuri, yleinen juuri, murtopotenssi, prosenttilasku, funktio sekä suoraan ja kääntäen verrannollisuus.

1.1. Laskujärjestys

1. Sulkeissa olevat laskut
2. Potenssiin korotus
3. Kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
4. Yhteen - ja vähennyslaskut

Esim. $5-2\cdot(4-1)^2:6=5-2\cdot 3^2:6=5-2\cdot 9:6=5-18:6=5-3=2$

- Jos negatiivisten lukujen määrä on parillinen tulossa tai osamäärässä, niin tulos on positiivinen

  Esim. $-2\cdot(-3)\cdot 4=24$ ja $-2\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-1)=6$

- Jos negatiivisten lukujen määrä on pariton tulossa tai osamäärässä, niin tulos on negatiivinen

  Esim. $-100:(-10):(-5)=-2$ ja $-20:(-10)\cdot(-1)=-2$

- Jos lausekkeessa on sisäkkäisiä sulkeita, lasketaan ensin sisimmän sulkulausekkeen arvo.

- Jos lausekkeessa kaarisulkeiden $(\ )$ lisäksi on käytetty hakasulkeita $[\ ]$ ja aaltosulkeita $\{\ \}$, niin tällöin sulkeiden järjestys on seuraava $\{[(\ )]\}$.

Esim. 1.1. **a)** $200-\{20+[35-(3+2)]\}=200-\{20+[35-5]\}=200-\{20+30\}=200-50=150$

Yleensä käytetään vain kaarisulkeita ( )

b) $(10-3\cdot 2^3+32:4)^2=(10-3\cdot 8+8)^2=(10-24+8)^2=(-6)^2=36$

Muista laskujärjestys

1.2. Peruslaskutoimitukset

Peruslaskutoimituksia ovat yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku, joihin liittyvät seuraavat nimitykset.

- yhteenlaskettava + yhteenlaskettava = summa
- vähenevä - vähentäjä = erotus
- kertoja · kerrottava = tulo
- $\dfrac{\text{jaettava}}{\text{jakaja}} = \text{osamäärä}$ **Muista myös nimitys** $\dfrac{\text{osoittaja}}{\text{nimittäjä}}$

1.3. Murtolukujen laskutoimitukset

- Yhteen – ja vähennyslasku: $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = {}^{d)}\dfrac{a}{b} \pm {}^{b)}\dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} \pm \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$

Lavennetaan samannimisiksi ja lasketaan yhteen tai vähennetään keskenään osoittajat.

Esim. $\dfrac{1}{2} + 1\dfrac{3}{5} = {}^{5)}\dfrac{1}{2} + {}^{2)}\dfrac{8}{5} = \dfrac{5}{10} + \dfrac{16}{10} = \dfrac{5+16}{10} = \dfrac{21}{10} = 2\dfrac{1}{10}$

- Kertolasku: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

Kerrotaan osoittajat ja nimittäjät keskenään. Jos mahdollista, supistetaan ennen kertolaskua

Esim. $\dfrac{3}{7} \cdot 2\dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{14}{5} = \dfrac{3}{\underset{1}{\cancel{7}}} \cdot \dfrac{\overset{2}{\cancel{14}}}{5} = \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \dfrac{6}{5} = 1\dfrac{1}{5}$

- Jakolasku: $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$

Esim. $\dfrac{3}{4} : \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{1} = \dfrac{3 \cdot 3}{4 \cdot 1} = \dfrac{9}{4} = 2\dfrac{1}{4}$

1.4. Vastaluku ja käänteisluku

- Kahta lukua, joiden summa on nolla, sanotaan toistensa **vastaluvuiksi**.

$3+(-3)=0$ $\boxed{\textbf{SUMMA = 0}}$ Luvun a vastaluku on $-a$

$a+b=0$, josta $a=-b$ a ja b ovat toistensa vastalukuja.

- Kahta lukua, joiden tulo on yksi, sanotaan toistensa **käänteisluvuiksi**.

$\frac{1}{4}\cdot 4=1$ $\boxed{\textbf{TULO = 1}}$ Luvun a käänteisluku on $\frac{1}{a}$

$a\cdot b=1$, josta $a=\frac{1}{b}$ a ja b ovat toistensa käänteislukuja.

1.5. Lukujoukot

Luonnollisten lukujen joukko	$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$	(Natural)
Kokonaislukujen joukko	$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$	(Zahl)
Rationaalilukujen joukko	$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$	(Quotient)
Reaalilukujen joukko	$\mathbb{R}$	(Real)
Kompleksilukujen joukko	$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, i^2 = -1$	(Complex)

Huomautus: Useasti matematiikassa käytetään myös merkintöjä

Positiivisten kokonaislukujen joukko	$\mathbb{Z}_+ = \{1,2,3,4,\ldots\}$
Negatiivisten kokonaislukujen joukko	$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4,-3,-2,-1\}$
Positiivisten reaalilukujen joukko	$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x > 0\}$
Negatiivisten reaalilukujen joukko	$\mathbb{R}_- = \{x \mid x < 0\}$
Irrationaalilukujen joukko	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \mathbb{R}-\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$
Ei – negatiiviset luvut	$\{x \mid x \geq 0\}$

1.6. Reaalilukuvälit

Reaalilukujen tärkeitä osajoukkoja ovat reaalilukuvälit, joilla tarkoitetaan lukusuoran yhtenäistä osaa.

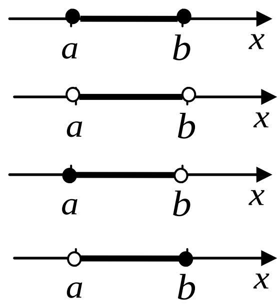
Rajoitetaan tutkimus ensin kahden luvun a ja b välille $(a<b)$.

suljettu väli $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\le b\}$

avoin väli $]a,b[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$

puoliavoimet välit $[a,b[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x<b\}$

$]a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\le b\}$



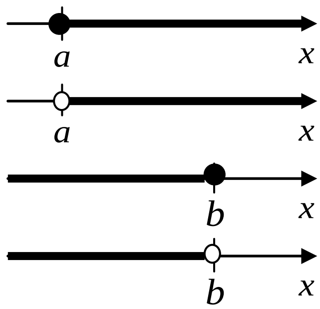
Tutkitaan vielä reaalilukuvälejä, joita ei ole rajoitettu.

$[a,\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge a\}$ eli lyhyesti $x\ge a$

$]a,\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>a\}$ eli lyhyesti $x>a$

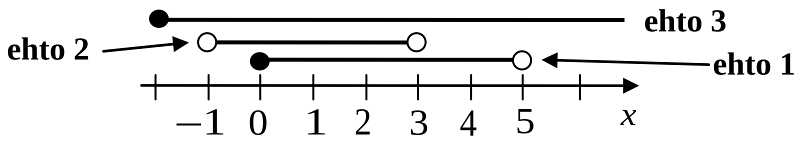
$]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le b\}$ eli lyhyesti $x\le b$

$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<b\}$ eli lyhyesti $x<b$

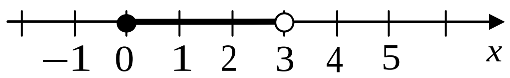


Esim. 1.2. **a)** Esitä lukusuoralla ne x:n arvot, jotka toteuttavat kaikki kolme ehtoa **ehto 1:** $x\in[0,5[$, **ehto 2:** $-1<x<3$ ja **ehto 3:** $x\in[-2,\infty[$. Mitkä **b)** reaaliluvut **c)** kokonaisluvut kuuluvat edellä saatuun joukkoon?

Ratkaisu: **a)**



Yhdistetään ehdot 1 – 3.



b) $x\in[0,3[$ **c)** $\{0,1,2\}$

Huomautus:

- $-\infty$ ja ∞ merkin yhteydessä hakasulkeet ovat väärin päin $]-\infty,\infty[$
- Merkintä (1,2) tarkoittaa koordinaatiston pistettä, jossa x = 1 ja y = 2.
- Merkintä {1,2} tarkoittaa joukkoa, jossa on kaksi alkiota, alkiot 1 ja 2.
- Merkintä [1,2] tarkoittaa suljettua väliä 1 ≤ x ≤ 2

1.7. Luvun itseisarvo

- Reaaliluvun x itseisarvo $|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$

Esim. $\underbrace{\left|\sqrt{2}-\pi\right|}_{\approx -1{,}73<0} = -\left(\sqrt{2}-\pi\right) = -\sqrt{2}+\pi = \pi-\sqrt{2}$

Itseisarvon ominaisuuksia:

1.	$\lvert a\rvert \geq 0$	itseisarvon ei-negatiivisuus
2.	$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	vastaluvun itseisarvo
3.	$\lvert ab\rvert = \lvert ba\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert = \lvert b\rvert\lvert a\rvert$	tulon itseisarvo
4.	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$, $\quad b \neq 0$	osamäärän itseisarvo
5.	$\lvert a\rvert^2 = a^2$	itseisarvon neliö

Esim. 1.3. Sievennä lauseke $|x-1|-|-2x+2|$, kun $x \leq 1$

Ratkaisu: $|x-1|-|-2x+2|$

$$\left\| \begin{matrix} x-1 \leq 0, & \text{kun } x \leq 1 \\ -2x+2 \geq 0, & \text{kun } x \leq 1 \end{matrix} \right.$$

$= -(x-1)-(-2x+2) = -x+1+2x-2 = x-1$

Toisin: $|x-1|-|-2x+2| = |x-1|-|-2(x-1)|$

$= |x-1|-|-2|\cdot|x-1| = |x-1|-2|x-1|$

$= -|x-1| = -(-(x-1)) = -(-x+1) = x-1$

1.8. Potenssi

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,kpl}$, missä a on kantaluku ja n on eksponentti.

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Laskusääntö	**Esimerkki**
$a^m a^n = a^{m+n}$	$x^2 \cdot x^5 \cdot x = x^{2+5+1} = x^8$ **ja** $3^5 \cdot 3^{-2} = 3^{5+(-2)} = 3^3$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(-2x)^3 = (-2)^3 \cdot x^3 = -8x^3$ **ja** $5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4 = 10\,000$
$\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m = a^{mn}$	$\left(2^3\right)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$	$\dfrac{4^3}{4^2} = 4^{3-2} = 4^1 = 4$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2} = \dfrac{9}{4} = 2\dfrac{1}{4}$ **ja** $\dfrac{8^5}{4^5} = \left(\dfrac{8}{4}\right)^5 = 2^5 = 32$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, a \neq 0$	$2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$ **ja** $\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3} = 3^{-3}$
$a^0 = 1,\ a \neq 0$	$(-3)^0 = 1$ **ja** 0^0 ei määritelty
$0^a = 0,\ a > 0$	$0^7 = 0$ **ja** 0^{-2} ei määritelty

Huomautus: $(-1)^2 = 1$, koska $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ (parillinen määrä negatiivisia lukuja)

$(-1)^3 = -1$, koska $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$ (pariton määrä negatiivisia lukuja)

$-1^2 = -1$, koska $-1^2 = -1 \cdot 1 = -1$ (kantalukuna on 1 ei -1)

$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{kun } n \text{ on parillinen, } n \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{kun } n \text{ on pariton, } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ sekä $(-1)^{2n} = 1$ ja $(-1)^{2n+1} = -1$, kun $n \in \mathbb{Z}$

Nimitykset: a^2 ”luvun a neliö” ja a^3 ”luvun a kuutio”

Esim. 1.4. Potenssisääntöjen avulla saadaan $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, koska

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{b^n}{1} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

1.9. Yleinen juuri

$\sqrt[n]{a}=b,$ jos ja jos vain $b^n=a$ ja $a,b\geq 0$, kun n on parillinen $(n=2,4,6,\ldots)$

Esim. a) $\sqrt[4]{625}=5$, koska $5^4=625$ **b)** $\sqrt[6]{-729}$ ei ole määritelty, koska $-729<0$

$\sqrt[n]{a}=b,$ jos ja jos vain $b^n=a$, kun n on pariton $(n=3,5,7,\ldots)$

Esim. $\sqrt[5]{-243}=-3$, koska $(-3)^5=-243$

Laskukaavat:

Parillinen juuri (*n* = 2, 4, 6, …)	**Pariton juuri (*n* = 3, 5, 7, …)**
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,\ (a\geq 0)$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$
$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},(a,b\geq 0)$	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ (a\geq 0,\ b>0)$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},(b\neq 0)$
$\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert$	$\sqrt[n]{a^n}=a$

Esim. 1.5. Sievennä **a)** $\sqrt{\frac{8}{5}}$ **b)** $\sqrt[4]{16a^5}$ **c)** $\sqrt[5]{-243b^{10}}$ **d)** $\sqrt[8]{-256}$

Ratkaisu: **a)** $\sqrt{\frac{8}{5}}\overset{\sqrt{5})}{=}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4\cdot 2}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5\cdot 2}}{5}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

b) $\sqrt[4]{16a^5}=\sqrt[4]{16}\ \sqrt[4]{a^5}=\sqrt[4]{2^4}\ \sqrt[4]{a^4a}=2\sqrt[4]{a^4}\ \sqrt[4]{a}=2\lvert a\rvert\sqrt[4]{a}$

c) $\sqrt[5]{-243b^{10}}=\sqrt[5]{-243}\cdot\sqrt[5]{b^{10}}=\sqrt[5]{(-3)^5}\cdot\sqrt[5]{\left(b^2\right)^5}=-3b^2$

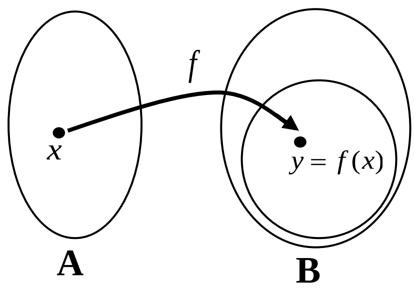
d) $\sqrt[8]{-256}$ ei määritelty, koska juurrettava <0

1.10. Murtopotenssi

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a>0,\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}_+,\ \frac{m}{n}\notin\mathbb{Z}$. Täten $4^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{16}$ ja $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$.

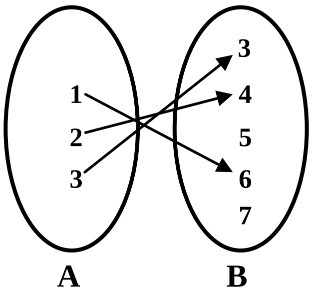
1.11. Funktio

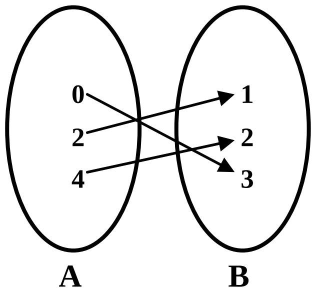
Määritelmä: Määritelmän mukaan funktio $f(x)$ joukosta A joukkoon B on kuvaus, joka liittää jokaiseen A alkioon tarkalleen yhden B:n alkion. Tämä merkitään $f: A \rightarrow B$.



Funktion määrittelyjoukko ja arvojoukko

- Funktion $f(x)$ määrittelyjoukon M_f muodostavat ne muuttujat, joilla funktion arvo on mielekästä laskea.
- Funktion $f(x)$ arvojoukko A_f muodostuu funktion saamista arvoista.



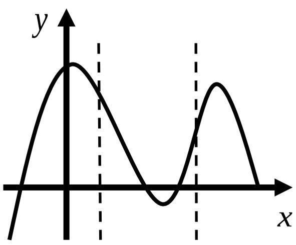


- Määrittelyjoukko $M_f = \{1, 2, 3\}$
- Arvojoukko $A_f = \{3, 4, 6\}$
- Maalijoukko $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

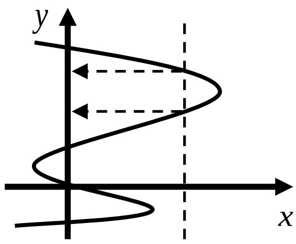
- Määrittelyjoukko $M_f = \{0, 2, 4\}$
- Arvojoukko $A_f = \{1, 2, 3\}$
- Maalijoukko $\{1, 2, 3\}$

Funktion kuvaaja, määrittely- ja arvojoukko, funktion arvo ja funktion nollakohdat.

- Funktio $y = f(x)$ voidaan kuvata $xy-$ koordinaatistossa, missä jokaista määrittelyjoukon M_f lukua x vastaa tarkalleen yksi maalijoukon luku y.
- Tämä nähdään funktion $y = f(x)$ kuvaajasta piirtämällä mielivaltainen $y-$ akselin suuntainen suora, joka saa leikata funktion kuvaajan enintään kerran.

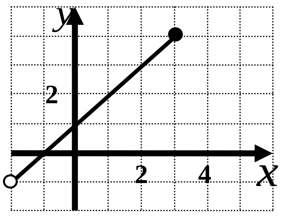


On funktio $y = f(x)$.



Ei ole funktio $y = f(x)$

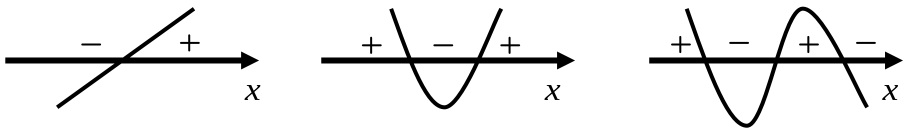
- Funktion $y = f(x)$ määrittelyjoukko on ne x:n arvot, joilla funktio on määritelty.
- Funktion $y = f(x)$ arvojoukko muodostuu funktion saamista arvoista.



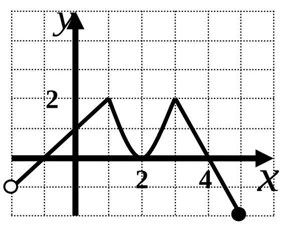
$M_f =]-2,3]$

$A_f =]-1,4]$

- Funktio saa positiivisia arvoja, kun sen kuvaaja on x - akselin yläpuolella.
- Funktio saa negatiivisia arvoja, kun sen kuvaaja on x - akselin alapuolella.



- Funktion nollakohdiksi sanotaan muuttujan niitä arvoja, joilla funktio saa arvon nolla.
- Kuvaajassa funktion nollakohdat ovat ne muuttujan arvot, joissa funktion kuvaaja leikkaa tai sivuaa vaaka-akselia (yleensä x -akseli).



Nollakohdat ovat

$x = -1,\ x = 2,\ x = 4$

1.12. Ensimmäisen asteen yhtälöt

- Ensimmäisen asteen yhtälöksi sanotaan yhtälöä, joka voidaan sieventää muotoon

$$ax+b=0, \qquad a\neq 0$$

- Yhtälöä, jossa tuntematon häviää, kutsutaan identtiseksi yhtälöksi

Jos vastauksesi saadaan $x=x$ eli $0=0$, niin yhtälö on **identtisesti tosi**. jolloin kaikki x:n arvot toteuttavat yhtälön.

Jos vastauksesi saadaan esimerkiksi $0=1$, niin yhtälö on **identtisesti epätosi**, jolloin mikään x:n arvo ei toteuta yhtälöä.

Esim. 1.6. Ratkaise yhtälö $x-2(-x+2)-3=1+3(x-2)-2$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} x-2(-x+2)-3&=1+3(x-2)-2 && \mid \text{Poistetaan sulkeet}\\ x+2x-4-3&=1+3x-6-2 && \mid \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit}\\ 3x-7&=3x-7\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Vast. $x\in\mathbb{R}$ (yhtälö on identtisesti tosi eli kaikki x:n arvot toteuttavat yhtälön)

Esim. 1.7. Ratkaise yhtälö $2-\frac{2x-1}{4}=3-\frac{1}{2}x$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} 2-\frac{2x-1}{4}&=3-\frac{1}{2}x && \mid \cdot 4 \text{ (kerrotaan nimittäjä pois)}\\ 8-(2x-1)&=12-2x && \mid \text{Poistetaan sulkeet}\\ 8-2x+1&=12-2x && \mid \text{Siirretään termit}\\ 0&=3 && \mid \text{Yhtälö on epätosi} \end{aligned}$$

Vast. Yhtälö on **identtisesti epätosi** eli mikään luku ei toteuta yhtälöä.

Huomautus: Verrantoyhtälö $\frac{x}{2}=\frac{x-1}{3}$ ratkaistaan ristiin kertomalla, jolloin saadaan $3x=2(x-1)$.

Varoitus: Älä jaa muuttujaa pois yhtälössä $x(x-1)=2x$,vaan kerro ensin sulkeet pois, jolloin saadaan $x^2-x=2x$.

1.13. Prosentti

Prosentti tarkoittaa sadasosaa eli $1\% = \frac{1}{100} = 0,01$ ja esim. $32\% = \frac{32}{100} = 0,32$.

Promille tarkoittaa tuhannesosaa eli $1‰ = \frac{1}{1000} = 0,001$ ja esim. $57‰ = \frac{57}{1000} = 0,057$.

Miljoonasosan lyhenne on ppm ja se tulee sanoista parts per million.

Esim. $750 \text{ ppm} = \frac{750}{1\,000\,000} = 0,000750$

Alla on yleisimmät kaavat ja käsitteet, joita prosenttilaskuissa esiintyy.

- p prosenttia luvusta a on $\frac{p}{100} \cdot a$

  15 prosenttia luvusta 72 on $\frac{15}{100} \cdot 72 = 0,15 \cdot 72 = 10,8$

- luku c luvusta d on $\frac{c}{d} \cdot 100\%$ (nimittäjään tulevan luvun tunnistaa päätteestä –sta, -stä)

  30 euroa 120 eurosta on $\frac{30}{120} \cdot 100\% = 25\%$

- muutosprosentti on $\frac{\text{muutos}}{\text{alkuperäinen}} \cdot 100\%$

  Hinta laski 50 eurosta 40 euroon. Hinnan muutos oli $\frac{40-50}{50} \cdot 100\% = -20\%$

- vertailuprosentti on $\frac{\text{erotus}}{\text{perusarvo}} \cdot 100\%$

  Maijalla on 40 euroa ja Matilla 30 euroa. Täten Matilla on $\frac{40-30}{40} \cdot 100\% = 25\%$ vähemmän rahaa kuin Maijalla.

- Hinta a nousee p prosenttia, jolloin lopullinen hinta on $(1+\frac{p}{100})a$

- Hinta a laskee p prosenttia, jolloin lopullinen hinta on $(1-\frac{p}{100})a$

- Hintaa a nostetaan ensin p_1%, sitten p_2% ja lopuksi lasketaan p_3%, jolloin lopullinen hinta on $(1+\frac{p_1}{100})(1+\frac{p_2}{100})(1-\frac{p_3}{100})a$

Esim. Hintaa nostettiin ensin 30 prosenttia ja myöhemmin laskettiin 10 prosenttia ja lopuksi laskettiin vielä 20 prosenttia. Laske kuinka monta prosenttia hinta muuttui.

Ratkaisu: Olkoon hinta alussa a euroa. Tällöin lopullinen hinta oli $1,3\cdot 0,9\cdot 0,8\cdot a=0,936a$.

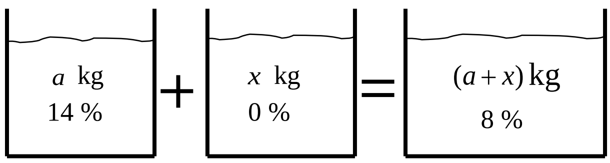
Hinnan muutos oli $\frac{0,936a-a}{a}\cdot 100\% = -6,4\%$.

Vast. Hinta laski 6,4 prosenttia.

Huomautus: Loppu voitaisiin laskea myös seuraavasti:
Hinta tuli 0,936-kertaiseksi eli hinta laski 6,4%.

Esim. Paljonko vettä on lisättävä 14 prosenttiseen suolaliuokseen, jotta suolapitoisuus olisi 8 %?

Ratkaisu: Olkoon suolaliuosta aluksi a kg, jolloin suolaa on $0,1a$ kg. Suolan määrä ei lisäänny vettä lisättäessä. Lisätään vettä x litraa eli x kg, jolloin liuoksen suolapitoisuus saadaan laskettua lausekkeella



Suolan määrä: $0,14a+0\cdot x=0,08(a+x)$, josta $x=0,75a$.

Vast. Vettä on lisättävä 0,75-kertaisesti alkuperäinen suolaliuoksen määrä.

Tehtävissä 1.1 – 1.8 ei saa käyttää laskinta

1.1. Laske

a) $2\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{6}:\frac{1}{2}$

c) $(-4)^0+2^{-1}-(-1)^3$ **d)** $\sqrt{0,01}$

e) $16^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot 4^5$ **f)** $\sqrt{\frac{0,125}{2,25}}$

1.2. Sievennä / laske

a) $a^3\cdot a^{-2}\cdot a$ **b)** $a(a^2-1)-a^4:a^2\cdot a$

c) $(5x^3y^{-1})^2$ **d)** $(5-4\cdot 2+12:4\cdot 2)^4$

e) $(2^3-3^2)^{101}$ **f)** $\left(\frac{2,5^{800}\cdot 4^{800}\cdot 10^{400}}{2^{1201}\cdot 5^{1203}}\right)^{-2}$

1.3. Sievennä

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2})^2$ **b)** $(2\sqrt{5})^3$

c) $2\sqrt{50}-3\sqrt{32}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

e) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ **f)** $\sqrt{\frac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{64}}}$

1.4. Sievennä

a) $|\pi-3|$ **b)** $\left|\sqrt{8}-10\right|+\sqrt{50}$

c) $\left|\frac{-10a^2}{5ab}\right|-\left|\frac{a}{-2b}\right|, b\neq 0$ **d)** $\sqrt[6]{a^{18}}$

e) $\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^9}}$ **f)** $(x^{-2,5})^{-2}$

1.5. a) Laske 10 prosenttia 15,5 eurosta.

b) Laske montako prosenttia 12,5 on 50:stä.

c) Tuotteen hintaa ensin laskettiin 30 prosenttia ja myöhemmin nostettiin 10 prosenttia. Mikä oli tuotteen lopullinen hinta, kun se aluksi maksoi 50 euroa?

1.6. a) Tutki, onko $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

b) Kirjoita luvut $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{27}$ ja $\sqrt[5]{9}$ pienimmästä suurimpaan.

c) Laske luvun 4 ja sen vastaluvun käänteisluvun erotuksen itseisarvo.

1.7. Ratkaise

a) $3-(x-2)+2x=-(2x+1)+x-(-2x-6)$

b) $\frac{x+1}{2}-\frac{2x-3}{4}=2$

c) Maatilalla on kanoja ja possuja yhteensä 250 ja jalkoja eläimillä on yhteensä 800. Kuinka monta possua maatilalla on?

1.8. Vastaa seuraaviin kysymyksiin alla olevan funktion $y=f(x)$ kuvaajan perusteella.

a) Mikä on funktion arvojoukko?

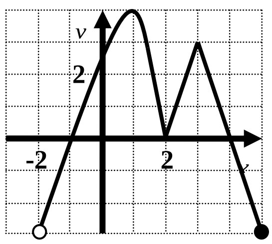
b) Mikä on funktion määrittelyjoukko?

c) Mikä on funktion arvo kohdassa $x=-1$?

d) Mitkä ovat funktion nollakohdat?

e) Milloin funktio saa arvon 3?

f) Mikä on funktion arvo kohdassa $x=-2$?



Tehtävissä 1.9 – 1.15 laskin ja taulukkokirja ovat sallittuja. (Katso kaikki ratkaisut)

1.9. Säiliöstä käytetään 11 litraa öljyä vuorokaudessa. Maaliskuun 26. päivänä 1997 säiliössä on 3000 litraa öljyä. Riittääkö öljy koko loppuvuodeksi? (k97/2)
(tiedosto, video)

1.10. a) Hintaa laskettiin ensin 30%, sitten 20% ja myöhemmin nostetaan 50%. Kuinka monta prosenttia hinta muuttui? (2p)
(tiedosto, video)

b) Kuinka paljon 5-prosenttista suolaliuosta pitää lisätä 20-prosenttiseen suolaliuokseen, jotta lopullinen liuos olisi 12-prosenttista? (4p)
(tiedosto, video)

1.11. Pallo pudotetaan pilvenpiirtäjän 40. kerroksesta. Kuinka kauan putoaminen kestää, kun yksi kerros on 3,5 metriä ja pallo putoaa ensimmäisen kahden ja puolen sekunnin aikana 24,5 metriä? Pallon putoama matka on suoraan verrannollinen putoamisajan neliöön.
(tiedosto, video)

1.12. Kuukausipalkasta veroihin menee neljäsosa, lainanlyhennyksiin kolmasosa, ruokaan viidesosa ja muihin juokseviin kuluihin jää vielä 455 euroa kuukaudessa. Kuinka suuri kuukausipalkka on?
(tiedosto, video)

1.13. Matkaa kuljetaan tasaisella nopeudella. Kun matkaa on jäljellä 40%, nopeutta lisätään 20%. Kuinka monta prosenttia koko matkaan kuluva aika tällöin lyhenee? (S00 / 3)
(tiedosto, video)

1.14. Luvun $\sqrt{r^2 - a^2}$ likiarvona voidaan käyttää lukua $r - \frac{1}{2}a^2 / r$. Laske tämän nojalla luvun $\sqrt{3}$ likiarvo sopivia kokonaislukuja r ja a käyttäen. Kuinka monta prosenttia tämä likiarvo poikkeaa tarkasta arvosta? (k91/5a)
(tiedosto, video)

1.15. Hiili -11 isotoopin puoliintumisaika on 20,38 minuuttia. Kuinka paljon hiiltä on
a) 10 minuutin **b)** puolentoista tunnin päästä, jos aluksi hiiltä on 12,5 grammaa?
(tiedosto, video)

M2 Polynomifunktiot

Pitkän matematiikan kurssin M2 Polynomifunktiot keskeisiä sisältöjä ovat murtolukujen peruslaskutoimitukset, potenssi, ensimmäisen asteen yhtälö, neliöjuuri, yleinen juuri, murtopotenssi, prosenttilasku, funktio sekä suoraan ja kääntäen verrannollisuus.

2.1. Polynomi

Polynomissa $P(x)=2x^5-3x^2+4x-7$

- termejä on neljä ($2x^5$, $-3x^2$, $4x$ ja -7)
- asteluku on viisi (korkeimman termin asteluku)
- ensimmäisen asteen termin kerroin on 4
- vakiotermi on -7.

Kun polynomissa termejä on

- yksi, niin sitä voidaan kutsua monomiksi ($-3x^4$ on neljännen asteen monomi)
- kaksi, niin sitä voidaan kutsua binomiksi (x^2-3 on kolmannen asteen binomi)
- kolme, niin sitä voidaan kutsua trinomiksi (x^2-x+1 on toisen asteen trinomi)

Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

- samanmuotoiset termit (= kirjainosa täysin sama) yhdistetään
  $3ax+b-ax=2ax+b$

Polynomien kertolasku

- kun monomilla kerrotaan polynomi, käytetään osittelulakia $a(b+c)=ab+ac$
- kun polynomi kerrotaan polynomilla, kerrotaan termi termiltä.

Binomikaavat eli muistikaavat ovat polynomien kertolaskun tärkeitä erikoistapauksia.

- binomin neliö $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- summan ja erotuksen tulo $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Esim. 2.1. Sievennä lauseke $(x-2)(3x+4)-(x-5)^2$.

Ratkaisu:
$$(x-2)(3x+4)-(x-5)^2 = x\cdot 3x + x\cdot 4 - 2\cdot 3x - 2\cdot 4 - \left(x^2 + 2\cdot x\cdot(-5) + (-5)^5\right)$$
$$= 3x^2 + 4x - 6x - 8 - \left(x^2 - 10x + 25\right)$$
$$= 3x^2 - 2x - 8 - x^2 + 10x - 25$$
$$= 2x^2 + 8x - 33$$

Vast. $(x-2)(3x+4)-(x+5)^2 = 2x^2 + 8x - 33$

Huomautus: Edellä esitetyt binomikaavat ovat erikoistapauksia Newtonin binomikaavasta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k \text{ , jossa } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esimerkiksi $3! = 3\cdot 2\cdot 1$ ja $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
On sovittu, että $0! = 1! = 1$

- Binomikertoimet saadaan myös Pascalin kolmiosta

***n* = 0**	**1**						
***n* = 1**	**1**	**1**					
***n* = 2**	**1**	**2**	**1**				
***n* = 3**	**1**	**3**	**3**	**1**			
***n* = 4**	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**		
***n* = 5**	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**	
***n* = 6**	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**

esim. $(x-2)^3 = \mathbf{1}\cdot x^3\cdot(-2)^0 + \mathbf{3}\cdot x^2\cdot(-2)^1 + \mathbf{3}\cdot x^1\cdot(-2)^2 + \mathbf{1}\cdot x^0\cdot(-2)^3$
$$= \mathbf{1}\cdot x^3\cdot 1 + \mathbf{3}\cdot x^2\cdot(-2) + \mathbf{3}\cdot x\cdot 4 + \mathbf{1}\cdot 1\cdot(-8)$$
$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Yhteisen tekijän erottaminen

- perustuu osittelulakiin $ab + ac = a(b+c)$
- voidaan käyttää, jos jokaisessa termissä on sama tekijä
- tärkeä työkalu esim. korkeamman yhtälön ratkaisussa.

Esim. 2.2. Erota yhteinen tekijä $2x^5 - 6x^3 + 4x^2$

Ratkaisu: $2x^5 - 6x^3 + 4x^2 = 2x^2(x^3 - 3x + 2)$

2.2. Polynomin jako tekijöihin

Polynomin jakamisessa tekijöihin käytetään

1. yhteisen tekijän erottamista $ab+ac=a(b+c)$

esim. $10x^3+15x=5x(2x^2+3)$

2. binomikaavoja käänteisesti $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

esim. $4x^2+12x+9=(2x+3)^2=(-2x-3)^2$

esim. $25x^2-16=(5x)^2-4^2=(5x+4)(5x-4)$

3. termien ryhmittelemistä

$$ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=(c+d)(a+b)$$

esim. $x^3-4x^2-2x+8=x^2(x-4)-2(x-4)=(x-4)(x^2-2)$

4. polynomien nollakohtia $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, jossa x_1 ja x_2 ovat polynomin ax^2+bx+c nollakohtia.

esim. $3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$, koska $3x^2-6x-24=0$, kun $x=-2$ tai $x=4$

5. taulukkokirjaa

Taulukkokirjasta sivulta 17 ”Polynomien jako tekijöihin” löytyy tekijöihin jakamiseen liittyvät kaavat. Esimerkiksi kaava $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

esim. $27x^3-8=(3x)^3-2^3=(3x-2)(9x^2+6x+4)$

2.3. Ensimmäisen asteen polynomifunktio $f(x)=kx+b$

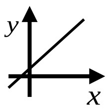
- Ensimmäisen asteen polynomifunktion $f(x)=kx+b$ kuvaaja on suora ja siksi puhutaan myös lineaarisesta funktiosta.

- Funktiossa $f(x)=kx+b$

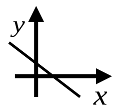
  k on suoran kulmakerroin

  jos $k>0$, niin suora on nouseva

  jos $k<0$, niin suora on laskeva



nouseva suora

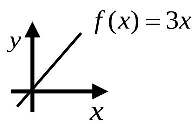


laskeva suora

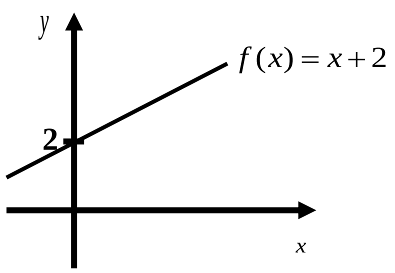
  b on vakio

  kertoo kohdan, jossa suora leikkaa y – akselin

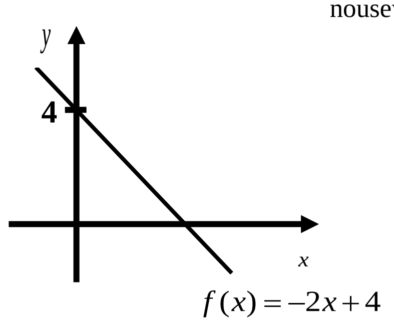
  jos $b=0$, niin suora kulkee origon kautta



origon kautta kulkeva nouseva suora



- nouseva suora $(k=1>0)$
- leikkaa $y-$akselin, kun $y=2$



- laskeva suora $(k=-2<0)$
- leikkaa $y-$akselin, kun $y=4$

Ensimmäisen asteen funktion määrittelyjoukko ja arvojoukko

- Määrittelyjoukko $M_f=\mathbb{R}$ (x:n arvot)
- Arvojoukko $A_f=\mathbb{R}$ (y:n arvot)

Ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen

Ratkaistaan pääsääntöisesti kuten ensimmäisen asteen yhtälö. Epäyhtälömerkki kääntyy kerrottaessa tai jakaessa negatiivisella luvulla.

Esim. 2.3. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{2}-\frac{x-3}{3}\geq 2$

Ratkaisu:

$$\frac{1}{2}-\frac{x-3}{3}\geq 2 \qquad \Big|\cdot 6$$
$$3-2x+6\geq 12 \qquad \text{Varo merkkivirhettä!}$$
$$-2x\geq 3 \qquad \Big|:(-2),\ \text{epäyhtälömerkin suunta kääntyy}$$
$$x\leq -\frac{3}{2}$$

Vast. $x\leq -\frac{3}{2}$

Ensimmäisen asteen kaksoisepäyhtälön ratkaiseminen

Kaksoisepäyhtälö jaetaan kahdeksi epäyhtälöksi, jotka molemmat ratkaistaan ja lopuksi tutkitaan millä x:n arvoilla molemmat epäyhtälöt toteutuvat.

Esim. 2.4 Ratkaise epäyhtälö $-2\leq 2x-10<11-x$

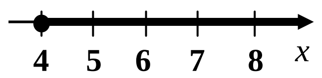
Ratkaisu:

$$-2\leq 2x-10<11-x \qquad \text{Ratkaistaan erikseen epäyhtälöt.}$$

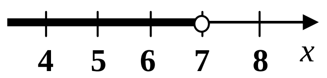
$$\begin{array}{lll} -2\leq 2x-10 & \text{ja} & 2x-10<11-x \\ 8\leq 2x \quad \Big|:2 & & 3x<21 \quad \Big|:3 \\ 4\leq x & & x<7 \\ x\geq 4 & \text{ja} & x<7 \end{array}$$

Käytetään apuna lukusuoraa tutkiessa, mitkä x:n arvot toteuttavat kaksoisepäyhtälön.

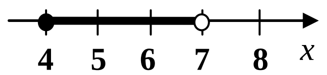
$x\geq 4$



$x<7$



$x\geq 4$ ja $x<7$



Vast. $4\leq x<7$

2.4. Toisen asteen polynomifunktio f(x) = ax² + bx + c, a ≠ 0

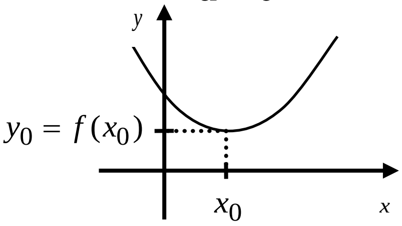
- Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja on ylös – tai alaspäin aukeava paraabeli.

- Funktiossa $f(x) = ax^2 + bx + c$

  jos $a > 0$, niin paraabeli aukeaa ylöspäin

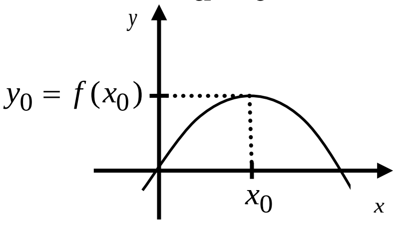
  jos $a < 0$, niin paraabeli aukeaa alaspäin

a > 0



ylöspäin aukeava paraabeli

a < 0



alaspäin aukeava paraabeli

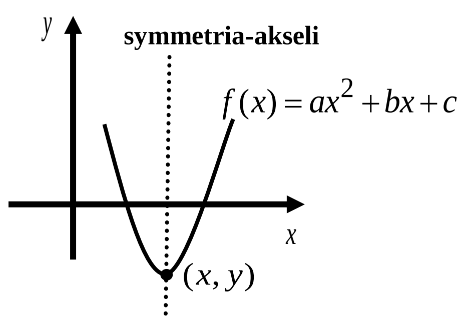
Toisen asteen funktion määrittelyjoukko ja arvojoukko.

- Määrittelyjoukko $M_f = \mathbb{R}$
- Arvojoukko $A_f = [y_0, \infty[$, jos a > 0 (y_0 on paraabelin huippu)

  $A_f =]-\infty, y_0]$, jos a < 0 (y_0 on paraabelin huippu)

Toisen asteen funktion kuvaajasta on hyvä muistaa seuraavaa.

- Kuvaaja on symmetrinen huipun kautta kulkevan $y-$akselin suuntaisen suoran suhteen.
- Huipun $x-$ koordinaatti saadaan laskettua kaavalla $x = \frac{-b}{2a}$.
- Huipun $y-$ koordinaatti saadaan laskettua sijoittamalla huipun $x-$koordinaatti funktion lausekkeeseen x:n paikalle.



$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

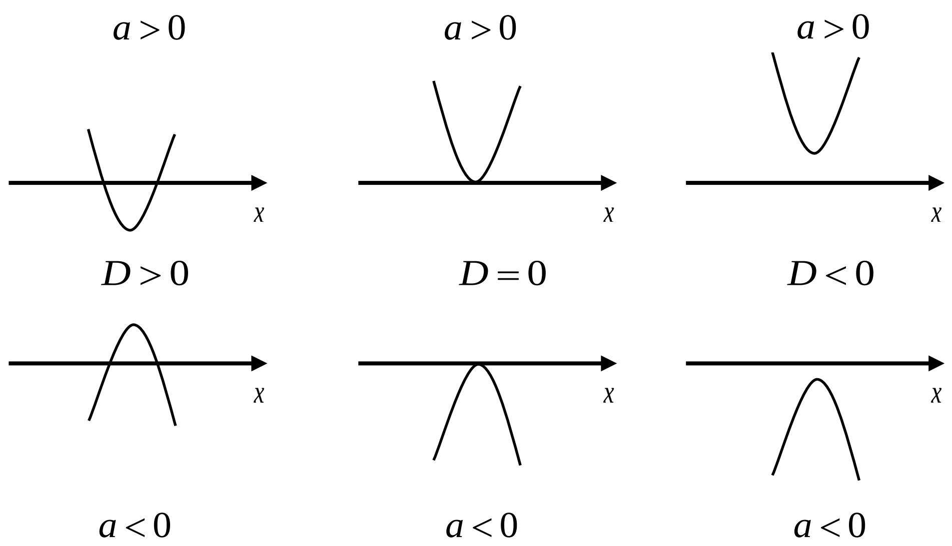
Toisen asteen funktion nollakohdat

- Toisen asteen funktiolla on enintään kaksi nollakohtaa eli kohtaa, jossa funktion kuvaaja leikkaa $x-$akselin
- Diskriminantin $D=b^2-4ac$ mukaan määräytyy toisen asteen funktion nollakohtien lukumäärä:

  Jos $D>0$, niin yhtälöllä on kaksi nollakohtaa (leikkaa $x-$akselin kahdesti).

  Jos $D=0$, niin yhtälöllä on yksi nollakohta (sivuaa $x-$akselia).

  Jos $D<0$, niin yhtälöllä ei ole yhtään nollakohtaa (kuvaaja on $x-$akselin ylä- tai alapuolella).



Esim. 2.5. Kuinka monta reaalista ratkaisua on yhtälöllä $x^2-2x+3=0$?

Ratkaisu: Lasketaan diskriminantti

$$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot3=4-12=-8$$

Koska diskriminantti on negatiivinen, niin yhtälöllä ei ole yhtään reaalista ratkaisua eli juurta.

Vast. Ei yhtään reaalista ratkaisua.

Toisen asteen funktion nollakohtien ratkaiseminen eli **toisen asteen yhtälön** $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ **ratkaiseminen** voidaan jakaa kolmeen eri perustapaukseen.

1. $ax^2 + c = 0$	**2.** $ax^2 + bx = 0$	**3.** $ax^2 + bx + c = 0$
ensimmäisen asteen termi bx puuttuu, jolloin yhtälö saatetaan muotoon $x^2 = vakio$	vakiotermi c puuttuu, jolloin erotetaan yhteinen tekijä ja käytetään tulon nollasääntöä $rs = 0$, kun $r = 0$ tai $s = 0$	kaikki termit mukana, jolloin käytetään kaavaa $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$4x^2 - 16 = 0$ $4x^2 = 16$ $x^2 = 4$ $x = \pm 2$	$3x^2 + 9x = 0$ $3x(x+9) = 0$ $3x = 0$ tai $x + 9 = 0$ $x = 0 \quad x = -9$	$2x^2 + 4x - 6 = 0$ $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$ $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \dfrac{4 \pm 8}{4}$ $x = -1$ tai $x = 3$

Varoitus: Älä jaa yhtälöä muuttujalla.

esim. $x(x-3) = 2x$ **Ei saa jakaa muuttujalla *x*!**

$x(x-3) = 2x$	Poistetaan sulkeet.
$x^2 - 3x = 2x$	Siirretään termi $2x$ vasemmalle
$x^2 - 3x - 2x = 0$	
$x^2 - 5x = 0$	Erotetaan yhteinen tekijä *x*.
$x(x-5) = 0$	Käytetään tulon nollasääntöä.
$x = 0$ tai $x - 5 = 0$	
$x = 0$ tai $x = 5$	

Ei ole muita tulon sääntöjä kuin tulon nollasääntö.

esim. $3x(x+1) = 6$ **Ei ole tulon kuutossääntöä!**

$3x(x+1) = 6$	Poistetaan sulkeet.
$3x^2 + 3x = 6$	Siirretään termi 6 vasemmalle.
$3x^2 + 3x - 6 = 0$	Ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{6} = \frac{-3 \pm 9}{6}$$

$x = -2$ tai $x = 1$

Huomautus: Toisen asteen yhtälö voidaan ratkaista myös

- neliöksi täydentämällä

esim.

$$
\begin{aligned}
2x^2-6x-1&=0 &&|\cdot 2\\
4x^2-12x-2&=0\\
4x^2-12x&=2\\
4x^2-12x+9&=2+9\\
(2x)^2+2\cdot 2x\cdot(-3)+(-3)^2&=11\\
(2x-3)^2&=11 &&|\sqrt{}\\
2x-3&=\pm\sqrt{11}\\
2x&=3\pm\sqrt{11} &&|:2\\
x&=\frac{3\pm\sqrt{11}}{2}
\end{aligned}
$$

- käyttämällä binomikaavaa käänteisesti

esim.

$$
\begin{aligned}
x^2-14&=2\\
x^2-16&=0\\
x^2-4^2&=0\\
(x+4)(x-4)&=0\\
x+4=0 \text{ tai } x-4&=0\\
x=-4 \text{ tai } \quad x&=4
\end{aligned}
$$

- kirjoittamalla ensimmäisen asteen termi summalausekkeeksi

esim.

$$
\begin{aligned}
x^2-3x+2&=0\\
x^2-2x-x+2&=0\\
x(x-2)-(x-2)&=0\\
(x-2)(x-1)&=0\\
x-2=0 \text{ tai } x-1&=0\\
x=2 \text{ tai } \quad x&=1
\end{aligned}
$$

Muista toisen asteen yhtälön tarkistus. $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ja $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Esimerkiksi edellisen yhtälön tarkistus: $2+1=-\frac{-3}{1}$ ja $2\cdot 1=\frac{2}{1}$

$3=3$ ja $2=2$ Tosi eli ratkaistiin oikein.

Toisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen

1. Siirrä termit samalle puolelle ja yhdistä samanmuotoiset termit.
2. Ratkaise lausekkeen nollakohdat.
3. Hahmottele kuvaaja ja anna vastaus.

Esim. 2.6. Ratkaise epäyhtälöt **a)** $2x^2 - x \le x^2 + 3x$ **b)** $3x^2 - 2x + 2 \ge 2x^2 - x$

Ratkaisu: **a)** $2x^2 - x \le x^2 + 3x$ Siirretään termit samalle puolelle

$2x^2 - x - x^2 - 3x \le 0$ Yhdistetään samanmuotoiset termit.

$x^2 - 4x \le 0$ Ratkaistaan yhtälö $x^2 - 4x = 0$ (lausekkeen nollakohdat).

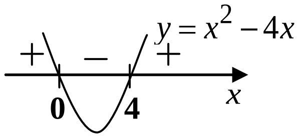
$x^2 - 4x = 0$ Erotetetaan yhteinen tekijä.

$x(x-4) = 0$ Käytetään tulon nollasääntöä.

$x = 0$ tai $x - 4 = 0$

$x = 0$ tai $x = 4$

Hahmotellaan lausekkeen $x^2 - 4x$ kuvaaja.
Kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli,
jolla on kaksi nollakohtaa.



Vast. $0 \le x \le 4$

b) $3x^2 - 2x + 2 \ge 2x^2 - x$ Siirretään termit ja yhdistetään samanmuotoiset termit.

$x^2 - x + 2 \ge 0$ Ratkaistaan yhtälö $x^2 - x + 2 = 0$.

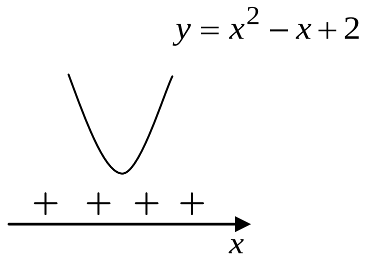
$x^2 - x + 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

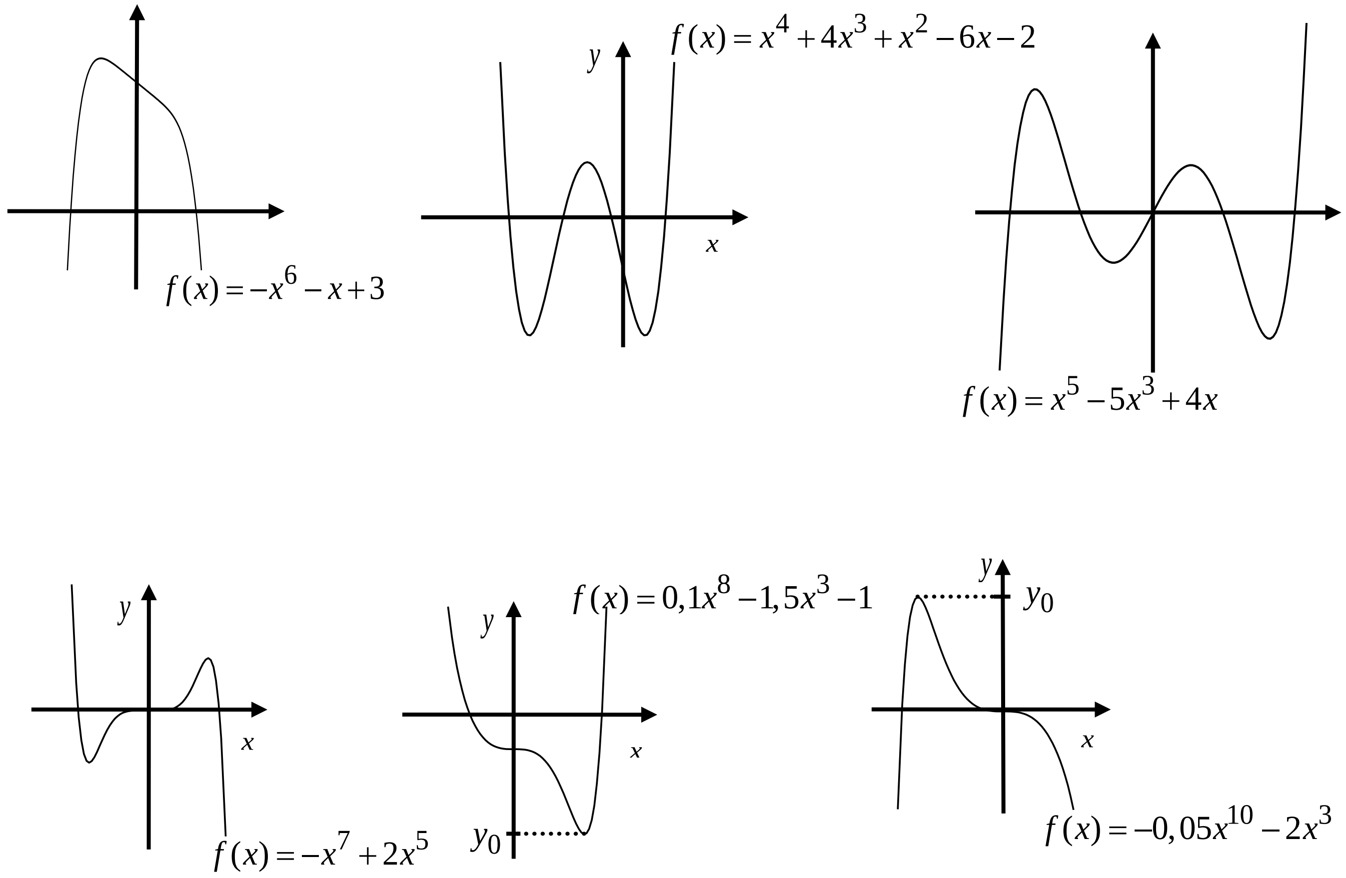
Yhtälöllä $x^2 - x + 2 = 0$ ei reaalisia ratkaisuja.

Hahmotellaan lausekkeen $x^2 - x + 2$ kuvaaja.
Kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli,
jolla ei ole yhtään nollakohtaa ja siksi lauseke
$x^2 - x + 2$ saa aina positiivisia arvoja.



Vast. Epäyhtälön $3x^2 - 2x + 2 \ge 2x^2 - x$ toteuttaa kaikki x:n arvot. $0 \le x \le 4$

2.5. Korkeamman asteen polynomifunktio



- Määrittelyjoukko $M_f=\mathbb{R}$
- Arvojoukko $A_f=\mathbb{R}$, kun $n=3,5,7,\ldots$
- Arvojoukko $A_f=[y_0,\infty[$, kun n parillinen ja $a_n>0$
- Arvojoukko $A_f=]-\infty,y_0]$, kun n parillinen ja $a_n<0$

2.6. Korkeamman asteen yhtälö ja epäyhtälö

Korkeamman asteen yhtälön ratkaiseminen

- siirrä termit samalle puolelle ja yhdistä samanmuotoiset termit
- käytä apuna jotain alla luetelluista keinoista

1. tulon nollasääntö

esim.

$$(x^2-4)(x-5)=0$$
$$x^2-4=0 \quad \text{tai} \quad x-5=0$$
$$x=\pm 2 \qquad\qquad x=5$$

2. yhteisen tekijän erottaminen ja tulon nollasääntö

esim.

$$4x^5-7x^4=x^4$$
$$4x^5-8x^4=0$$
$$4x^4(x-2)=0$$
$$4x^4=0 \quad \text{tai} \quad x-2=0$$
$$x=0 \qquad\qquad x=2$$

3. ryhmitteleminen ja tulon nollasääntö

esim.

$$x^3+2x^2=3x+6$$
$$x^3+2x^2-3x-6=0$$
$$x^2(x+2)-3(x+2)=0$$
$$(x+2)(x^2-3)=0$$
$$x+2=0 \quad \text{tai} \quad x^2-3=0$$
$$x=-2 \qquad\qquad x=\pm\sqrt{3}$$

4. bikvadraattinen yhtälö

esim.

$$x^4-4x^2=x^2-4$$
$$x^4-5x^2+4=0 \qquad \text{Merkitään } x^2=u$$
$$u^2-5u+4=0$$
$$u=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}$$
$$u=1 \quad \text{tai} \quad u=4 \qquad \text{Merkitään } u=x^2$$
$$x^2=1 \qquad\qquad x^2=4$$
$$x=\pm 1 \qquad\qquad x=\pm 2$$

Korkeamman asteen epäyhtälö ratkaiseminen

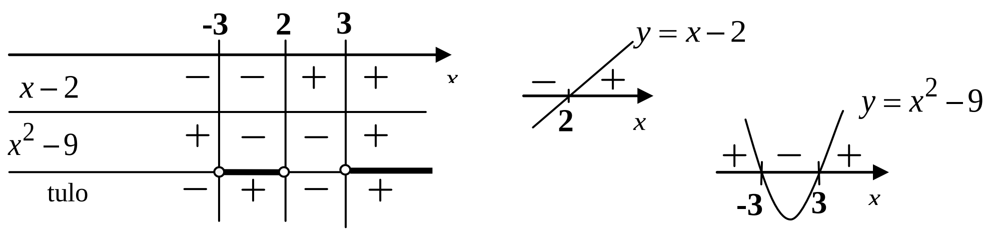
1. Siirrä termit samalle puolelle ja yhdistä samanmuotoiset termit.
2. Jaa lauseke ensimmäisen ja toisen asteen tekijöihin ja ratkaise niiden nollakohdat.
3. Tee merkkikaavio ja kirjoita vastaus.

Esim. 2.7. Ratkaise epäyhtälö $x^3 - 9x > 2x^2 - 18$ kokeilu $x + 1 = 0$

Ratkaisu: $x^3 - 9x > 2x^2 - 18$ kokeilu $x + 1 = 0$

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 > 0$$
$$x^2(x-2) - 9(x-2) > 0$$
$$(x-2)(x^2-9) > 0$$
$$x - 2 = 0 \qquad x^2 - 9 = 0$$
$$x = 2 \qquad x = \pm 3$$

Tehdään merkkikaavio



Vast. Epäyhtälö toteutuu, kun $-3 < x < 2$ tai $x > 3$

Tehtävissä 2.1 – 2.8 ei saa käyttää laskinta

2.1. Sievennä

a) $(4x+1)(4x-1)$

b) $(2x+1)(x-3)$

c) $-3x^4(x^3-2x)$

d) $(x-2)^2$

e) $\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})$

f) $\sqrt{8}(3\sqrt{2}-\sqrt{12})$

2.2. Jaa tekijöihin

a) x^3-4x

b) $4x^2-12x+9$

c) x^3-x^2-6x

d) x^3+x^2-4x-4

d) $\dfrac{6x^2}{y}-\dfrac{8xz}{y^2}$

e) $x^5+10x^4+25x^3$

2.3. Sievennä

a) $\dfrac{4x(x-1)}{2(x-1)}$

b) $\dfrac{x^2-12x+36}{x-6}$

c) $\dfrac{x^2-9}{x+3}$

d) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}$

e) $(x^{n-1})^{n-1}\cdot(x^{2-n})^n$

f) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-1$

2.4. Ratkaise yhtälöt

a) $2x(x-3)=x(x+1)$

b) $(x^2-1)^2=x^2-1$

c) $x^3=x^2+2x$

d) $x^4-5x^2=5x^2-9$

2.5. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x^2+4>4x$

b) $x(x^2-x)>2x$

c) $x(2x-3)^2-13x<3x^3-11x^2-4$

2.6. Olkoon $f(x)=x^3+3x^2+x+1$ ja $g(x)=x^3+x^2-2x+3$.

a) Laske $f(-2)$

b) Laske $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$

c) Ratkaise yhtälö $f(x)=g(x)$ (K04/1)

2.7. a) Mikä on funktion $f(x)=x^2-4x+1$ arvojoukko?

b) Ovatko yhtälön $x^2-2x-1=0$ juuret $x=1\pm\sqrt{2}$? Käytä tarkistamisessa hyväksi tietoa juurien summasta ja tulosta.

c) Millä vakion a ja b arvoilla polynomi $P(x)=ax^2+bx-20$ on jaollinen binomilla $x-5$ ja se saa arvon -12, kun $x=-1$.

2.8. a) Olkoon $a\neq 0, b\neq 0$. Sievennä $\dfrac{a+\dfrac{b^2}{a}}{b+\dfrac{a^2}{b}}$.

(S02/4a)

b) Osoita, että $x^2-y^2=1$, kun $x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}+t\right)$, $y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}-t\right), t\neq 0$. (S02/4b)

c) Sievennä $\sqrt{2\sqrt{2}+2}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

Tehtävissä 2.9 – 2.15 laskin ja taulukkokirja ovat sallittuja. (Katso kaikki ratkaisut)

2.9. Neliön muotoiselle tontille rakennetaan suorakulmion muotoinen talo, jonka pitempi sivu on puolet tontin sivusta ja lyhyempi kolmasosa tontin sivusta. Piha-aluetta jää tällöin 400 m^2. Laske tontin ala. (S95/3b)
(tiedosto, video)

2.10. Yhtälössä $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ luku a korvataan luvulla $a + 1$. Miten muuttuvat yhtälön juuret? (K96/2)
(tiedosto, video)

2.11. Millä vakion a ja b arvoilla rationaalilauseke $\dfrac{ax^3 - 12x^2 + bx}{x^2 - 3ax + 8}$ voidaan sieventää, jos osoittaja on jaollinen binomilla $x - 4$? Sievennä lauseke.
(tiedosto, video)

2.12. Kumpi luvuista $a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ja ab on suurempi, kun $a \neq 0,\ b \neq 0$. Esimerkit eivät kelpaa perusteluksi. (S92/5)
(tiedosto, video)

2.13. Millä vakion t arvoilla yhtälöllä $x^2 + 2tx - 2 - 3x = tx - 2x - 3$ on vain yksi ratkaisu? Mikä on tämä ratkaisu?
(tiedosto, video)

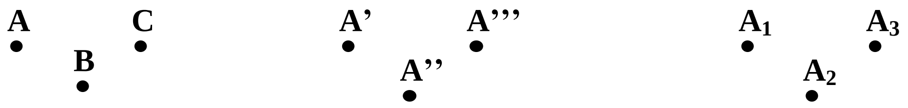
2.14. Millä vakion a arvolla yhtälöllä
$$(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x - (a^2 - a) = 0$$
on kaksi ratkaisua?
(tiedosto, video)

2.15. Kotieläimille rakennetaan suorakulmion muotoinen laidun siten, että laidun jaetaan lyhyemmän sivun suuntaisesti kahteen osaan (toinen osa lampaille ja toinen hevosille). Laske kuinka suuri laitumen pinta-ala on suurimmillaan, kun aitaa on käytettävissä 125 metriä.
(tiedosto, video)

M3 Geometria

3.1. Tasogeometrian perusteita

- Piste merkitään isolla kirjaimella. Alla on esitettynä erilaisia tapoja merkitä pistettä.

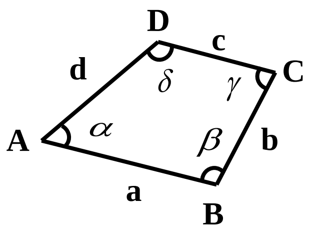


- Suora merkitään isolla kirjaimella (suoralta on annettuna kaksi pistettä) tai pienellä kirjaimella. Alla on esitettynä molemmat tavat merkitä suoraa.

suora *AB* **suora m**

Kuviossa

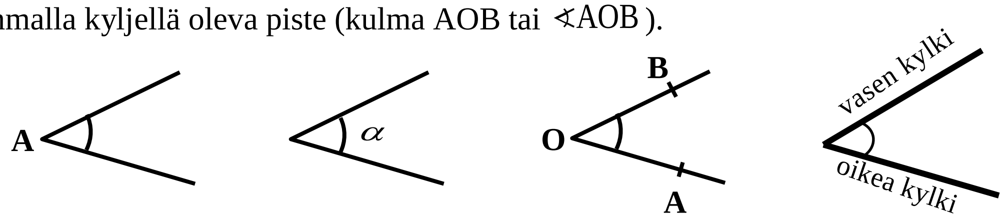
- sivujen pituuden merkitään pienillä kirjaimilla.
- kärkipisteet merkitään isoilla kirjaimilla.
- kulmat merkitään kreikkalaisilla kirjaimilla.



nelikulmio ABCD

Kulma voidaan nimetä

- kärkipisteiden avulla (kulma A tai $\sphericalangle A$)
- merkitsemällä kulman aukeama kreikkalaisella kirjaimella ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$Tk. s. 8).
- merkitsemällä ensin kulman oikealla kyljellä oleva piste, sitten kärkipiste ja lopuksi kulman vasemmalla kyljellä oleva piste (kulma AOB tai $\sphericalangle AOB$).



Asteet jaetaan pienempiin yksikköihin seuraavasti:

- 1° = 60´ (1 aste on 60 kaariminuuttia)
- 1´ = 60´´ (1 kaariminuutti on 60 kaarisekuntia)
- 1° = 60´ = 60·60´´ = 3600´´

Esim. 3.1.

a) $30^\circ = 30 \cdot 1^\circ = 30 \cdot 60' = 1800'$

b) $15^\circ = 15 \cdot 1^\circ = 15 \cdot 3600'' = 54000''$

c) $0,25' = 0,25 \cdot 1' = 0,25 \cdot 60'' = 15''$

d) $45' = \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = \left(\frac{3}{4}\right)^\circ = 0,75^\circ$

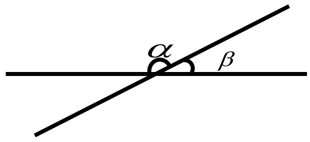
e) $180'' = \left(\frac{180}{60}\right)' = 3'$

f) $900'' = \left(\frac{900}{3600}\right)^\circ = \left(\frac{1}{4}\right)^\circ = 0,25^\circ$

3.2. Erisuuruisten kulmien nimeäminen

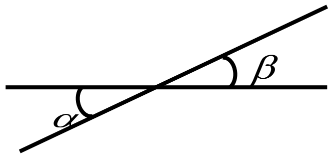
Kulman nimi	Asteluku
1. nollakulma	$\alpha = 0^{o}$
2. terävä kulma	$0^{o} < \alpha < 90^{o}$
3. suora kulma	$\alpha = 90^{o}$
4. tylppä kulma	$90^{o} < \alpha < 180^{o}$
5. kovera kulma	$0^{o} < \alpha < 180^{o}$
6. oikokulma	$\alpha = 180^{o}$
7. kupera kulma	$180^{o} < \alpha < 360^{o}$
8. täysikulma	$\alpha = 360^{o}$
9. vieruskulmat	$\alpha + \beta = 180^{o}$
10. ristikulmat	$\alpha = \beta$
11. komplementtikulma	$\alpha + \beta = 90^{o}$
12. suplementtikulma	$\alpha + \beta = 180^{o}$
13. eksplementtikulma	$\alpha + \beta = 360^{o}$

9. vieruskulmat



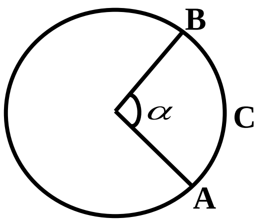
$$\alpha + \beta = 180^{o}$$

10. ristikulmat



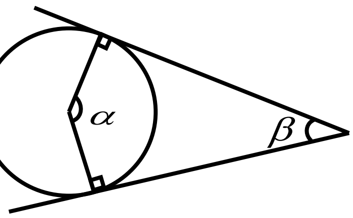
$$\alpha = \beta$$

14. keskuskulma



keskuskulma α ja sitä vastaava kaari ACB

15. tangenttikulma

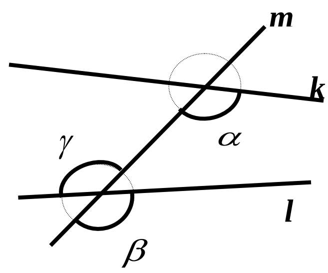


tangenttikulma β **ja sitä vastaava keskuskulma** α **.**

$$\alpha + \beta = 180^{o}$$

Huomautus: Ympyrän tangentti on suora, joka sivuaa ympyrää. Ympyrän säde, joka on piirretty ympyrän ja tangentin sivuamispisteeseen, on kohtisuorassa tangenttia vastaan. Tangenttikulmaa kutsutaan myös **ympyrän näkökulmaksi**.

3.3. Samankohtaiset kulmat

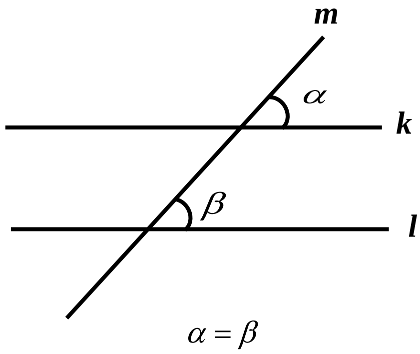


Kun suora *m* leikkaa suoria *k* ja *l*, niin syntyy kaksi ”kulmaparia”. Samankohtaiset kulmat ovat eri kulmapareissa ja leikkaava suora on samannimisenä kylkenä.

Viereisessä kuvassa kulmat α ja β sekä kulmat α ja γ ovat samankohtaisia kulmia, koska kulmat ovat eri kulmaparissa ja leikkaava suora *m* on oikeana kylkenä.

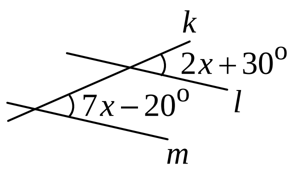
Samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria, jos suorat k ja l ovat yhdensuuntaisia.

Jos samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria, niin silloin suorat ovat yhdensuuntaiset.



k || l

Esim.3.2. Millä *x*:n arvolla suorat *l* ja *m* ovat yhdensuuntaisia.



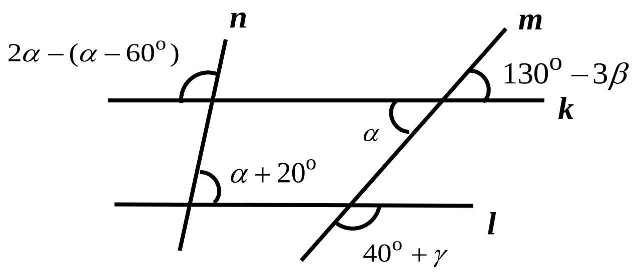
Ratkaisu: Kulmat $2x+30^{o}$ ja $7x-20^{o}$ ovat samankohtaisia kulmia. Suorat *l* ja *m* ovat yhdensuuntaisia, kun samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria.

Täten saadaan yhtälö

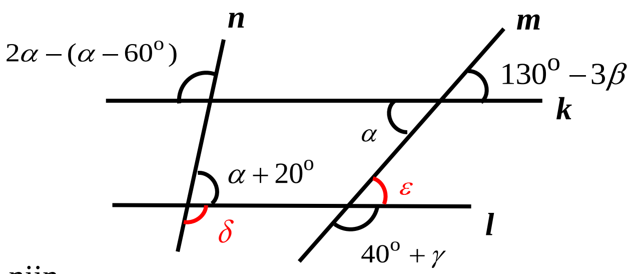
$$2x+30^{o}=7x-20^{o}$$
$$2x-7x=-20^{o}-30^{o}$$
$$-5x=-50^{o}$$
$$x=10^{o}$$

Vast. Suorat l ja m ovat yhdensuuntaisia, kun $x=10^{o}$

Esim. 3.3. Ratkaise viereisestä kuviosta kulmat α, β ja γ, kun suorat *k* ja *l* ovat yhdensuuntaiset.



Ratkaisu: Merkitään kuvaan kaksi uutta kulmaa δ ja ε.



Koska suorat *k* ja *l* ovat yhdensuuntaisia, niin samankohtaiset kulmat $2\alpha-(\alpha-60^o)$ ja δ ovat yhtä suuria eli $\delta=2\alpha-(\alpha-60^o)$.
Koska vieruskulmien summa on 180^o, niin

$$\delta+\left(\alpha+20^o\right)=180^o \qquad \left|\delta=2\alpha-(\alpha-60^o)\right.$$
$$2\alpha-(\alpha-60^o)+\left(\alpha+20^o\right)=180^o$$
$$2\alpha-\alpha+60^o+\alpha+20^o=180^o$$
$$\alpha=100^o$$

Ratkaistaan seuraavaksi β.

$$\alpha=130^o-3\beta \qquad \text{Ristikulmina yhtä suuria.}$$
$$100^o=130^o-3\beta$$
$$-30^o=-3\beta \qquad |:(-3)$$
$$\beta=10^o$$

Ratkaistaan lopuksi γ. Kulmat ε ja $130^o-3\beta$ ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuria, koska $k \parallel l$. Täten $\varepsilon=130^o-3\beta=130^o-3\cdot10^o=100^o$.

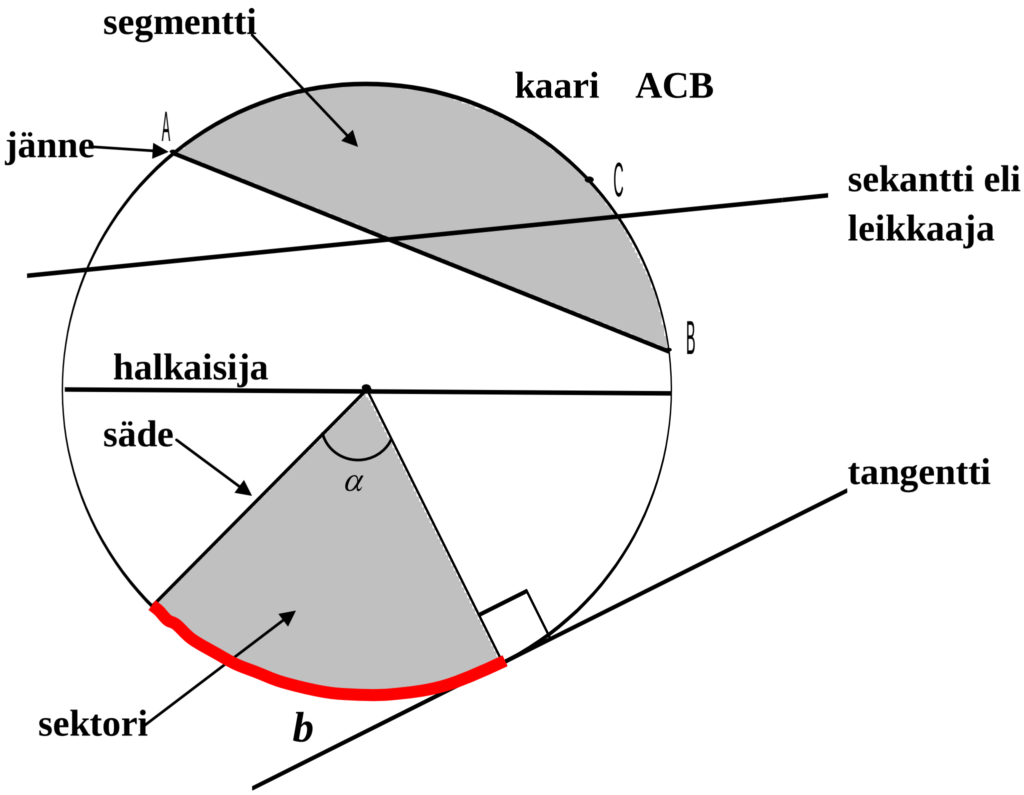
Vieruskulmien ε ja $40^o+\gamma$ summa on 180^o. Täten saadaan yhtälö

$$\varepsilon+40^o+\gamma=180^o \qquad |\varepsilon=100^o$$
$$100^o+40^o+\gamma=180^o$$
$$\gamma=40^o$$

Vast. $\alpha=100^o$, $\beta=10^o$ ja $\gamma=40^o$

3.4. Ympyrä

Ympyrään liittyvät nimitykset ja kaavat



Ympyrän piiri	$p = \pi d = 2\pi r$
Ympyrän pinta-ala	$A_{ymp} = \pi r^2$
Kaaren pituus	$\frac{b}{p} = \frac{\alpha}{360^o}$, josta $b = \frac{\alpha}{360^o} p = \frac{\alpha}{360^o} \cdot 2\pi r$
Sektorin pinta-ala	$\frac{A_s}{A_{ymp}} = \frac{\alpha}{360^o}$, josta $A_s = \frac{\alpha}{360^o} \cdot A_{ymp} = \frac{\alpha}{360^o} \cdot \pi r^2$

Esim. 3.4. Ympyrän pinta-ala on 42,5 cm^2. Laske ympyrän säde.

Ratkaisu: Ympyrän pinta-ala on 42,5 cm^2 ja voidaan laskea kaavasta. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan säde. Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

$$\pi r^2 = 42{,}5\ \text{cm}^2 \quad \big|:\pi$$

$$r^2 = 13{,}5281...\ \text{cm}^2 \quad \big|\sqrt{\ }$$

$$r = \pm 3{,}6780...\ \text{cm} \quad \big| r > 0$$

$$r \approx 3{,}7\ \text{cm}$$

Vast. Ympyrän säde on 3,7 cm.

Esim. 3.5. Risto ja hänen pikkuveljensä Pasi pyöräilivät naapuriin. Riston polkupyörän rengas pyörähti 550 kertaa matkalla. **a)** Montako metriä oli naapuriin matka, kun Riston polkupyörän renkaan halkaisija oli 60 cm? **b)** Montako kertaa Pasin polkupyörän rengas pyörähti samalla matkalla, kun Pasin pyörän renkaan halkaisija oli 40 cm?

Ratkaisu: **a)** Lasketaan Riston polkupyörän renkaan piiri kaavalla p = πd, jolloin saadaan polkupyörän kulkema matka yhden pyörähdyksen aikana.

yksi pyörähdys: $p = \pi d = \pi \cdot 60$ cm

550 pyörähdystä: $550 \cdot \pi \cdot 60$ cm = 103672,5576 cm = 1036,725576 m

b) Pasin polkupyörän kulkema matka yhden pyörähdyksen aikana

$$p = \pi d = \pi \cdot 40\ \text{cm} = 125{,}6637061\ \text{cm}$$

Rengas pyörähti matkan aikana

$$\frac{103672{,}557...}{125{,}663...} = 825{,}000... \approx 825$$

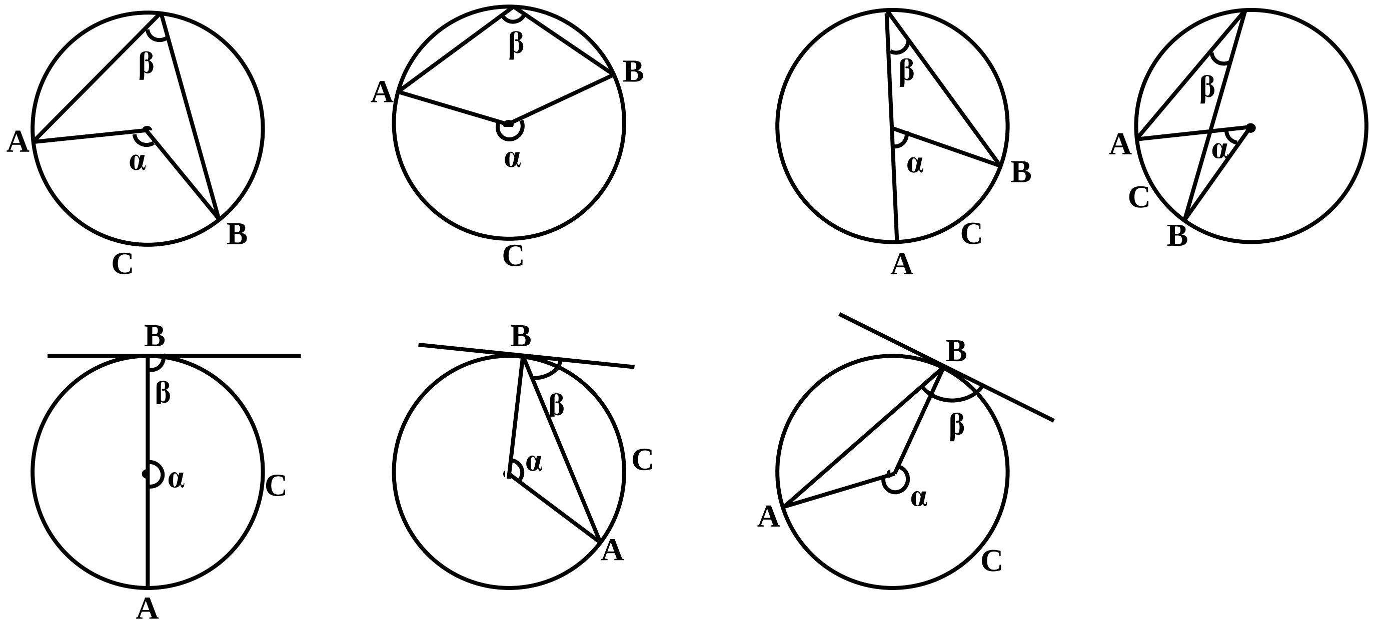
Vast. **a)** Matka naapuriin oli n. 1037 metriä.

b) Pasin polkupyörän rengas pyörähti matkalla 825 kertaa.

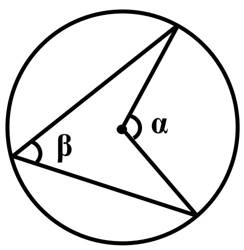
3.5. Kehäkulma

Kehäkulmaksi kutsutaan kulmaa, jonka kärkipiste on ympyrän kehällä ja kylkinä on kaksi jännettä (ylemmät 4 kuvaa) tai jänne ja tangentti (alemmat 3 kuvaa).

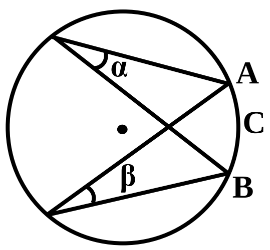
Alla olevissa kuvissa β on kehäkulma, α on kehäkulmaa vastaava keskuskulma ja ACB on kehäkulmaa β ja keskuskulmaa α vastaava kaari.



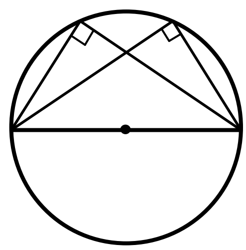
Ympyrään liittyviä lauseita



Kehäkulma β on puolet vastaavasta keskuskulmasta α eli $\beta = \frac{1}{2}\alpha$.

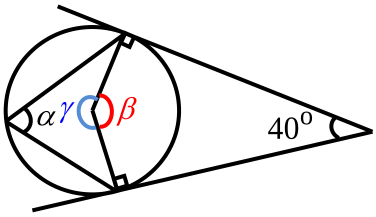


Samaa kaarta ACB vastaavat kehäkulmat α ja β ovat yhtä suuret.



Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on 90°.

Esim. 3.6. Ratkaise kulmien α, β ja γ suuruudet.



Ratkaisu:

$$40^{\circ} + \beta = 180^{\circ}$$ Tangenttikulma ja sitä vastaava keskuskulma.

$$\beta = 140^{\circ}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta$$ Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 140^{\circ} = 70^{\circ}$$

$$\beta + \gamma = 360^{\circ}$$ Koko ympyrän asteluku on 360°.

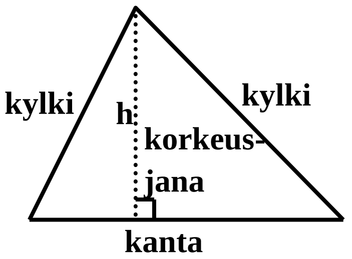
$$140^{\circ} + \gamma = 360^{\circ}$$

$$\gamma = 220^{\circ}$$

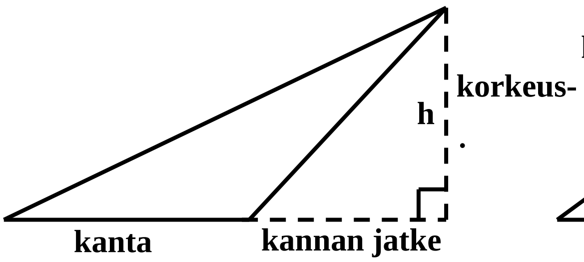
Vast. $\alpha = 70^{\circ}, \beta = 140^{\circ}$ ja $\gamma = 220^{\circ}$

3.6. Kolmiot

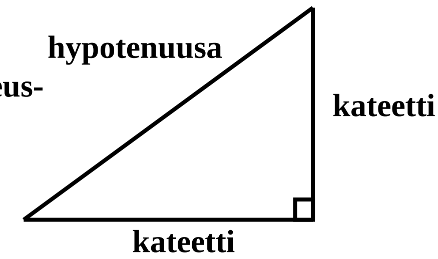
teräväkulmainen kolmio



tylppäkulmainen kolmio



suorakulmainen kolmio

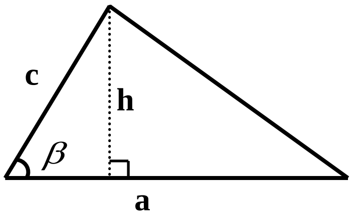


kaikki kulmat < 90°

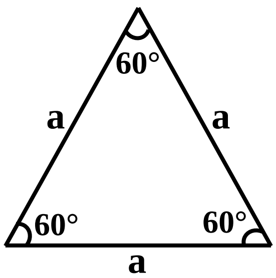
yksi kulmista > 90°

yksi kulma = 90°

Kolmion pinta-ala $A=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ac\sin\beta$

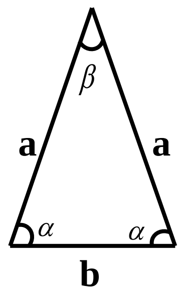


tasasivuinen kolmio



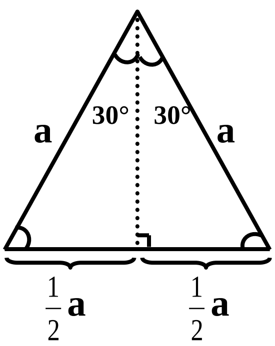
- **sivut yhtä pitkiä**
- **kulmat yhtä suuria**

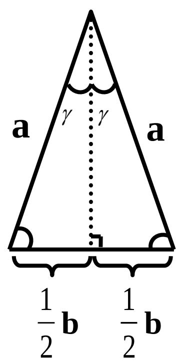
tasakylkinen kolmio



- **kyljet yhtä pitkiä**
- **kantakulmat yhtä suuria**

Huipusta piirretty korkeusjana puolittaa sekä huippukulman että kannan.





Esim. 3.7. Tasakylkisen kolmion pinta-ala on 20,7 cm^2 ja huippukulma on 30 astetta suurempi kuin kantakulma. Laske kolmion kyljen pituus yhden desimaalin tarkkuudella, kun kanta on 4,2 cm pitkä.

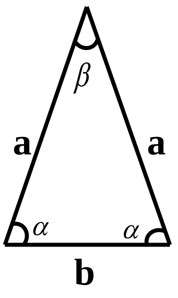
Ratkaisu: Koska tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret ja kolmiossa kulmien summa on 180^o, niin täten saadaan yhtälö

$$2\alpha+\beta=180^o \qquad \Big|\, \beta=\alpha+30^o$$

$$2\alpha+\alpha+30^o=180^o$$

$$3\alpha=150^o \qquad \Big|\, :3$$

$$\alpha=50^o$$



Koska kolmion pinta-ala A = 20,7 cm^2 ja toisaalta $A=\frac{1}{2}b\cdot a\cdot\sin\alpha$, niin täten saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2}b\cdot a\cdot\sin\alpha=20,7\text{ cm}^2 \qquad \Big|\cdot\frac{2}{b\sin\alpha}$$

$$a=\frac{2\cdot 20,7\text{ cm}^2}{b\cdot\sin\alpha} \qquad \Big|\, \alpha=50^o, b=4,2\text{ cm}$$

$$a=\frac{2\cdot 20,7\text{ cm}^2}{4,2\text{ cm}\cdot\sin 50^o}$$

$$a=12,8675...\text{ cm}$$

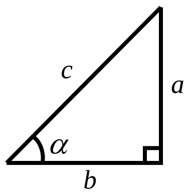
Vast. Kyljen pituus on 12,9 cm.

Suorakulmaisen kolmion trigonometria

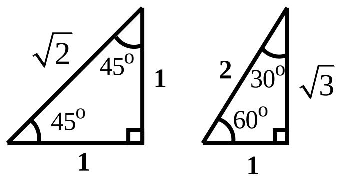
$$\sin\alpha=\frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}$$

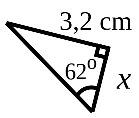
$$\tan\alpha=\frac{a}{b}$$



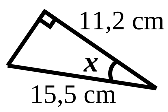
Muistikolmiot



Esim. 3.8. Ratkaise x **a)**



b)



Ratkaisu:

a) $\tan 62^o=\frac{3,2}{x}$, josta

$$x=\frac{3,2\text{ cm}}{\tan 62^o}=1,701...\text{ cm}\approx 1,7\text{ cm}$$

b) $\cos x=\frac{11,2\text{ cm}}{15,5\text{ cm}}=0,7225...$, josta

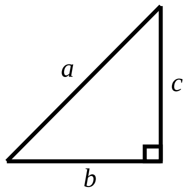
$$x=\cos^{-1}0,7225...=43,7320...^o\approx 43,7^o$$

Vast. **a)** 1,7 cm **b)** 43,7 astetta.

3.7. Pythagoraan lause, kosini-, sini- ja kulmanpuolittajalause

Pythagoraan lause

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Huomaa, Pythagoraan lause on voimassa vain suorakulmaisessa kolmiossa.

Esim. 3.9. Laske x, kun tiedämme, että suorakulmaisen kolmion sivut ovat $x+3$, $2x$ ja $x+1$.

Ratkaisu: Suorakulmaisessa kolmiossa on voimassa Pythagoraan lause, jonka mukaan kolmion pisimmän sivun (hypotenuusan) pituuden neliö on yhtä suuri kuin kahden muun sivun (kateettien) pituuden neliöiden summa.

Koska kolmiossa sivun pituudet ovat positiivisia, niin siksi $x > 0$. Muuten kolmion yhden sivun pituus ei voisi olla $2x$.

Kolmion hypotenuusa ei voi olla sivu, jonka pituus on $x+1$, sillä sen pituus on lyhyempi kuin sivun, jonka pituus on $x+3$. Täten kolmion hypotenuusana on joko sivu, jonka pituus on $x+3$ tai $2x$.

Kolmion hypotenuusan pituus on $x+3$, kun $x+3 > 2x$, josta saadaan $x < 3$. Ottamalla huomioon myös alkuehto $x > 0$, saadaan ehto $0 < x < 3$.

Kun $0 < x < 3$, niin Pythagoraan lauseen mukaan

$(x+3)^2 = (x+1)^2 + (2x)^2$, josta laskimella saadaan

$x = 2$ tai $x = -1$ (ei kelpaa, sillä $0 < x < 3$)

Kolmion hypotenuusan pituus on $2x$, kun $2x > x+3$, josta saadaan $x > 3$.

Kun $x > 3$, niin Pythagoraan lauseen mukaan

$(2x)^2 = (x+3)^2 + (x+1)^2$, josta laskimella saadaan

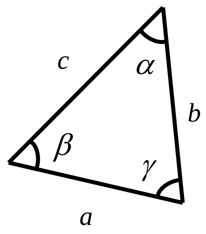
$x = 5$ tai $x = -1$ (ei kelpaa, sillä $x > 3$)

Ottamalla huomioon myös alkuehto $x > 0$, saadaan ehto $0 < x < 3$.

Vast. Kolmio on suorakulmainen, kun $x = 2$ tai $x = 5$

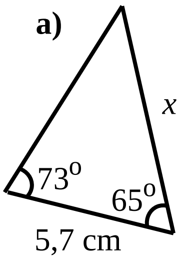
Kosinilause $a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha$

Sinilause $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

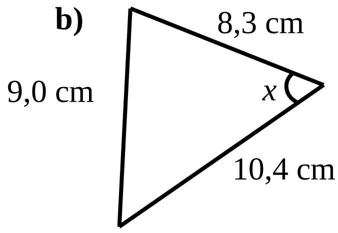


Esim. 3.10. Ratkaise kolmiosta *x*.

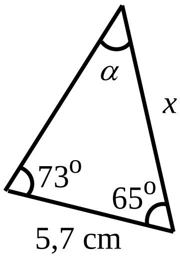
a)



b)



Ratkaisu: **a)** Ratkaistaan *x* sinilauseen avulla.



Ratkaistaan ensin kolmion tuntemattoman kulman α suuruus.

Koska kolmiossa kulmien summa on 180^{o}, niin saadaan

$$\alpha + 73^{\text{o}} + 65^{\text{o}} = 180^{\text{o}}$$

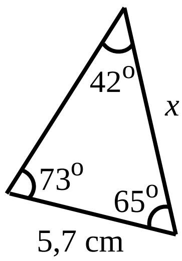
$$\alpha = 42^{\text{o}}$$

Täten sinilauseen mukaan

$$\frac{x}{\sin 73^{\text{o}}} = \frac{5{,}7\text{ cm}}{\sin 42^{\text{o}}} \quad \Big|\cdot \sin 73^{\text{o}}$$

$$x = \frac{5{,}7\text{ cm}}{\sin 42^{\text{o}}} \cdot \sin 73^{\text{o}}$$

$$x = 8{,}1462\ldots\text{ cm} \approx 8{,}2\text{ cm}$$

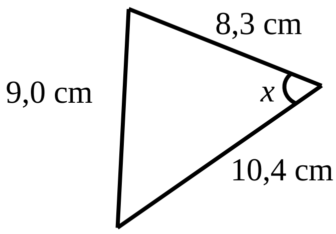


b) Kosinilauseen mukaan

$$9{,}0^2 = 8{,}3^2 + 10{,}4^2 - 2\cdot 8{,}3\cdot 10{,}4\cdot\cos x$$

$$\cos x = 0{,}5563\ldots$$

$$x = \cos^{-1} 0{,}5563\ldots = 56{,}1955\ldots^{\text{o}} \approx 56{,}2^{\text{o}}$$



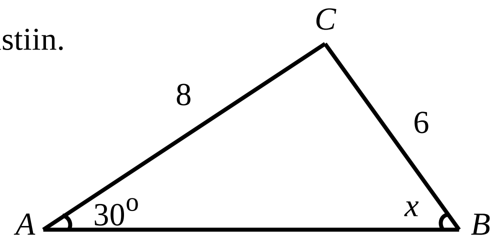
Vast. **a)** 8,2 cm **b)** 56,2 astetta.

Huomautus: Sinilausetta käytettäessä voi tulla kaksi ratkaisua.

Esim. 3.11. Kolmiossa ABC sivu $AC = 8$ ja $BC = 6$ ja $\sphericalangle BAC = 30^{\circ}$. Laske $\sphericalangle CBA$.

Ratkaisu: Sinilauseen mukaan

$$\frac{6}{\sin 30^{\circ}} = \frac{8}{\sin x} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$



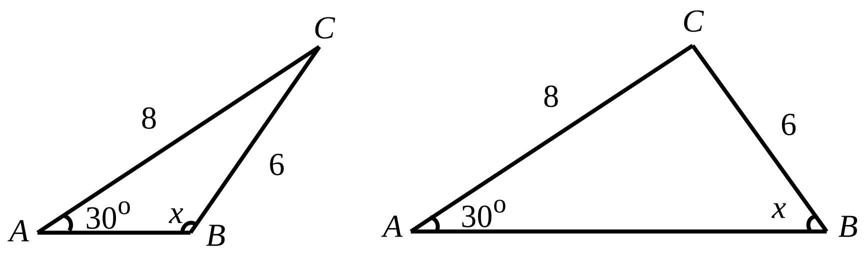
$$6\sin x = 8 \cdot \sin 30^{\circ} \qquad \Big| :6$$

$$\sin x = \frac{8 \cdot \sin 30^{\circ}}{6}$$

$$\sin x = \frac{2}{3} \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$

$$x = 138{,}1896...^{\circ} \text{ tai } x = 41{,}8103...^{\circ}$$

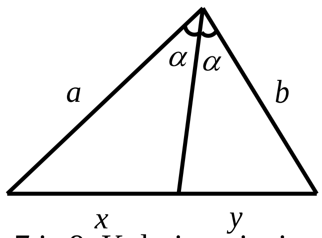
Kummatkin vastaukset voidaan hyväksyä, koska $30^{\circ} + x < 180^{\circ}$ (kolmiossa kulmien summa on 180 astetta). Alla on piirrettynä kummankin vastauksen kolmio.



Vast. $\sphericalangle CBA = 139^{\circ}$ tai $\sphericalangle CBA = 41^{\circ}$

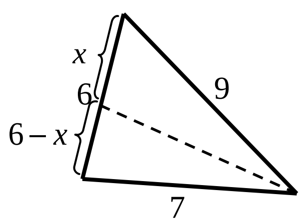
Kulmanpuolittajalause

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Esim. 3.12. Kolmiossa sivun pituudet ovat 6, 7 ja 9. Kolmion pienimmän kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun kahteen osaan. Laske osien pituudet.

Ratkaisu: Kolmiossa lyhimmän sivun vastainen kulma on pienin kulma. Kulmanpuolittajalauseen mukaan

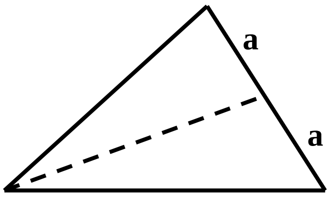


$$\frac{x}{6-x} = \frac{9}{7} \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$

$$x = \frac{27}{8} \qquad \text{Täten } 6 - x = 6 - \frac{27}{8} = \frac{21}{8}$$

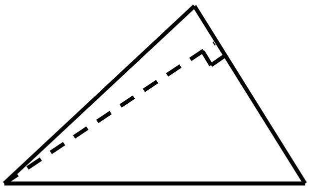
Vast. Osien pituudet ovat $\frac{27}{8}$ ja $\frac{21}{8}$.

3.8. Kolmion merkilliset pisteet (taulukkokirja s. 29)



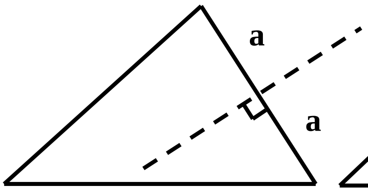
kolmion mediaani eli keskijana

Kolmion mediaanilla eli kolmion keskijanalla tarkoitetaan janaa, joka kulkee kolmion kulmasta vastakkaisen sivun keskipisteeseen.



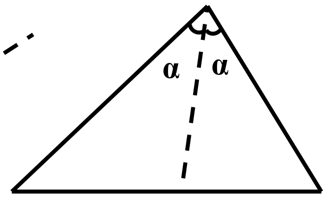
kolmion korkeusjana

Kolmion korkeusjanalla tarkoitetaan janaa, joka kulkee kolmion kulmasta vastakkaiselle sivulle niin, että muodostuu suorakulma.



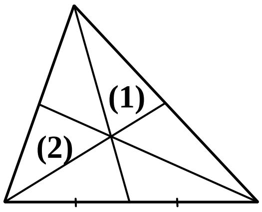
sivun keskinormaali

Kolmion sivun keskinormaalilla tarkoitetaan janaa, joka kulkee kolmion sivun keskipisteen kautta niin, että muodostuu suorakulma.

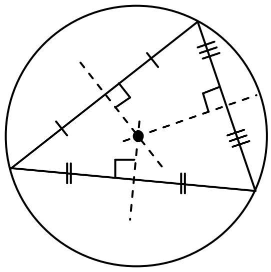


kulmanpuolittaja

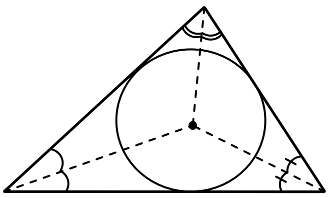
Kolmion kulmanpuolittajalla tarkoitetaan janaa, joka puolittaa kolmion kulman.



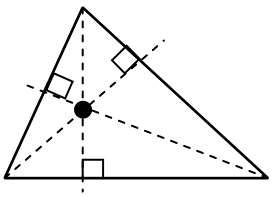
Mediaanilause:
Mediaanit leikkaavat kolmion painopisteessä, joka jakaa mediaanin suhteessa 2 : 1 kärkipisteestä lukien



Keskinormaalit leikkaavat kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteessä

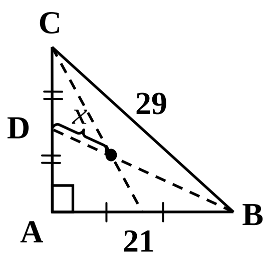


Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat pisteessä, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.



Kolmion korkeusjanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä

Esim. 3.13. Ratkaise x vieressä olevasta kolmiosta ABC. Välivaiheiden laskemisessa saa käyttää laskinta hyväksi. Anna vastaus tarkkana sekä yhden desimaalin tarkkuudella.



Ratkaisu: Mediaanilauseen mukaan kolmion painopiste eli piste, jossa mediaanit leikkaavat, jakaa jokaisen mediaanin suhteessa $2:1$. Näin ollen mediaani BD jakautuu osiin, joiden pituudet ovat x ja $2x$.

Pythagoraan lauseella saadaan kolmiosta ABD:

$$BD^2 = DA^2 + AB^2 \qquad \| \; BD = 2x + x = 3x,\ AB = 21 \text{ ja } DA = \frac{1}{2}CA$$

Ratkaistaan siis ensin Pythagoraan lauseella kolmiosta ABC kateetin CA pituus.

$$CA^2 + AB^2 = BC^2 \qquad \| \; AB = 21,\ \mathrm{BC} = 29 \text{ ja merk. } CA = y$$

$$y^2 + 21^2 = 29^2$$

$$y = 20 \text{ tai } y = -20 \text{ (ei kelpaa)}$$

Näin saadaan sivun DA pituus

$$DA = \frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10$$

Kolmiosta ABD

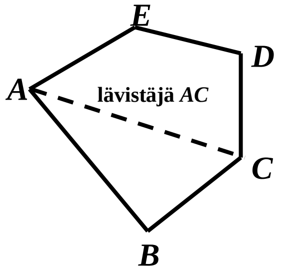
$$(3x)^2 = 10^2 + 21^2$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{541}}{3} \text{ (negatiivinen pituus ei kelpaa)}$$

$$x = \frac{\sqrt{541}}{3} = 7{,}753... \approx 7{,}8$$

Vast. $x = \frac{\sqrt{541}}{3} \approx 7{,}8$

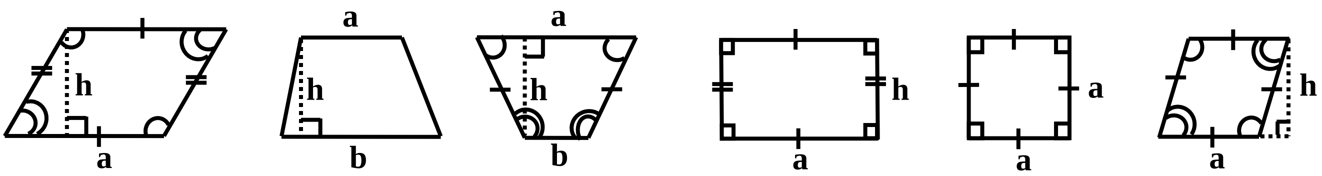
3.9. Monikulmiot



viisikulmio *ABCDE*

- Monikulmio nimetään kulmien lukumäärän mukaan.
- Kulmien summa $(n-2)\cdot 180^{\circ}$.
- Lävistäjien lukumäärä $\dfrac{n(n-3)}{2}$.
- Monikulmion ympäri piirretty ympyrä kulkee monikulmion jokaisen kärjen kautta.
- Monikulmion sisään piirretty ympyrä sivuaa jokaista monikulmion sivua.

suunnikas | **puolisuunnikas** | **tasakylkinen puolisuunnikas** | **suorakulmio** | **neliö** | **neljäkäs eli vinoneliö**

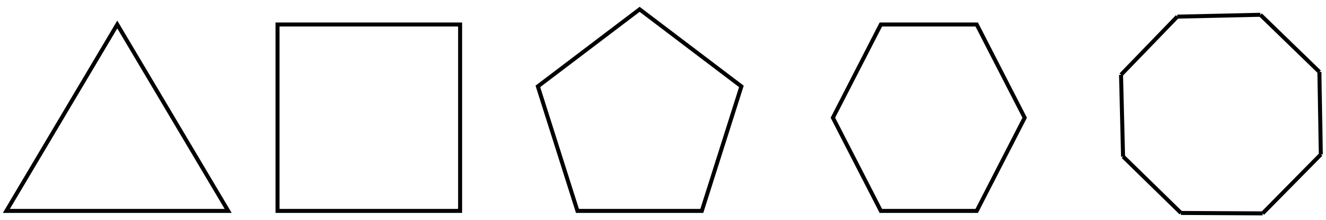


suunnikas	puolisuunnikas	tasakylkinen puolisuunnikas	suorakulmio	neliö	neljäkäs eli vinoneliö
$A=ah$	$A=\dfrac{a+b}{2}h$	$A=\dfrac{a+b}{2}h$	$A=ah$	$A=a^2$	$A=ah$

- Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.
- Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja puolittavat toisensa.

Säännöllisessä monikulmiossa

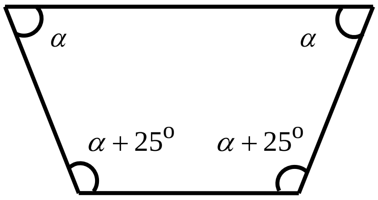
- kaikki kulmat ovat keskenään yhtä suuria
- sivut ovat keskenään yhtä pitkiä
- sivujen keskinormaalit leikkaavat monikulmion keskipisteessä, joka on sisään piirretyn ympyrän keskipiste.
- n-kulmion kulmien summa on $(n-2)\cdot 180^{\circ}$ ja yksi kulma on $\dfrac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n}$



tasasivuinen kolmio | **neliö** | **säännöllinen 5-kulmio (pentagon)** | **säännöllinen 6-kulmio (heksagon)** | **säännöllinen 8-kulmio (oktagon)**

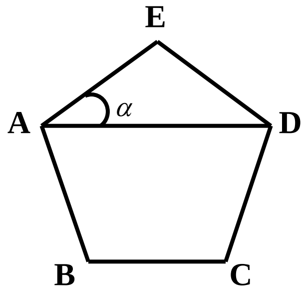
Esim. 3.14. Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat 25° suurempia kuin kannan vastakkaiset kulmat. Laske kulmien suuruudet

Ratkaisu: Tasakylkisessä puolisuunnikkaassa kantakulmat ovat keskenään yhtä suuret. Myös kannan vastakkaiset kulmat ovat keskenään yhtä suuret



Merkitään kantakulmien vastakkaisia kulmia α:lla.
Tasakylkinen puolisuunnikas on nelikulmio (kulmien summa $=(4-2)\cdot 180° = 360°$).
Näin saadaan yhtälö $(\alpha + 25°) + (\alpha + 25°) + \alpha + \alpha = 360°$

Esim. 3.15. Laske kulman α suuruus, kun monikulmio on säännöllinen viisikulmio.



Ratkaisu: Kolmio *ADE* on tasakylkinen kolmio (*AE* = *DE*), koska säännöllisessä viisikulmiossa sivut ovat yhtä pitkiä.
Tasakylkisessä kolmiossa kantakulmat ovat yhtä suuria ja siksi $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DAE = \alpha$.

$$\sphericalangle AED = \frac{(5-2)\cdot 180^o}{5} = \frac{540^o}{5} = 108^o$$

Kolmiossa kulmien summa on 180^o ja näin kolmiosta *ADE* saadaan yhtälö

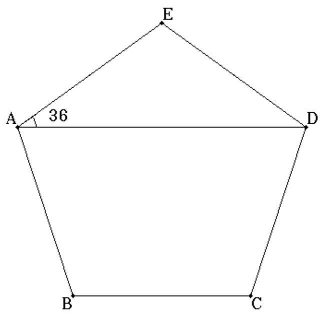
$$\sphericalangle EDA + \sphericalangle DAE + \sphericalangle AED = 180^o$$

$$\alpha + \alpha + 108^o = 180^o$$

$$2\alpha = 72^o$$

$$\alpha = 36^o$$

Vast. $\alpha = 36^o$



Katso vastaava videoitu ratkaisu ClassPad II Managerilla tästä.

3.10. Yhdenmuotoisuus

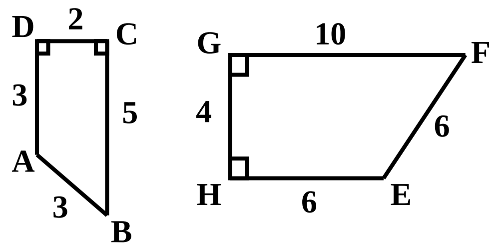
Kuviot ovat yhdenmuotoisia (merkitään symbolilla ~), kun kuvioiden kaikkien sivujen suhteet

$$\frac{\text{vastinjanan pituus}}{\text{janan pituus}}$$

ovat yhtä suuret. Tämä suhde on yhdensuuntaisuussuhde eli mittakaava.

Yhdenmuotoisissa kuvioissa toisiaan vastaavat kulmat (**vastinkulmat**) ovat yhtä suuret. Täten kuviot ovat yhdenmuotoisia, jos kuvioissa vastinkulmat ovat keskenään yhtä suuria.

Esim. nelikulmiot $ABCD \sim EFGH$,



koska

$$\frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{AB}{EF} = \frac{1}{2}$$

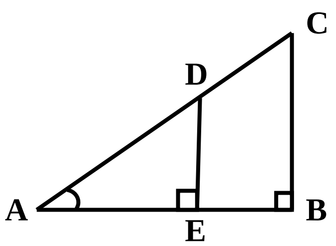
Täten myös

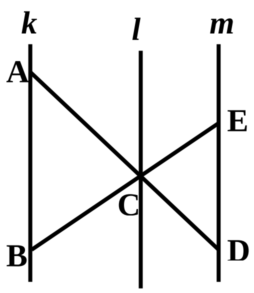
$\sphericalangle A = \sphericalangle E$, $\sphericalangle B = \sphericalangle F$, $\sphericalangle C = \sphericalangle G$ ja $\sphericalangle D = \sphericalangle H$

Kolmioiden yhdenmuotoisuus

Kolmiot ovat yhdenmuotoisia, jos kaksi kulmaparia on keskenään yhtä suuria. Tätä kutsutaan **kk-lauseeksi**.

Alla on kaksi esimerkkiä yhdenmuotoisista kolmioista.





$\boldsymbol{k \parallel l \parallel m}$

$\sphericalangle B = \sphericalangle E = 90^O$

$\sphericalangle A$ on yhteinen

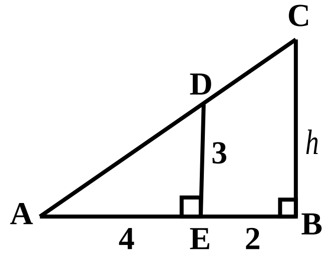
kk-lauseen mukaan

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE$ **(ristikulma)**

$\sphericalangle A = \sphericalangle D$ **(samankohtaiset kulmat ja** $k \parallel m$**)**

Esim. 3.16. Laske viereisen kolmion ABH korkeus h.



Ratkaisu: Koska $\sphericalangle B = \sphericalangle E = 90^{o}$ ja $\sphericalangle A$ on yhteinen, niin *kk*-lauseen mukaan $\triangle ABC \sim \triangle AED$. Koska yhdenmuotoisissa kuvioissa sivun ja vastinsivujen suhde pysyy samana, saadaan verrantoyhtälö $\frac{h}{3} = \frac{2+4}{4}$ eli $\frac{h}{3} = \frac{6}{4}$, josta $h = \frac{6}{4} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$

Vast. Kolmion ABC korkeus $h = 4\frac{1}{2}$

Esim. 3.17. Kartalla, jonka mittakaava on 1 : 200 000, matka Turusta Mynämäelle on 17 cm. Kuinka pitkä vastaava matka on luonnossa?

Ratkaisu: Merkitään matkaa luonnossa kirjaimella *x*, jolloin saadaan

pituus kartalla	pituus luonnossa (cm)
1	200 000
17	x

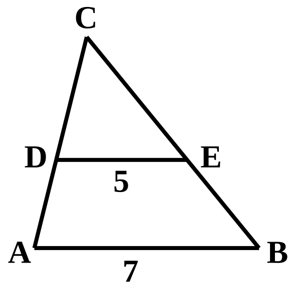
Saadaan $\frac{x}{200\,000 \text{ cm}} = \frac{17}{1}$, josta $x = \frac{17}{1} \cdot 200\,000 \text{ cm} = 3\,400\,000 \text{ cm} = 34 \text{ km}$

Vast. Matka on 34 km.

Yhdenmuotoisten kuvioiden alojen suhde

Yhdenmuotoisten kuvioiden alojen suhde on mittakaavan neliö.
Kuvioiden, jotka ovat yhdenmuotoisia suhteessa *m : n*, pinta-alojen A_1 ja A_2 suhde

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$



Esim. 3.18. Laske kolmion *ABC* ala, kun kolmion *DEC* pinta-ala on 6 ja kolmioiden kannat *AB* ja *DE* ovat yhdensuuntaisia.

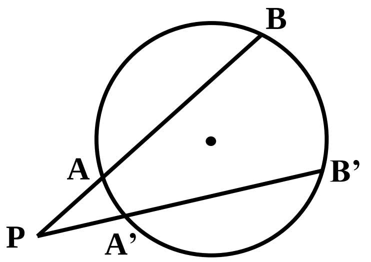
Ratkaisu: Koska $\sphericalangle C$ on yhteinen ja $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ (samankohtaisina kulmina ja $AB \parallel DE$), niin *kk*-lauseen mukaan $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Kolmioiden mittakaava on 7:5 (kannan suhde kantaan). Täten suuremman kolmion *ABC* pinta-ala A_2.

$$\frac{A_2}{6} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2} = \frac{49}{25} \text{, josta } A_2 = \frac{49}{25} \cdot 6 = 11\frac{19}{25}.$$

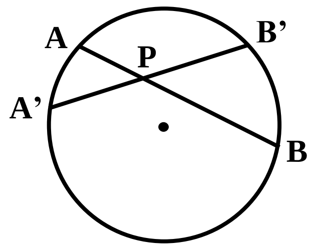
Vast. Suuremman kolmio ABC pinta-ala $A_2 = 11\frac{19}{25}$.

Pisteen potenssi ympyrän suhteen

Kun pisteen kautta piirretään ympyrälle sekantti, niin pisteen ja ympyrän kehän välisten sekantin osien tulo on riippumaton sekantin suunnasta. Täten alla olevissa kuvissa on voimassa tulo: PA · PB = PA’ · PB’.



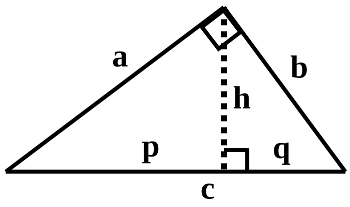
Piste P on ympyrän ulkopuolella



Piste P on ympyrän sisäpuolella

Suorakulmaisen kolmion verrantoja

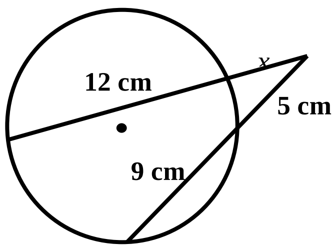
Hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa suorakulmaisen kolmion kahdeksi kolmioksi, jotka ovat yhdenmuotoisia alkuperäisen kolmion kanssa ja siksi myös keskenään yhdenmuotoisia. Täten kk-lauseen mukaan kolmiosta saadaan esimerkiksi seuraavat kolme verrantoyhtälö



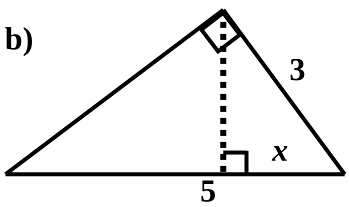
1. $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$ **2.** $\frac{c}{a} = \frac{a}{p}$ **3.** $\frac{c}{b} = \frac{b}{q}$

Esim. 3.19. Ratkaise x

a)



b)



Ratkaisu: a) $x \cdot (x+12) = 5 \cdot (5+9)$

$x^2 + 12x - 70 = 0$ Ratkaistaan laskimella.

$x = 4,2956...$ tai $x = -16,2956...$ Negatiivinen vastaus ei kelpaa, pituus > 0.

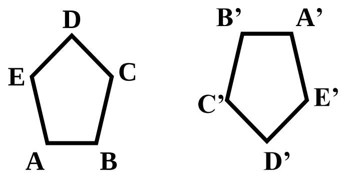
b) $\frac{5}{3} = \frac{3}{x}$, josta $5x = 9$ ja edelleen $x = \frac{9}{5}$

Vast. **a)** x = 4,3 cm **b)** $x = \frac{9}{5}$

3.11. Yhtenevyys

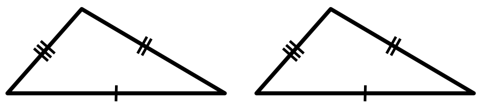
- Jos kaksi kuviota yhtyvät täysin, kun ne asetetaan päällekkäin, sanotaan kuvioita keskenään yhteneviksi.
- Yhtenevyys merkitään ≅
- Vastinosiksi (vastinkulmat, vastinpisteet, …) kutsutaan päällekkäin osuvia kuvioiden osia.

Viisikulmiot ABCDE ja A’B’C’D’E’ ovat yhtenevät (ABCDE ≅ A’B’C’D’E’). Vastinosat ovat yhtä pitkiä. Esim. AB = A’B’



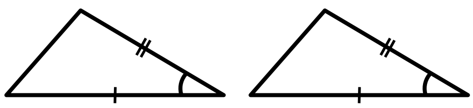
Kolmioiden yhtenevyyslauseet

Monet kuviot voidaan jakaa kolmioiksi ja siksi on syytä tarkastella kolmioiden yhtenevyyslauseita. Kaksi kolmiota voidaan osoittaa yhteneviksi seuraavien yhtenevyyslauseiden avulla.



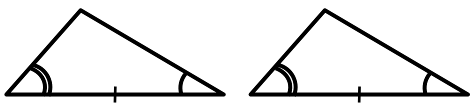
sss

Jos kahdessa eri kolmiossa vastinsivut ovat keskenään yhtä pitkiä, niin kolmiot ovat yhtenevät.



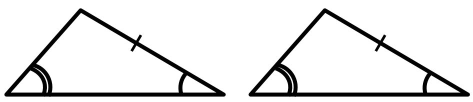
sks

Jos kahdessa eri kolmiossa kaksi vastinsivua on keskenään yhtä pitkiä ja niiden väliset kulmat yhtä suuria, niin kolmiot ovat yhtenevät.



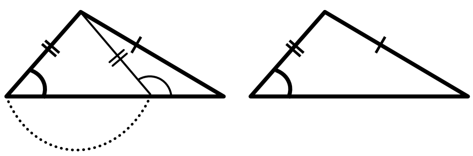
ksk

Jos kahdessa eri kolmiossa kaksi kulmaa on keskenään yhtä suuria ja niiden välinen sivu yhtä pitkä, niin kolmiot ovat yhtenevät.



kks

Jos kahdessa eri kolmiossa kaksi kulmaa on keskenään yhtä suuria ja toisen kulman vastainen sivu yhtä pitkä, niin kolmiot ovat yhtenevät.



ssk

Jos kahdessa eri kolmiossa kaksi sivua on keskenään yhtä pitkiä ja toisen sivun vastainen kulma yhtä suuri ja saman tyyppinen (terävä, tylppä,…), niin kolmiot ovat yhtenevät.

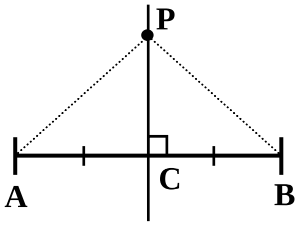
Yhtenevyyden soveltaminen geometrian tehtävissä

Kolmioiden yhtenevyyslauseita käytetään hyväksi paljon todistustehtävissä ja jonkin verran sovellustehtävissä.

Tehtävässä pitää ensin osoittaa kuviot yhteneviksi edellä esitettyjen yhtenevyyslauseiden avulla ja sen jälkeen voidaan todeta, että yhtenevissä kolmioissa vastinosat ovat keskenään yhtä suuria.

Esim. 3.20. Todista, että janan AB

keskinormaalin jokainen piste P on yhtä etäällä janan päätepisteistä A ja B.



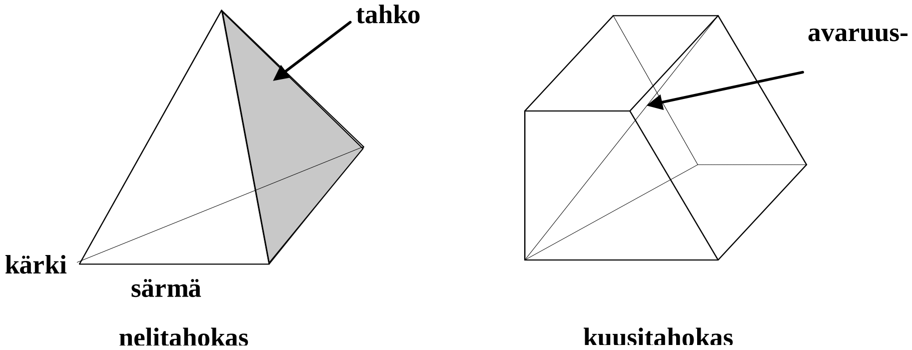
Väite: AP = BP

Todistus: AC = BC (PC on janan AB keskinormaali)
sivu PC on yhteinen
$\sphericalangle BCP = \sphericalangle PCA (= 90^{o})$
sks-lauseen mukaan kolmio BCP $\cong$ ACP

Yhtenevissä kolmiossa vastinosat ovat yhtä suuria ja näin ollen vastinosina AP = BP.
mot.

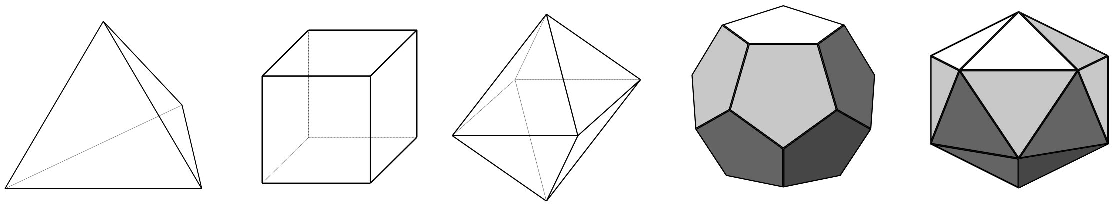
3.12. Monitahokkaat

Monitahokas on kappale, jonka pinta muodostuu monikulmioista. Näitä monikulmioita nimitetään **tahkoiksi**. Monikulmion sivut ovat **särmiä** ja niiden päätepisteet ovat monitahokkaan **kärkiä**. Monitahokkaan avaruuslävistäjä on sellainen yhdysjana, joka ei sisälly mihinkään tahkoon.



Säännöllinen monitahokas

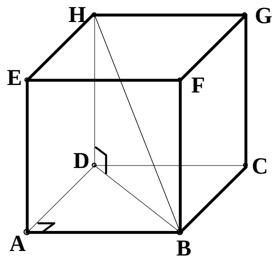
Säännöllisen monitahokkaan tahkot ovat yhteneviä, säännöllisiä monikulmioita ja sen jokaisessa kärjessä kohtaa yhtä monta tahkoa. Säännöllisiä kuperia monitahokkaita on vain viittä eri muotoa ja ne tunnetaan nimellä **Platonin kappalee**t.



tetraedri (4-tahokas) | **heksaedri (kuutio)** | **oktaedri (8-tahokas)** | **dodekaedri (12-tahokas)** | **ikosaedri (20-tahokas)**

Esim. 3.21. Kuution särmän pituus on 2. Laske kuution **a)** avaruuslävistäjän BH pituus

b) särmän AB ja avaruuslävistäjän BH välinen kulma x.



Ratkaisu: **a)** Pythagoraan lauseen mukaan

$$BH^2 = BD^2 + DH^2 \text{ ja } BD^2 = AB^2 + AD^2.$$

Täten $BH^2 = AB^2 + AD^2 + DH^2$, josta

$BH^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2$ ja edelleen $BH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

b) Lävistäjä $AH^2 = AD^2 + DH^2$, josta $AH = \sqrt{AD^2 + DH^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

Kosinilauseen mukaan $AH^2 = BH^2 + AB^2 - 2 \cdot BH \cdot AB \cdot \cos x$

$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \left(2\sqrt{3}\right) \cdot 2 \cdot \cos x$, josta $x = 54,735...^{\circ}$

Vast. **a)** Avaruuslävistäjä $BH = 2\sqrt{3}$

b) Särmän AB ja lävistäjän BH välinen kulma on 54,7 astetta.

3.13. Lieriö

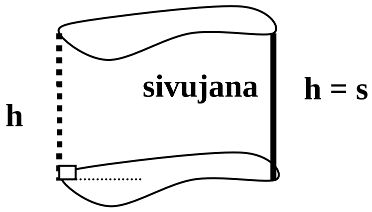
Peruskäsitteet

Lieriö muodostuu pohjasta ja vaipasta.

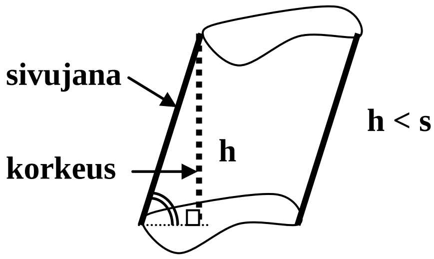
Pohjat ovat yhteneviä kuvioita.

Lieriön tilavuus $V = A_{pohja} \cdot h$

Suora lieriö



Vino lieriö

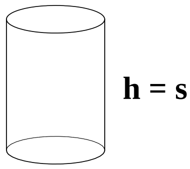


Ympyrälieriö

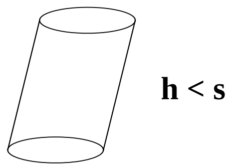
Pohjat ovat ympyröitä.

$V_{lieriö} = A_{pohja} \cdot h = \pi r^2 h$

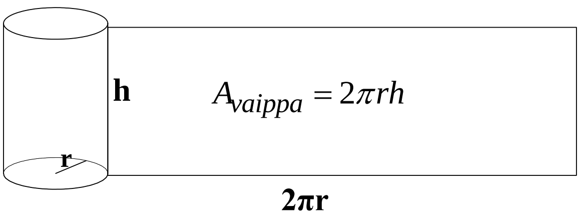
$A_{vaippa} = 2\pi rh$



suora ympyrälieriö



vino ympyrälieriö



Esim. 3.22. Suoran ympyrälieriön pohjan säde on 1,05 dm ja korkeus 63,4 cm. Laske lieriön **a)** tilavuus litroina **b)** vaipan ala neliömetreinä.

Ratkaisu: **a)** Suoran ympyrälieriön tilavuus

$$V = A_p \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (1{,}05\,\text{dm})^2 \cdot 63{,}4\,\text{cm} = \pi \cdot (10{,}5\,\text{cm})^2 \cdot 63{,}4\,\text{cm}$$

$$= 21\,959{,}26141\,\text{cm}^3 = 21{,}959{,}26141\,\text{dm}^3 \approx 22{,}0\,l$$

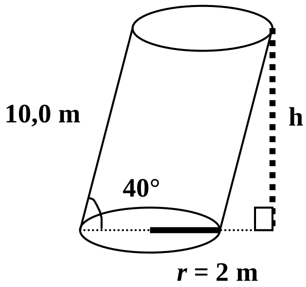
b) Vaipan ala

$$A_{vaippa} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10{,}5\ \text{cm} \cdot 63{,}4\ \text{cm} = 4\,182{,}7164...\ \text{cm}^2$$

$$= 0{,}4182...\ \text{m}^2 \approx 0{,}42\ \text{m}^2$$

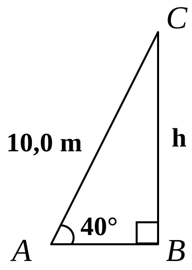
Vast. **a)** Tilavuus on 22,0 litraa. **b)** Vaipan ala on 0,42 m^2.

Esim. 3.23. Voidaanko nosturilla, joka voi nostaa enintään 200 tonnin kuorman, siirtää rakennustyömaalla vinoja ympyräpohjaisen lieriön muotoisia betonista valmistettuja paaluja? Paalun sivujanan pituus 10,0 m, sivujanan ja pohjan välinen kulma on 40° ja pohjaympyrän halkaisija on 4,0 m. Betonin tiheys on 2,25 kg / dm^3.



Ratkaisu: Tiheys $\rho = \dfrac{m}{V}$, josta $m = \rho V$, jossa $V = A_p \cdot h$ = paalun tilavuus.

Ratkaistaan paalun korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta ABC.



$$\sin 40^{\circ} = \frac{h}{10,0}$$

$$h = 10,0 \text{ m} \cdot \sin 40^{\circ} = 6,4278... \, m$$

Täten paalun tilavuus

$$V = A_p \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot (2,0 \text{ m})^2 \cdot 6,4278... \text{ m} = 80,7750... \text{ m}^3$$

Paalun massa

$$m = \rho V = 2,25 \text{ kg/dm}^3 \cdot 80,77507... \text{ m}^3$$

$$= 2,25 \text{ kg/dm}^3 \cdot 80\ 775,07... \text{ dm}^3$$

$$= 181\ 743,91... \text{ kg}$$

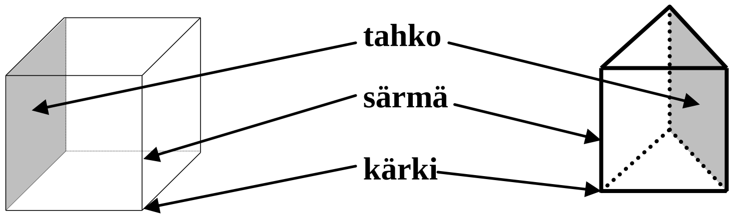
$$\approx 182 \text{ t}$$

Nosturilla voidaan siirtää paaluja, koska paalun massa on 182 tonnia.

Vast. Voidaan siirtää.

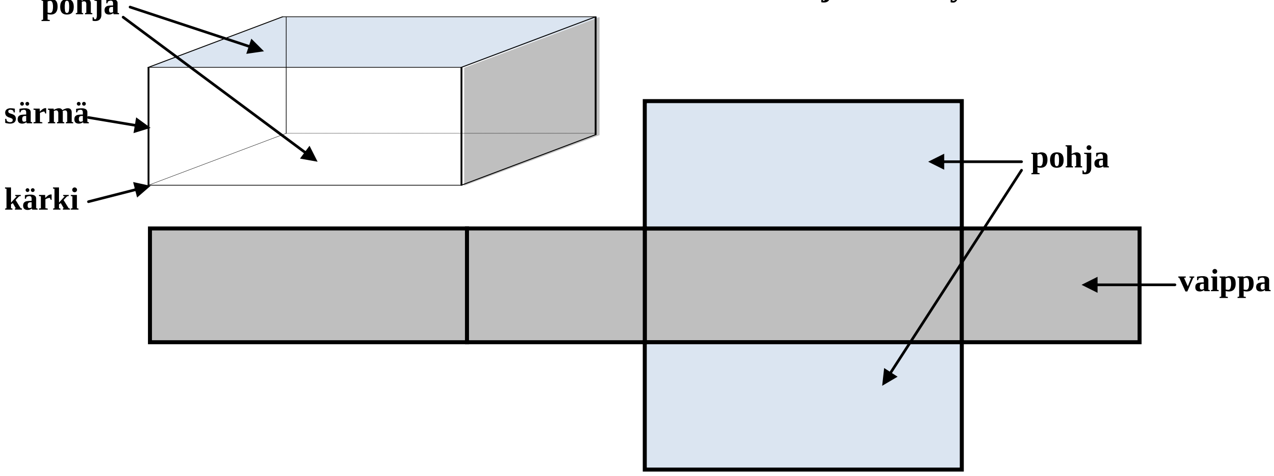
3.14. Särmiö

Jos lieriön pohjat ovat monikulmioita, lieriötä sanotaan särmiöksi (prismaksi).



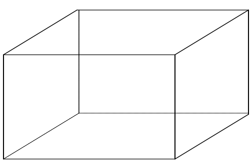
- Särmiön vaippa muodostuu suunnikkaista, jotka ovat särmiön sivutahkoja
- Särmiötä kutsutaan suuntaissärmiöksi, jos myös pohjat ovat suunnikkaita.
- Suorassa särmiössä sivusärmä on kohtisuorassa pohjaa vastaan.
- Särmiö on säännöllinen, jos se on suora ja sen pohjat ovat säännöllisiä monikulmioita.

Suorakulmainen särmiö leikattuna ja levitettynä tasoon

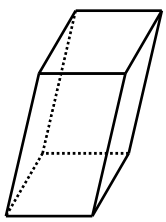


Suuntaissärmiö

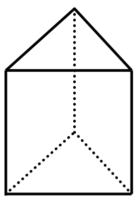
Säännöllinen särmiö



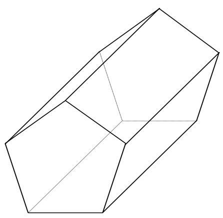
Suorakulmainen särmiö on suora



vino suuntaissärmi



Säännöllinen kolmi-sivuinen



Säännöllinen viisi-sivuinen särmiö

Koska särmiö on lieriö, niin särmiön tilavuus V ja pinta-ala A lasketaan kuten lieriöllä.

Esim. 3.24. Laske montako prosenttia kasvaa suorakulmaisen särmiön tilavuus, kun sen korkeus kasvaa 15 prosenttia ja leveys pienenee 10 prosenttia.

Ratkaisu: Olkoon suorakulmaisen särmiön pohjan pituus a ja leveys b sekä korkeus c.

Täten tilavuus $V_1 = abc$

Uusi korkeus on $1{,}15c$

Uusi leveys on $0{,}9b$

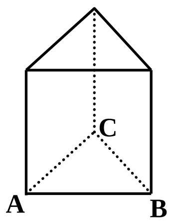
Täten uusi tilavuus $V_2 = a \cdot 0{,}9b \cdot 1{,}15c = 1{,}035abc$

Tilavuus tuli 1,035 – kertaiseksi eli se kasvoi 3,5 prosenttia.

Vast. Kasvoi 3,5 prosenttia.

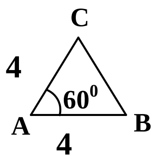
Esim. 3.25. Säännöllisen kolmisivuisen särmiön pohjan sivun pituus on 4 ja korkeus $5\sqrt{3}$. Laske särmiön tarkka tilavuus ilman laskinta.

Ratkaisu: Säännöllisen kolmisivuisen särmiön pohja on tasasivuinen kolmio eli sen kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kulmat ovat kaikki yhtä suuria.



Särmiön tilavuus saadaan kaavasta $V = A_p \cdot h$

Pohjan pinta-ala A_p



$$A_p = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^0 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

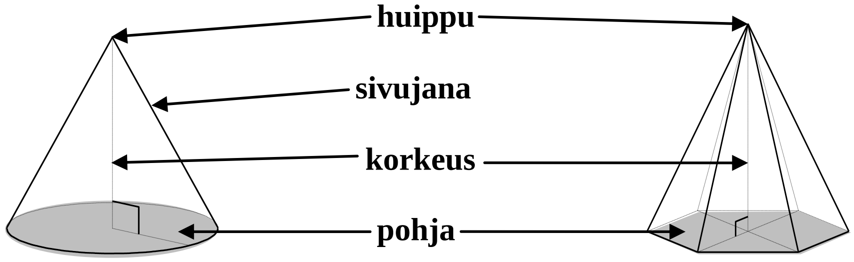
Särmiön tilavuus

$$V = A_p \cdot h = 4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 20 \cdot 6 = 120$$

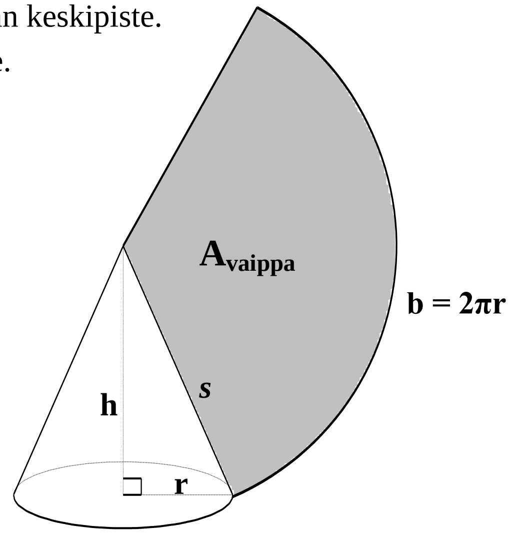
Vast. Tilavuus on 120.

3.15. Kartio

Peruskäsitteet



- Kartio on kappale, jota rajoittaa vaippa ja pohja.
- Suorassa kartiossa korkeusjanan toinen päätepiste on pohjan keskipiste.
- Vinossa kartiossa toinen päätepiste ei ole pohjan keskipiste.



Suora ympyräkartio

$$V_{kartio} = \frac{1}{3}A_{pohja} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$A_{vaippa} = \pi rs$$

$$A_{kartio} = A_{pohja} + A_{vaippa} = \pi r^2 + \pi rs$$

Esim. 3.26. Suoran ympyräkartion korkeus on 1,50 metriä ja tilavuus on 212 litraa. Laske kartion pinta – ala.

Ratkaisu: Kartion tilavuus $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 1{,}5 \text{ m}$.

Toisaalta $V = 212 \text{ litraa} = 212 \text{ dm}^3 = 0{,}212 \text{ m}^3$.

Ratkaistaan r yhtälöstä $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 1{,}5 \text{ m} = 0{,}212 \text{ m}^3$

$r = 0{,}36737... \text{ m}$ tai $r = -0{,}36737... \text{ m}$ (ei kelpaa, $r > 0$ m)

Sivujanana pituus s $s^2 = h^2 + r^2$, josta $s = \pm\sqrt{h^2 + r^2}$ (pituus on positiivinen)

$$s = \sqrt{(1{,}5 \text{ m})^2 + (0{,}36737... \text{ m})^2} = 1{,}5443... \text{ m}$$

Kartion pinta-ala $A_{kartio} = A_{pohja} + A_{vaippa} = \pi r^2 + \pi rs$

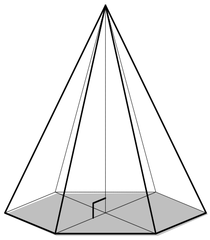
$$= \pi \cdot (0{,}36737... \text{ m})^2 + \pi \cdot 0{,}36737... \text{ m} \cdot 1{,}5443... \text{ m}$$

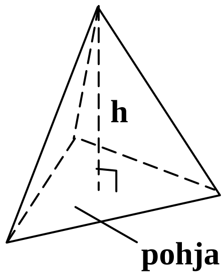
$$= 2{,}2063... \text{ m}^2 \approx 2{,}2 \text{ m}^2$$

Vast. Kartion pinta-ala on $2{,}2\ \text{m}^2$.

Pyramidi

- Pyramidiksi sanotaan kartiota, jonka pohja on monikulmio.
- Pyramidi on säännöllinen, kun se on suora ja sen pohja on säännöllinen monikulmio.

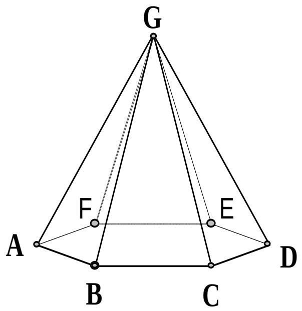


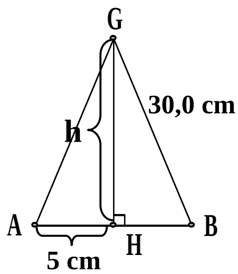


$$\boxed{A_{kartio} = A_{pohja} + A_{vaippa}}$$

$$\boxed{V_{kartio} = \frac{1}{3} A_{pohja} \cdot h}$$

Esim. 3.27. Säännöllisen kuusisivuisen pyramidin pohjasärmien pituus on 10,0 cm ja sivusärmien pituus 30,0 cm. Kuinka suuri pyramidin vaipan pinta-ala on?





Ratkaisu: Pyramidin vaippa muodostuu kuudesta yhtenevästä tasakylkisestä kolmiosta.
Ratkaistaan kolmion korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$5^2 + \text{h}^2 = 30^2, \text{ josta h} = \sqrt{30^2 - 5^2} = \sqrt{875} = \sqrt{25 \cdot 35} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{35} = 5\sqrt{35}$$

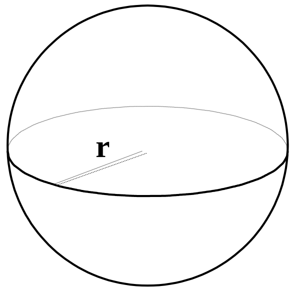
$$\text{Vaipan ala} = 6 \cdot \text{kolmion ala} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{35} = 150\sqrt{35} = 887{,}4119675 \approx 890$$

Vast. Vaipan ala on noin $890\ \text{cm}^2$.

Huomautus: Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien V_1 ja V_2 suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^3$$

3.16. Pallo



Pinta-ala $A = 4\pi r^2$

Tilavuus $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Esim. 3.28. Kuparipallon massa on 10,3 kg ja halkaisija 14,48 cm. Onko pallo ontto sisältä? Kuparin tiheys $\rho = 8{,}96 \cdot 10^3$ kg/m^3.

Ratkaisu: Lasketaan kyseessä olevan pallon massa olettamalla, että pallo on umpinainen. Jos saatu massa on yhtä suuri kuin 10,3 kg, niin pallo on umpinainen. Jos taas pallon massa on suurempi kuin 10,3 kg, niin silloin pallo on ontto sisältä.

Halkaisija on 14,48 cm, jolloin pallon säde on 7,24 cm. Tällöin kuparipallon tilavuus

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 7{,}24^3 = 1589{,}660225\ (\text{cm}^3)$$

Muutetaan vielä yksiköt vastaamaan toisiaan. Koska tiheyden yksikkö on annettu kg/m^3, niin muutetaan pallon tilavuus kuutiometreihin.

$$V = 1589{,}660225\ \text{cm}^3 = 0{,}0015896...\ \text{m}^2 = 1{,}5896... \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$$

Tiheys $\rho = \dfrac{m}{V}$, josta

$$m = \rho V$$

$$= 8{,}96 \cdot 10^3\ \text{kg}/\text{m}^3 \cdot 1{,}589660225 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$$

$$= 14{,}24335562\ \text{kg} \approx 14{,}2\ \text{kg}$$

Umpinaisen pallon massa olisi n. 14,2 kg. Pallon on siis pakko olla keskeltä ontto.

Vast. Pallo on ontto keskeltä.

Pallon osat

Pallopinnan kalotin ja vyöhykkeen pinta-ala

$$A = 2\pi rh \text{, jossa } r = \text{pallon säde ja } h = \text{kalotin tai vyöhykkeen korkeus}$$

Pallosegmentin tilavuus

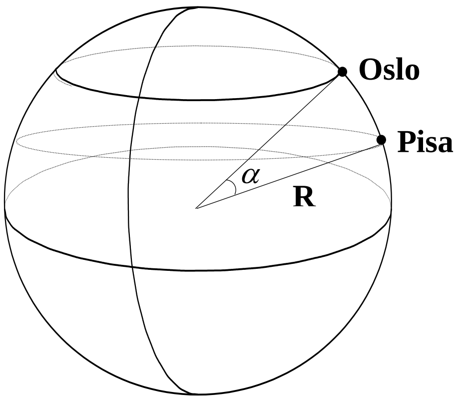
$$V = \pi h^2 (r - \frac{h}{3}) \text{, jossa } r = \text{pallon säde ja } h = \text{pallosegmentin korkeus}$$

Pallosektorin tilavuus

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h \text{, jossa } r = \text{pallon säde ja } h = \text{pallosektorin korkeus}$$

3.17. Paikkakunnan sijainnin ilmoittaminen

Paikan sijainti ilmoitetaan pohjoisen tai eteläisen leveyden ja läntisen tai itäisen pituuden avulla. Esimerkiksi Ruoveden sijainti on 62 astetta pohjoista leveyttä ja 24 astetta itäistä pituutta ja näin ollen Ruoveden koordinaatit ovat: 62°N, 24°E. Ruovesi sijaitsee 62 astetta pohjoiseen päiväntasaajasta ja 24 astetta itään nollapituuspiiristä.

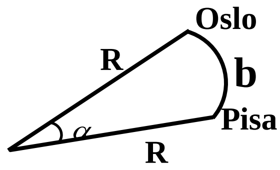


Esim. 3.29. Oslon sijainti on noin 60° pohjoista leveyttä ja 12° itäistä pituutta ja Pisan sijainti Italiassa on noin 44° pohjoista leveyttä ja 12° itäistä pituutta.

a) Laske Oslon ja Pisan välinen etäisyys?
b) Kuinka monta kilometriä suora tunneli lyhentäisi matkaa Oslosta Pisaan? Maapallon säde on 6 370 km.

Ratkaisu: **a)** Kulman α suuruus $\alpha = 60^o - 44^o = 16^o$
Oslon ja Pisan välinen etäisyys kaaren b pituus

$$b = \frac{\alpha}{360^o} \cdot 2\pi R = \frac{16^o}{360^o} \cdot 2\pi \cdot 6370 \text{ km} = 1778{,}8395\ldots \text{ km}$$

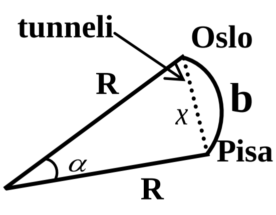


b) Tunnelin pituus x saadaan kosinilauseella

$$x^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\alpha \text{ , jossa } R = 6370 \text{ km ja } \alpha = 16^o$$

Laskimella saadaan $x = 1772{,}006957$

Matka lyhenisi $1778{,}8395\ldots \text{ km} - 1772{,}0069\ldots \text{ km} = 6{,}8326\ldots \text{ km}$

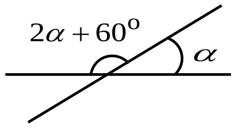


Vast. **a)** 1780 km **b)** Matka lyhenisi 6,8 km.

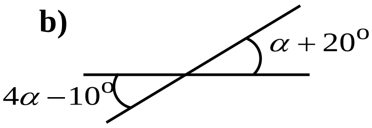
Poikkeuksellisesti myös tehtävissä 3.1 – 3.4 saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa.

3.1. Ratkaise kulmien α, β ja γ suuruudet. Perustelut näkyviin.

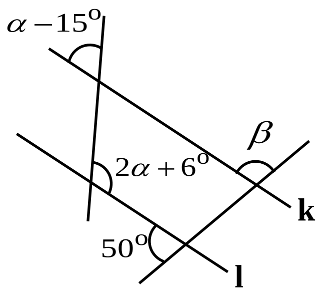
a)



b)

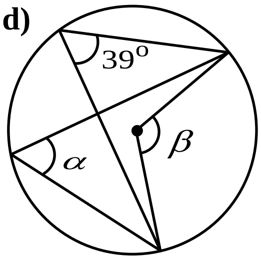


c)

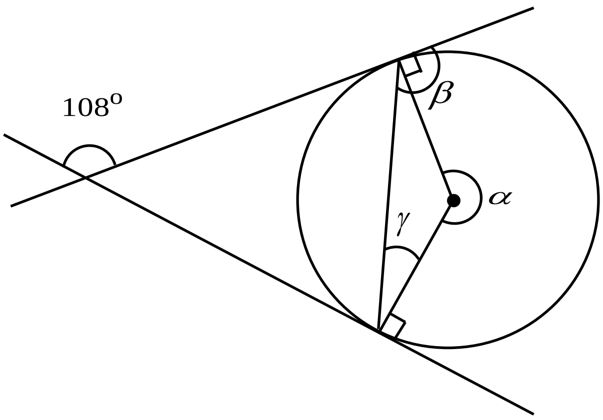


k || l

d)

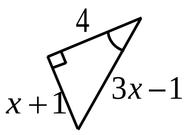


e)

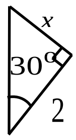


3.2. Ratkaise x.

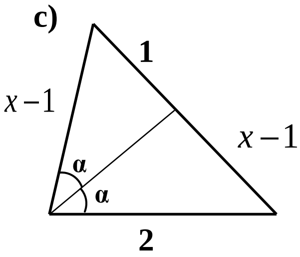
a)



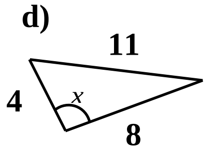
b)



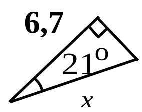
c)



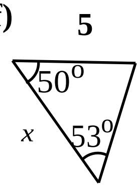
d)



e)

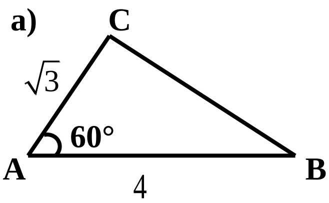


f)

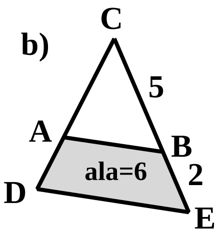


3.3. Laske kolmion ABC pinta-alan tarkka arvo.

a)



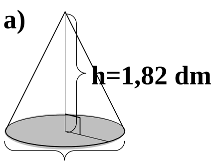
b)



AB || DE

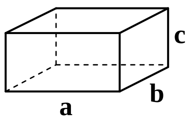
3.4. Laske kappaleiden tilavuudet a- ja b-kohdissa 0,1 litran tarkkuudella ja c-kohdassa tarkkana arvona.

a)



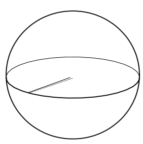
d=30 cm

b)



a = 12 cm, b = 5 cm
c = 3 cm

c)



A=16π m²

Tehtävissä 3.5 – 3.15 saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa. (Katso kaikki ratkaisut)

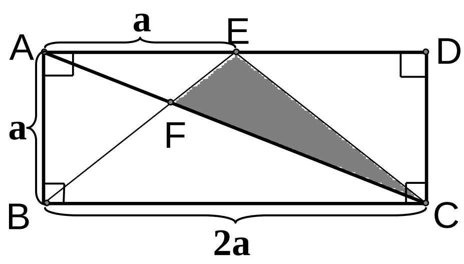
3.5. Suoran ympyräpohjaisen lieriön pohjan pinta-ala on 1730 mm^2 ja vaipan ala 39,1 cm^2. Laske lieriön tilavuus. (tiedosto, video)

3.6. Laske säännöllisen 8-kulmion
a) kulmien summa
b) yhden kulman suuruus
c) pinta-ala, kun sivun pituus on $\sqrt{2}-1$.
(tiedosto, video)

3.7. Kolmion muotoisen tontin pinta-ala on 0,8 hehtaaria. Tontin sivut ovat 150 m ja 110 m. Laske tontin kolmannen sivun pituus ja lyhimmän sivun vastaisen kulman suuruus asteen tarkkuudella.
(tiedosto, video)

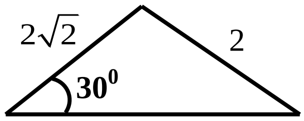
3.8. Rannalta katsottuna saaressa olevan majakan valo näkyy 25 asteen kulmassa. Kun rannalta siirrytään 150 metriä sisämaahan päin, niin majakan valo näky 15 asteen kulmassa.
a) Kuinka kaukana majakka on rannasta?
b) Kuinka korkea majakka on?
c) Kuinka kaukana kauimmillaan on merellä uiva henkilö, jonka majakasta voi kiikareilla nähdä? Maapallon säde on 6370 km.
(tiedosto, video)

3.9. Laske väritetyn kolmion pinta-alan tarkka arvo, kun BE = CE.



(tiedosto, video)

3.10. Kuinka monta prosenttia alla olevan kolmion sisälle piirretyn mahdollisimman suuren ympyrän pinta-ala on koko kolmion pinta-alasta?



(tiedosto, video)

3.11. Sadevesimittarina käytettiin kärjellään seisovaa ympyräkartiota, jonka korkeus oli 15 cm ja pohjan säde 3 cm. Sateen jälkeen mittarin vedenpinta oli 7 cm:n korkeudella. Kuinka monta millimetriä oli sademäärä?
(tiedosto, video)

3.12. Ovi on auki 52 astetta. Laske kuinka pitkä matka oven kahvanpuoleisesta ylänurkasta on oviaukon keskipisteeseen, kun oven mitat ovat 82 cm $\times$ 206 cm.
(tiedosto, video)

3.13. Osoita oikeaksi lause ”Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta”, kun kehäkulman kyljet ovat eri puolella ympyrän keskipistettä. (tiedosto, video)

3.14. Paikkakunnat A ja B sijaitsevat pohjoisella pallonpuoliskolla siten, että kummankin leveysaste on 49 mutta pituusasteiden ero on 38. Laske paikkakuntien välimatka leveyspiiriä pitkin mitattuna. Laske myös paikkakuntien välinen lyhin välimatka maan pintaa pitkin mitattuna. (Maanpinnan epätasaisuutta ei oteta huomioon.) Maapallon isoympyrän pituudeksi oletetaan 40 000 km. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. (S99/8a) (tiedosto, video)

3.15. Laske pallopyramidin korkeus, kun kerroksia on kolme niin, että alimmassa kerroksessa on kuusi palloa, seuraavassa on kolme palloa ja ylimmässä on yksi pallo.
(tiedosto, video)

M4 Analyyttinen geometria

4.1. Piste

Piste on jonkin funktion kuvaajan tai geometrisen kuvion piste vain, jos pisteen koordinaatit toteuttavat sen yhtälön. Näin analyyttisen geometrian ongelmia voidaan ratkaista algebrallisesti.

Esim. 1.1. Tutki kulkeeko käyrä **a)** $x^2+y^2=9$ **b)** $y=x^2-3x+1$ pisteen $(1,-1)$ kautta?

Ratkaisu: **a)** Sijoitetaan pisteen $(1,-1)$ koordinaatit yhtälöön $x^2+y^2=9$ ja tarkistetaan toteuttaako ko. pisteen koordinaatit yhtälön.

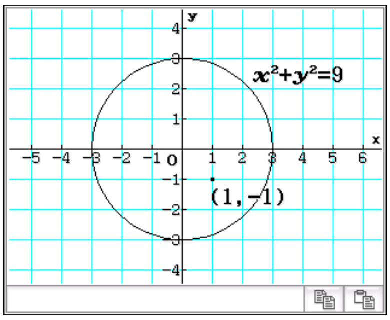
$1^2+(-1)^2=1+1=2\neq 9$ Ei kulje, koska yhtälö on epätosi.

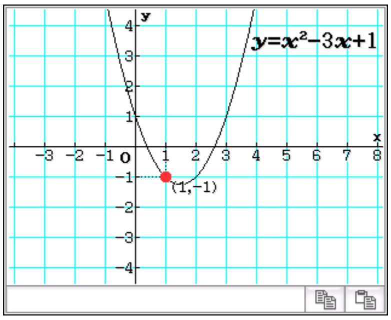
b) Sijoitetaan pisteen $(1,-1)$ koordinaatit yhtälöön $y=x^2-3x+1$.

$$-1=1^2-3\cdot 1+1$$
$$-1=-1$$
Kulkee, koska yhtälö on tosi.

Vast. **a)** Ei kulje (ei toteudu) **b)** Kulkee (toteutuu)

Alla olevista kuvaajista on helppo huomata graafisesti edellä saatu tulos.





Esim. 4.1. Laske laskimen avulla, millä vakion a arvoilla pisteen $(-2a,3a)$ koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2-x+y-9=0$?

Ratkaisu: Sijoitetaan pisteen $(-2a,3a)$ koordinaatit yhtälöön $x^2-x+y-9=0$ ja ratkaistaan saadusta uudesta yhtälöstä vakio a.

$$x^2-x+y-9=0 \qquad \mid x=-2a,\ y=3a$$
$$4a^2+5a-9=0$$
Ratkaistaan laskimella.
$$a=1 \text{ tai } a=-\frac{9}{4}$$

Vast. $a=1$ tai $a=-\dfrac{9}{4}$

Kahden pisteen välinen etäisyys

Pisteiden (x_1, x_2) ja (y_1, y_2) välinen etäisyys

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Janan keskipiste

Olkoon janan päätepisteiden koordinaatit (x_1, x_2) ja (y_1, y_2). Tällöin janan keskipisteen M koordinaatit ovat

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Esim. 4.2. **a)** Laske pisteiden $(2,-7)$ ja $(5,-3)$ välinen etäisyys.
b) Janan päätepisteet ovat $(0,-3)$ ja $(4,5)$. Laske janan keskipisteen koordinaatit.

Ratkaisu: **a)** Pisteiden välinen etäisyys $d = \sqrt{(5-2)^2 + \left(-3-(-7)\right)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

b) Janan keskipisteen koordinaatit $x = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$ ja $y = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Vast. **a)** Etäisyys on 5. **b)** Janan keskipiste $M = (2,1)$.

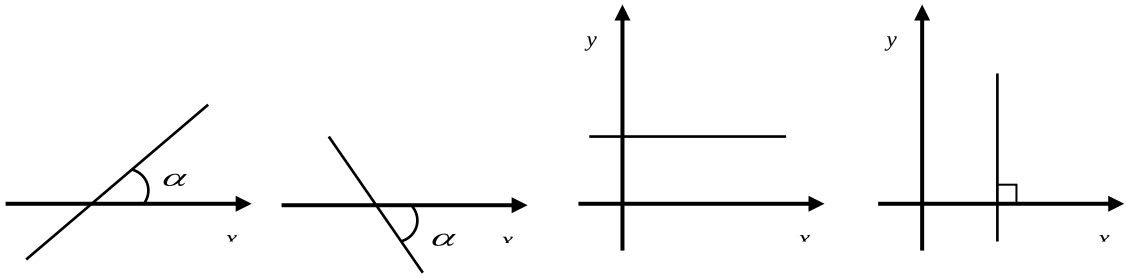
4.2. Suora

Suoran yhtälö:

ratkaistu muoto	normaalimuoto
$y = kx + b$, jossa k = suoran kulmakerroin b = kohta, jossa suora leikkaa y-akselin	$ax + by + c = 0$, jossa $a \neq 0$ tai $b \neq 0$

Suoran suuntakulma α on suoran ja x-akselin positiivisen suunnan välinen terävä tai suora kulma. Täten $-90^\circ < \alpha \le 90^\circ$.

Suoran, joka kulkee pisteiden (x_1, x_2) ja (y_1, y_2) kautta, kulmakerroin $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Jos suoran $k > 0$, niin suora on nouseva. Jos $k < 0$, niin suora on laskeva.



nouseva suora, $\alpha > 0^\circ$ ja $k > 0$

laskeva suora, $a < 0^\circ$ ja $k < 0$

vaakasuora, $\alpha = 0^\circ$ ja $k = 0$

pystysuora, $\alpha = 90^\circ$, ei k:ta

Huomautus: Suoran kulmakerroin k voidaan laskea myös suoran suuntakulman α avulla seuraavasti $k = \tan \alpha$.

Esim. 4.3. Millä vakion a arvoilla suora $ax+ay-2x+y-3a-3=0$ on laskeva?

Ratkaisu: Kirjoitetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$ax+ay-2x+y-3a-3=0$ Erotetaan x ja y yht. tekijäksi

$(a-2)x+(a+1)y-3a-3=0$ Ratkaistaan y:n suhteen

$(a+1)y=-(a-2)x+3a+3 \quad \Big| :(a+1)$

$y=\dfrac{-(a-2)}{a+1}x+\dfrac{3a+3}{a+1}$ Poistetaan sulkeet ja erot. yht. tekijä

$$y=\frac{-a+2}{a+1}x+\frac{3\cancel{(a+1)}}{\cancel{a+1}}$$

$$y=\frac{-a+2}{a+1}x+3$$

Suora on laskeva, kun suoran kulmakerroin $k<0$ ja koska $k=\dfrac{-a+2}{a+1}$, niin saadaan

$$\frac{-a+2}{a+1}<0$$

Ratkaistaan osoittajan ja nimittäjän nollakohta

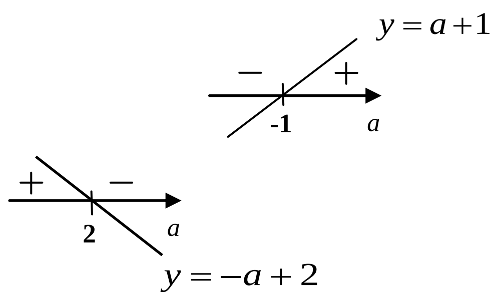
$-a+2=0 \qquad a+1=0$

$a=2 \qquad a=-1$

Tehdään merkkikaavio

		-1		2		a
$-a+2$	+		+		−	
$a+1$	−		+		+	
osamäärä	−		+		−	

nimittäjän nollakohta



Merkkikaaviosta nähdään, että $k<0$, kun $a<-1$ tai $a>2$.

Vast. Suora on laskeva, kun $a<-1$ tai $a>2$.

Suoran, joka kulkee pisteiden (x_1, x_2) ja (y_1, y_2) kautta, **yhtälön johtaminen:**

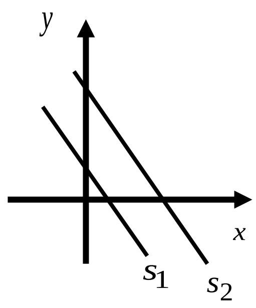
1. Lasketaan suoran kulmakerroin k kaavalla $k = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.
2. Sijoitetaan toinen suoran pisteistä (valitse helpompi) ja edellä laskettu kulmakerroin k yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Huomautus: Jos suora kulkee pisteen (a, b) kautta ja se on
x-akselin suuntainen, niin sen yhtälö on $y = b$
y-akselin suuntainen, niin sen yhtälö on $x = a$ ..

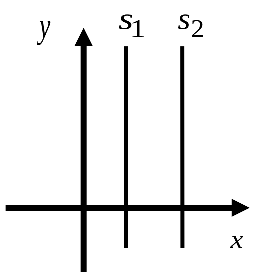
Suorien yhdensuuntaisuusehto $\boxed{s_1 \parallel s_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2}$

Suorat ovat yhdensuuntaisia, jos

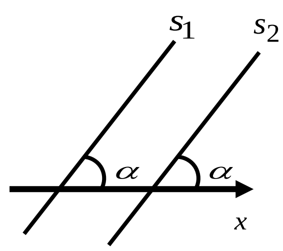
- niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuria
- suorat ovat y-akselin suuntaisia
- suorien välinen kulma on 0°
- Huomaa, että jos kahden suoran kulmakertoimet ovat yhtä suuria, niin suorat ovat yhdensuuntaisia.



$k_1 = k_2$



Pystysuorat ja siksi kulmakerrointa ei ole olemassa



Suorien suuntakulmat ovat yhtä suuria.

Suorien kohtisuoruusehto $\boxed{s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1}$

Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan (toistensa normaaleja), jos

- niiden kulmakertoimien tulo on -1
- toinen on x-akselin ja toinen y-akselin suuntainen
- suorien välinen kulma on 90°
- Huomaa, että jos kahden suoran kulmakertoimien tulo on -1, niin suorat ovat toistensa normaaleja (kohtisuorassa toisiaan vastaan).

Esim. 4.4. Muodosta suoran yhtälö, kun suora kulkee
a) pisteiden $(-2,5)$ ja $(0,-1)$ kautta
b) pisteen $(2,4)$ kautta ja on suoran $4x+2y-10=0$ normaali.

Ratkaisu: **a)** Suoran kulmakerroin $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-1-5}{0-(-2)}=\dfrac{-6}{2}=-3$

Suoran yhtälö $y-y_0=k(x-x_0)$

$$y-(-1)=-3(x-0)$$
$$y+1=-3x$$
$$y=-3x-1$$

Josta saadaan normaalimuoto $3x+y+1=0$.

b) Suoran $4x+2y-10=0$ ratkaistu muoto $y=-2x+5$ eli $k_1=-2$.

Kulmakertoimien tulo $k_1\cdot k_2=-1$ eli $-2k_2=-1$, josta $k_2=\dfrac{1}{2}$.

Suoran yhtälö $y-y_0=k(x-x_0)$

$$y-4=\frac{1}{2}(x-2)$$
$$y=\frac{1}{2}x-1+4$$
$$y=\frac{1}{2}x+3$$

Josta saadaan normaalimuoto seuraavasti: $y=\dfrac{1}{2}x+3 \quad \Big|\cdot 2$.

$2y=x+6$ Siirretään termi $2y$

$$x-2y+6=0$$

Vast. **a)** $y=-3x-1$ (ratkaistu muoto), $3x+y+1=0$ (normaalimuoto)

b) $y=\dfrac{1}{2}x+3$ (ratkaistu muoto), $x-2y+6=0$ (normaalimuoto)

Huomautus: Tehtävässä ei ole tarkoitus antaa vastausta kahdella eri tavalla. Ole tarkkana yo-kokeessa ja anna vastaus pyydetyssä muodossa. Jos tehtävänannossa ei mainita mitään, niin silloin voit antaa vastauksen haluamassasi muodossa.

Pisteen $P(x_0, y_0)$ **etäisyys** d **suorasta** $ax+by+c=0, a\neq 0$ tai $b\neq 0$ on

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Esim. 4.5. Laske pisteen $(4,-3)$ etäisyys suorasta $y=-2x+6$.

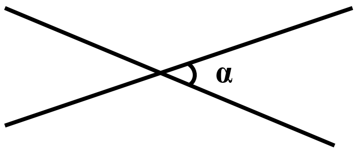
Ratkaisu: Suoran $y=-2x+6$ yhtälön normaalimuoto $2x+y-6=0$.

Täten $x_0=4,\ y_0=-3,\ a=2,\ b=1$ ja $c=-6$.

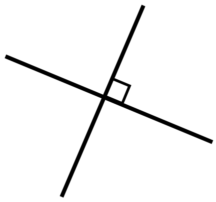
Pisteen etäisyys $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|2\cdot 4+1\cdot(-3)+(-6)|}{\sqrt{2^2+1^2}}\overset{\sqrt{5})}{=}\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Vast. Pisteen etäisyys suorasta on $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

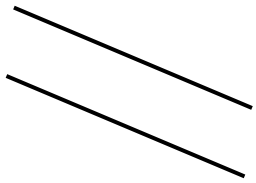
Kahden suoran välisellä kulmalla α tarkoitetaan vieruskulmista pienempää. Jos suorat yhtyvät tai ovat yhdensuuntaisia, niin $\alpha=0^{\circ}$. Täten aina $0^{\circ}\leq\alpha\leq 90^{\circ}$.



$0^{\circ}<\alpha<90^{\circ}$



$\alpha=90^{\circ}$



$\alpha=0^{\circ}$

Kahden suoran välinen kulma α saadaan yhtälöstä $\tan\alpha=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}\right|$.

Esim. 4.6. Laske suorien $y=-3x+9$ ja $x-y-2=0$ välinen kulma.

Ratkaisu: Suoran $x-y-2=0$ ratkaistu muoto on $y=x-2$. Täten $k_1=-3$ ja $k_2=1$.

$$\tan\alpha=\left|\frac{-3-1}{1+(-3)\cdot 1}\right|=\left|\frac{-4}{-2}\right|$$

$$\tan\alpha=2$$

$$\alpha=\tan^{-1}2=63{,}43494882^{\circ}$$

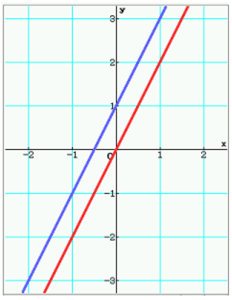
Vast. Suorien $y=-3x+9$ ja $x-y-2=0$ välinen kulma on 63,4 astetta.

4.3. Yhtälöpari ja kolmen tuntemattoman yhtälöryhmä

Kahden suoran $a_1x+b_1y=c_1$ ja $a_2x+b_2y=c_2$ **leikkauspiste** saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ joko eliminointimenetelmällä tai sijoitusmenetelmällä.

Suorien leikkauspisteiden lukumäärä voi olla nolla, yksi tai äärettömän monta.

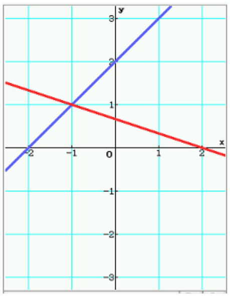
Ei yhtään leikkauspistettä



$$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ -6x+3y=0 \end{cases}$$

Suorat yhdensuuntai-sia, eivät yhdy

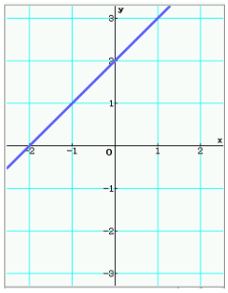
Yksi leikkauspiste



$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+3y-2=0 \end{cases}$$

Suorat ovat erisuuntaisia

Äärettömän monta



$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$$

Suorat yhtyvät

Esim. 4.7. Ratkaise suorien $x-2y=4$ ja $2x-y=17$ leikkauspiste.

Ratkaisu:

Eliminointimenetelmä

$$\begin{cases} x-2y=4 & |\cdot(-2) \\ 2x-y=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x+4y=-8 \\ \quad 2x-\ \ y=17 \end{cases}$$

$$3y=9 \quad |:3$$

$$y=3$$

Sijoitetaan $y=3$ alempaan yhtälöön $2x-y=17$.

$$2x-3=17$$

$$2x=20 \quad |:2$$

$$x=10$$

Sijoitusmenetelmä

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ 2x-y=17, \text{ josta } y=2x-17 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y=2x-17$ ylempään yhtälöön.

$$x-2(2x-17)=4$$

$$x-4x+34=4$$

$$-3x=-30$$

$$x=10$$

Sijoitetaan $x=10$ yhtälöön $y=2x-17$

$$y=2\cdot 10-17$$

$$y=20-17$$

$$y=3$$

Vast. Suorien $x-2y=4$ ja $2x-y=17$ leikkauspiste on $(10,3)$.

Yhtälöparin erikoistapaukset

Yhtälöitä on yksi vähemmän kuin muuttujia

- ratkaisuja äärettömän monta
- vastauksessa joku muuttujista ilmoitetaan toisen muuttujan avulla

$$\begin{cases} x-y-z=0, \text{ josta } y=x-z \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y=x-z$ yhtälöön $2x+3y+z=1$ ja ratkaistaan z

$$2x+3(x-z)+z=1$$

$$5x-2z=1, \text{ josta } z=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $z=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$ yhtälöön $y=x-z$

$$y=x-\left(\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\right)=x-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}$$

Vast. $x\in\mathbb{R},\ y=\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}$ ja $z=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$

Yhtälöitä on yksi enemmän kuin muuttujia

Ratkaiseminen

1. Ratkaise yhtälöpari, josta yksi yhtälöistä on jätetty pois

2. Sijoita vastaukset yhtälöön, jonka jätit pois. Jos yhtälö toteutuu, niin se on yhtälöryhmän ratkaisu.

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+2y=2 \\ -x+2y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y=4 & |\cdot 2 \\ x+2y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-2y=8 \\ x+2y=2 \end{cases}$$

$$5x=10$$

$$x=2$$

Sijoitetaan $x=2$ ylempään yhtälöön.

$4\cdot 2-2y=8$, josta $y=0$

Sijoitetaan $x=2$ ja $y=0$ yhtälöön $-x+2y=-2$, jolloin saadaan

$$-2+2\cdot 0=-2$$

$$-2=-2 \quad \text{Tosi}$$

Vast. $x=2$ ja $y=0$

Kolmen tuntemattoman yhtälöryhmä ratkaisu

1. Muodosta kaksi yhtälöparia ja eliminoi molemmista sama muuttuja.
2. Muodosta saaduista kahdesta yhtälöstä yhtälöpari ja ratkaise se.
3. Sijoita saadut kaksi muuttujan arvoa yhteen alkuperäisistä yhtälöistä ja ratkaise kolmas muuttuja.
4. Anna vastaus

Esim. 4.8. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} -2x-2y-2z=-12 \\ 2x+3y-z=5 \\ 2x-2y+4z=10 \end{cases}$

Ratkaisu: Muodostetaan ensin kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan kummastakin muuttuja x

$$\begin{cases} -2x-2y-2z=-12 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x-2y-2z=-12 \\ 2x-2y+4z=10 \end{cases}$$

$$y-3z=-7 \qquad\qquad -4y+2z=-2$$

Saatiin kaksi uutta yhtälöä, joissa molemmissa muuttujina on y ja z. Muodostetaan näistä yhtälöpari, joka ratkaistaan.

$$\begin{cases} y-3z=-7 & |\cdot 4 \\ -4y+2z=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y-12z=-28 \\ -4y+2z=-2 \end{cases}$$

$$-10z=-30$$

$$z=3$$

Sijoitetaan $z=3$ yhtälöön $y-3z=-7$, jolloin saadaan $y-3\cdot 3=-7$, josta $y=2$.

Sijoitetaan saadut arvot $y=2$ ja $z=3$ esimerkiksi yhtälöön $2x+3y-z=5$.

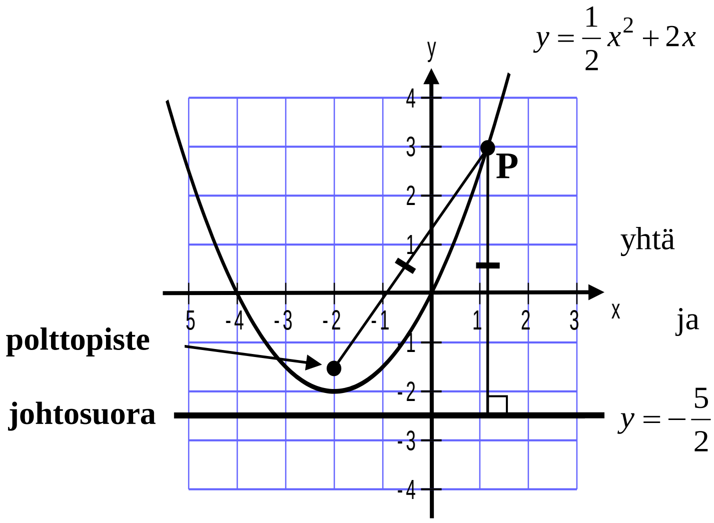
$$2x+3\cdot 2-3=5$$

$$x=2$$

Vast. Yhtälöryhmän ratkaisu $x=2$, $y=2$ ja $z=3$.

4.4. Paraabeli

Paraabelin muodostavat ne tason pisteet, jotka ovat yhtä etäällä johtosuorasta ja polttopisteestä. Esimerkiksi paraabelin $y=\frac{1}{2}x^2+2x$ yleinen piste $P(x,y)$ on yhtä etäällä paraabelin johtosuorasta $y=-\frac{5}{2}$ ja polttopisteestä $(-2,-\frac{3}{2})$.



	Ylöspäin tai alaspäin aukeava paraabeli	Oikealle tai vasemmalle aukeava paraabeli
perusmuoto	$y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$	$x=ay^2+by+c,\ a\neq 0$
huippumuoto	$y-y_0=a(x-x_0)^2$, $a\neq 0$, jossa (x_0,y_0) on paraabelin huippu	$x-x_0=a(y-y_0)^2$, $a\neq 0$, jossa (x_0,y_0) on paraabelin huippu
	Jos $a>0$, niin paraabeli aukeaa ylöspäin Jos $a<0$, niin paraabeli aukeaa alaspäin	Jos $a>0$, niin paraabeli aukeaa oikealle Jos $a<0$, niin paraabeli aukeaa vasemmalle
	Huipun *x*-koordinaatti $x_0=\frac{-b}{2a}$, joka on myös paraabelin symmetria-akseli.	Huipun *y*-koordinaatti $y_0=\frac{-b}{2a}$, joka on myös paraabelin symmetria-akseli.

Esim. 4.9. Mikä on paraabelin $x=y^2+4y-2$ huippu?

Ratkaisu: Huipun *y*-koordinaatti

$$y=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot 1}=-2$$

Huipun *x*-koordinaatti

$$x=y^2+4y-2=(-2)^2+4\cdot(-2)-2=-6$$

Vast. Huippu on $(-2,-6)$

Toisin Kirjoitetaan huippumuotoon

$$x=y^2+4y-2$$
$$x+2=y^2+4y$$
$$x+2+4=y^2+4y+4$$
$$x+6=(y+2)^2$$
$$x-(-6)=\left(y-(-2)\right)^2$$

Huippu on $(-2,-6)$

Esim. 4.10. Pesäpalloilija lyö pesäpalloa metrin korkeudesta. Pesäpallo käy korkeimmillaan 15 metrin korkeudessa, kun se on lyöjästä 20 metrin päässä. Pallon lentorata on paraabeli. Kuinka pitkälle pallo lentää ilmassa?

Ratkaisu: Paraabelin huipun koordinaatit ovat $(20,15)$ ja lisäksi tiedetään, että toisen pisteen koordinaatit ovat $(0,1)$. Sijoitetaan paraabelin huippumuotoon $y-y_0=a(x-x_0)^2$ huipun koordinaatit $x_0=20$ ja $y_0=15$ ja ratkaistaan *a*.

$$
\begin{aligned}
y-y_0&=a(x-x_0)^2\\
y-15&=a(x-20)^2\\
a&=\frac{y-15}{(x-20)^2}\\
a&=\frac{1-15}{(0-20)^2}\\
a&=-\frac{7}{200}
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $x=0$ ja $y=1$, koska paraabeli kulkee myös pisteen $(0,1)$ kautta.

Paraabelin yhtälöksi saadaan

$$
\begin{aligned}
y-y_0&=a(x-x_0)^2\\
y-15&=-\frac{7}{200}(x-20)^2\\
y&=-\frac{7}{200}x^2+\frac{7}{5}x+1
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $x_0=20$, $y_0=15$ ja $a=-\frac{7}{200}$.

Pallo osuu maahan, kun $y=0$. Merkitään paraabelin lauseke nollaksi ja ratkaistaan saatu yhtälö

$$-\frac{7}{200}x^2+\frac{7}{5}x+1=0$$

Laskimella.

$$x=40,70196678 \text{ tai } x=-0,70196678 \text{ (ei kelpaa)}$$

Vast. Pallo osuu maahan noin 40,7 metrin päässä lyöjästä.

4.5. Ympyrä

Ympyrän muodostavat ne tason pisteet, jotka ovat yhtä etäällä ympyrän keskipisteestä.

Ympyrän yhtälö voidaan esittää keskipistemuodossa tai normaalimuodossa.

Keskipistemuoto $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, $(x_0,y_0)=$ ympyrän keskipiste
$r=$ ympyrän säde

Normaalimuoto $x^2+y^2+ax+by+c=0$, jossa $a,b,c\in\mathbb{R}$

Esim.4.11. Tutki, mitä yhtälö $x^2+y^2-6x-2ay+a-3=0$ esittää eri parametrin a arvoilla.

Ratkaisu: Kirjoitetetaan yhtälö keskipistemuotoon

$$x^2+y^2-6x-2ay+a-3=0$$

$$x^2 \quad -6x \qquad\qquad +y^2 \quad -2ay \qquad\qquad =-a+3$$

$$(x)^2+2\cdot x\cdot(-3)+(-3)^2+(y)^2+2\cdot y\cdot(-a)+(-a)^2=-a+3+(-3)^2+(-a)^2$$

$$(x-3)^2+(y-a)^2=a^2-a+6$$

Yhtälö $(x-3)^2+(y-a)^2=a^2-a+6$ esittää **1)** ympyrää, jos $a^2-a+6>0$

2) pistettä, jos $a^2-a+6=0$

3) ei esitä mitään, jos $a^2-a+6<0$

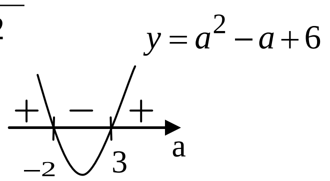
Ratkaistaan epäyhtälö $a^2-a+6>0$

$$a^2-a+6>0$$

$$a^2-a+6=0$$

$$a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm5}{2}$$

$$a=-2 \text{ tai } a=3$$



Vast. Esittää ympyrää, kun $a<-2$ tai $a>3$.

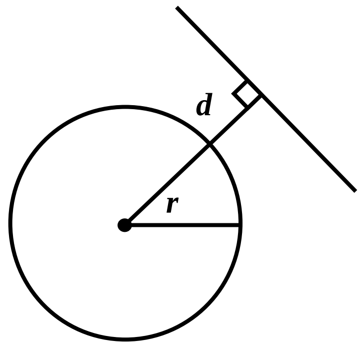
Esittää pistettä, kun $a=-2$ tai $a=3$.

Ei esitä mitään, kun $-2<a<3$.

4.6. Ympyrä ja suora

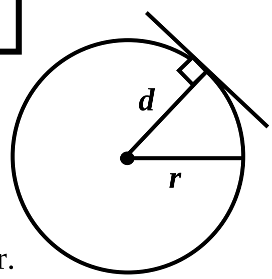
Suora on ympyrän ulkopuolella

- Suoralla ja ympyrällä ei ole yhteisiä pisteitä.
- Ympyrän etäisyys *d* suorasta on suurempi kuin ympyrän säde *r*.



$d > r$

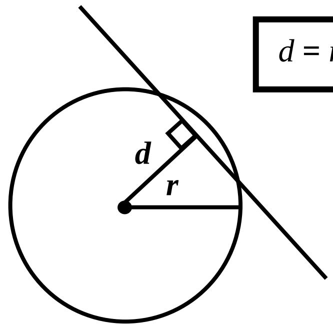
Suora on ympyrän tangentti



- Suoralla ja ympyrällä on yksi yhteinen piste.
- Ympyrän etäisyys d suorasta on yhtä suuri kuin ympyrän säde r.

$d = r$

Suora on ympyrän sekantti



- Suoralla ja ympyrällä on kaksi yhteistä pistettä.
- Ympyrän etäisyys d suorasta on pienempi kuin ympyrän säde r.

$\boldsymbol{d < r}$

Esim. 4.12. Onko suora $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ ympyrän $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ tangentti?

Ratkaisu: Ympyrän keskipistemuoto

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2 \qquad (r = 2)$$

Suoran normaalimuoto $3x - 2y + 1 = 0$

Keskipisteen $(2,-1)$ etäisyys *d* suorasta.

$$d = \frac{|3\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{11}{\sqrt{13}} \approx 3{,}05$$

Suora on ympyrän ulkopuolella, koska $d > r$

Vast. Suora ei ole ympyrän tangentti.

Toisin Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \\ y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ratkaistaan laskimella.
Ei ratkaisua ja siksi suoralla ja ympyrällä ei ole yhteisiä leikkauspisteitä. Täten suora on ympyrän ulkopuolella.

Tehtävissä 4.1 – 4.6 ei saa käyttää laskinta.

4.1. Kirjoita pelkkä vastaus. Ei tarvitse perustella mitenkään.

a) Mikä on suoran $10x+2y-4=0$ kulmakerroin?

b) Kulkeeko suora $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=10-2t \end{cases}$ pisteen $(-6,12)$ kautta?

c) Mikä on paraabelin $y-2=3(x+5)^2$ huippu?

d) Mikä on paraabelin $x=-y^2+3$ aukeamissuunta?

e) Mikä on ympyrän $(x+2)^2+(y-4)^2=5$ keskipiste ja säde?

f) Mikä on suoran $x-\sqrt{3}y+4=0$ suuntakulma asteina?

g) Mikä on suoran $x=-3$ suuntakulma asteina?

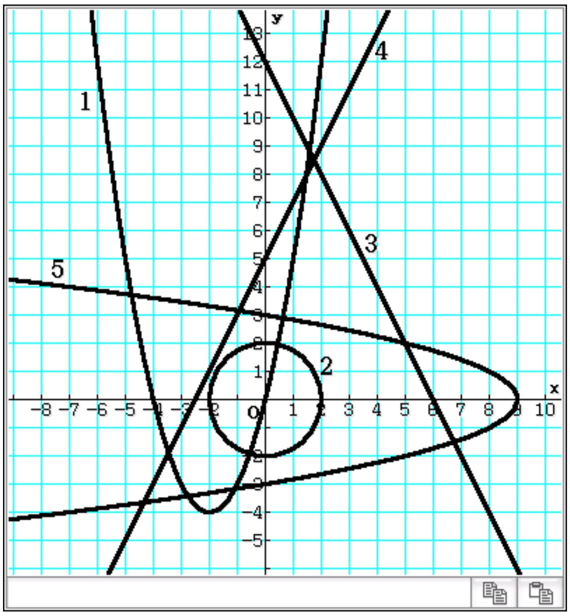
h) Missä pisteessä suora $8x+3y=24$ leikkaa $x-$akselin?

4.2. Yhdistä yhtälöt ja kuvaajat toisiinsa. Kaikkiin yhtälöihin ei välttämättä löydy paria.

a) $y=-2x+12$ **b)** $y=x+5$

c) $y=-x^2-4x$ **d)** $x^2+y^2=4$

e) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=3+6t \end{cases}$ **f)** $x=-y^2+9$



4.3. Ratkaise yhtälöt / epäyhtälöt

a) $|2x^2-3x|=5$ **b)** $|2x+4|\le 8$

c) $\sqrt{x+5}=1-x$

4.4. Ratkaise ympyrän

a) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$

b) $x^2+y^2+6x-10y+25=0$

keskipiste ja säde.

Ratkaise paraabelin

c) $y=x^2+12x+40$ **d)** $x=4y^2-16y-5$

huippu neliöksi täydentämällä.

4.5. Määritä sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on (2,3) ja joka sivuaa suoraa $y=2x+2$. (S80/2)

4.6. Millä vakion a arvoilla yhtälö $x^2+y^2+2ax-10y-a+31=0$ esittää ympyrää? Mikä on ympyrän suurin pinta-ala?

Tehtävissä 4.7 – 4.15 saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa. (Katso kaikki ratkaisut)

4.7. Muodosta suoran yhtälö, kun suora kulkee pisteen $(-1,5)$ kautta ja on suoran

a) $3x-2y+4=0$ suuntainen

b) $2x+4y=12$ normaali.

(tiedosto, video)

4.8. a) Laske pisteen $(-2,5)$ tarkka etäisyys suorasta $y=\frac{1}{2}x+4$. (tiedosto, video)

b) Suora m kulkee pisteiden $A=(1,3)$ ja $B=(5,-2)$ ja Suora n kulkee pisteiden $C=(4,3)$ ja $D=(1,-2)$ kautta. Laske suorien m ja n tarkka leikkauspiste.
(tiedosto, video)

4.9. a) Lukion jazzyhtyeen konsertin tuotto 192 euroa (€) on jaettava tasan yhtyeen jäsenille. Jos jäseniä olisi 2 enemmän, jokainen saisi 8 € vähemmän. Montako jäsentä yhtyeessä on ? (K00/2) (tiedosto, video)

b) Pekka osti 10 muovitaskua, 4 vihkoa ja 3 lyijykynää, jolloin hänen ostokset maksoivat 11,55 euroa. Matti osti 5 lyijykynää, muovitaskun ja 2 vihkoa, jolloin hänen ostokset maksoivat 7,15 euroa. Liisa osti 6 vihkoa, 2 lyijykynää ja 20 muovitaskua, jolloin hänen ostoksensa maksoivat 17,20 euroa. Laske muovitaskun hinta.
(tiedosto, video)

4.10. Laske suorien l ja m välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella, kun suora l kulkee pisteiden $(2,-3)$ ja $(-1,6)$ kautta ja suora m kulkee pisteiden $(1,-3)$ ja $(0,-2)$.
(tiedosto, video)

4.11. Ympyrän keskipiste on $(2,1)$. Muodosta yhtälö ympyrän sille tangentille, joka sivuaa ympyrää pisteessä $(5,3)$.
(tiedosto, video)

4.12. Keihäs irtoaa heittäjän kädestä 2,502 metrin korkeudesta. Keihäs käy korkeimmillaan 60 metrin korkeudessa, kun keihäs on 37 metrin päässä heittäjästä. Kuinka kauas keihäs lentää, kun sen lentorata noudattaa paraabelin kaarta?
(tiedosto, video)

4.13. Kuinka pitkän pätkän paraabeli, joka kulkee pisteiden $(-3,1)$ ja $(5,5)$ kautta ja jonka symmetria-akseli on $y=2$, leikkaa ympyrän kehästä, jonka säde on 4 ja keskipiste on $(1,-2)$? Ilmoita vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.
(tiedosto, video)

4.14. Etsi yhtälö ympyrälle, jonka keskipiste on suoralla $y=\frac{1}{2}x$ ja joka sivuaa x-akselia ja suoraa $4x+3y-24=0$. Määritä kaikki tehtävän ratkaisut. (K06/7)
(tiedosto, video)

4.15. a) Osoita, että jokainen parven $x^2+y^2-2ax=0$ ympyrä leikkaa parven $x^2+y^2-2by=0$ jokaisen ympyrän kohtisuorasti. (K88/9a)
(tiedosto, video)

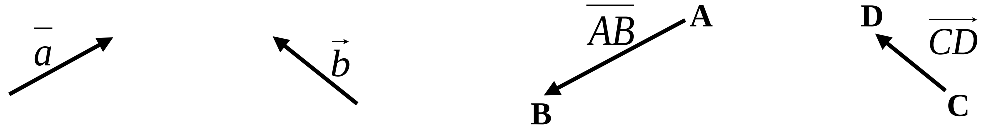
b) Missä $xy-$tason osissa on voimassa epäyhtälö $xy-x-y+1<0$? (S94/4b)
(tiedosto, video)

M5 Vektorit

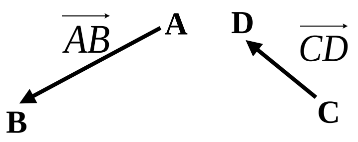
5.1. Vektoreiden nimitykset ja merkinnät

Janan AB määräävät kaksi pistettä A ja B. Janaa, joka alkaa pisteestä A ja päättyy pisteeseen B, kutsutaan suuntajanaksi $\overrightarrow{AB}$. Vektorilla tarkoitetaan kaikkia niitä suuntajanoja, jotka ovat keskenään samanpituisia ja samansuuntaisia. Suuntajanalla on aina paikka (alkupiste ja loppupiste), suunta ja pituus. Vektorilla on suunta ja pituus, mutta ei mitään tiettyä paikkaa. Yleensä kuitenkin puhutaan esimerkiksi vektorista $\overrightarrow{AB}$, vaikka $\overrightarrow{AB}$ on vain yksi vektoria edustava suuntajana.

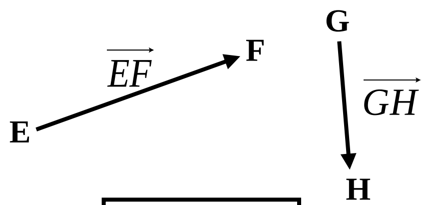
- Vektorit voidaan merkitä seuraavasti



- Vektorin $\overline{a}$ pituus merkitään $|\overline{a}|$ tai lyhyesti a
- Vektorin $\overrightarrow{AB}$ pituus merkitään $|\overrightarrow{AB}|$ tai lyhyesti AB
- Vektorit voivat olla erisuuntaiset



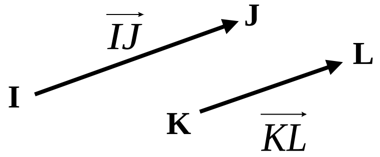
$\boxed{\overline{AB} \nparallel \overline{CD}}$



$\boxed{\overrightarrow{EF} \nparallel \overrightarrow{GH}}$

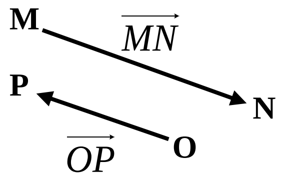
- Vektorit voivat olla yhdensuuntaiset, jolloin ne ovat samansuuntaisia tai vastakkaissuuntaisia

Samansuuntaiset



$\boxed{\overrightarrow{IJ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}}$

Vastakkaissuuntaiset



$\boxed{\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}}$

- Vektoriin liittyy vain pituus ja suunta, mutta ei mitään tiettyä paikkaa.
- Kun vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat

  yhdensuuntaiset, merkitään $\overline{a} \parallel \overline{b}$

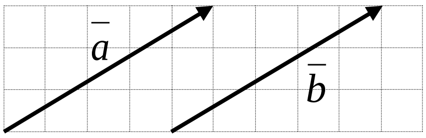
  erisuuntaiset, merkitään $\overline{a} \nparallel \overline{b}$

  samansuuntaiset, merkitään $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$

  vastakkaissuuntaiset, merkitään $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$

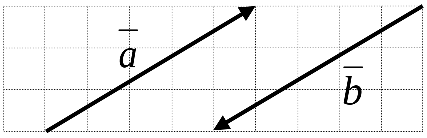
- **Sama vektori** = vektoreilla on sama suunta ja pituus

  Siis vektori $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ on sama vektori ($\overline{a} = \overline{b}$), kun $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ ja $|\overline{a}| = |\overline{b}|$

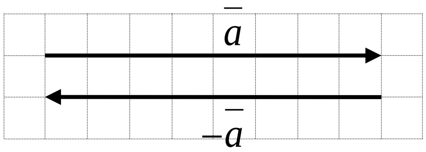


- **Vastavektori** = vektorit ovat vastakkaissuuntaiset ja yhtä pitkiä

  Siis vektori $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastavektoreita ($\overline{a} = -\overline{b}$), kun $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ ja $|\overline{a}| = |\overline{b}|$



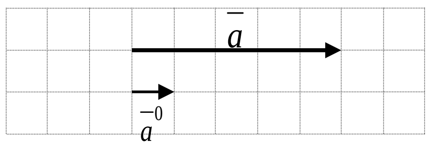
Vektorin $\overline{a}$ vastavektoria merkitään $-\overline{a}$. Siis $\overline{a} \uparrow\downarrow -\overline{a}$ ja $|\overline{a}| = |-\overline{a}|$



- **Nollavektori** = vektori, jonka pituus on nolla ja jolla ei ole määrättyä suuntaa

  Nollavektori merkitään $\overline{0}$

- **Yksikkövektori** = vektori, jonka pituus on yksi



Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori $\overline{a}^{o} = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$

5.2. Vektoreiden laskutoimitukset kerrottaessa reaaliluvulla

Vektorit noudattavat vaihdanta-, liitäntä- ja osittelulakia.

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$	vaihdantalaki
$\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}=\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$	liitäntälaki
$t(s\bar{a})=(ts)\bar{a}$	liitäntälaki
$(t+s)\bar{a}=t\bar{a}+s\bar{a}$ ja $t\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\bar{a}=t\bar{a}+t\bar{b}$	osittelulait

Esim. 5.1. Ratkaise vektori $\bar{u}$ yhtälöstä $-\left(\bar{u}-\bar{a}\right)+2\left(-2\bar{a}+3\bar{b}\right)=-3\left(\bar{a}+2\bar{u}\right)$

Ratkaisu:

$$-\left(\bar{u}-3\bar{a}\right)+2\left(-5\bar{a}+3\bar{b}\right)=-3\left(-\bar{a}+2\bar{u}\right)+\bar{b}$$
$$-\bar{u}+3\bar{a}-10\bar{a}+6\bar{b}=3\bar{a}-6\bar{u}+\bar{b}$$
$$-\bar{u}+6\bar{u}=3\bar{a}-3\bar{a}+10\bar{a}-6\bar{b}+\bar{b}$$
$$5\bar{u}=10\bar{a}-5\bar{b}$$
$$\bar{u}=2\bar{a}-\bar{b}$$

Vast. $\bar{u}=2\bar{a}-\bar{b}$

Esim. 5.2. Millä vakioiden r ja s arvoilla $\bar{u}=2r(4\bar{a}+2\bar{b})-s(2\bar{a}-\bar{b})$ ja $\bar{v}=4\bar{a}+6\bar{b}$ ovat sama vektori?

Ratkaisu: Vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ovat sama vektori (identtiset vektorit), kun

$\bar{u}=\bar{v}$	$\bar{u}=2r\left(4\bar{a}+2\bar{b}\right)-s\left(2\bar{a}-\bar{b}\right)$ ja $\bar{v}=4\bar{a}+6\bar{b}$
$2r\left(4\bar{a}+2\bar{b}\right)-s\left(2\bar{a}-\bar{b}\right)=4\bar{a}+6\bar{b}$	poistetaan sulkeet
$8r\bar{a}+4r\bar{b}-2s\bar{a}+s\bar{b}=4\bar{a}+6\bar{b}$	järjestetään termit uudelleen
$8r\bar{a}-2s\bar{a}+4r\bar{b}+s\bar{b}=4\bar{a}+6\bar{b}$	erotetaan yhteinen tekijä
$\left(8r-2s\right)\bar{a}+\left(4r+s\right)\bar{b}=4\bar{a}+6\bar{b}$	kertoimien pitää olla samat
$\begin{cases}8r-2s=4\\4r+s=6 \quad \Vert\cdot 2\end{cases}$	ratkaistaan yhtälöpari kertomalla

$$\begin{cases}8r-2s=4\\8r+2s=12\end{cases}$$
$$16r=16 \quad \Vert :16$$

$r=1$ ja sijoittamalla yhtälöön $4r+s=6$ saadaan $4\cdot1+s=6,$ josta $s=2$

Vast. Vektorit ovat samat (identtiset), kun $r=1$ ja $s=2$.

5.3. Janan jakosuhde

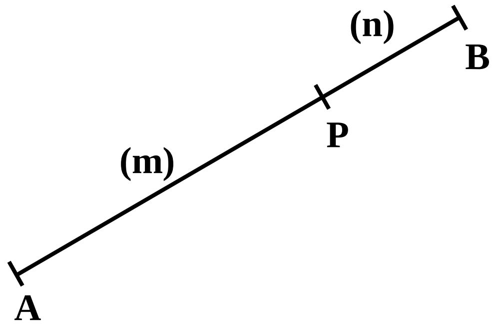
Olkoon janalla AB piste P niin, että $AP:PB=m:n$. Tällöin osajanat toteuttavat ehdot:

$AP:PB=m:n$ eli $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{m}{n}$

$AP=\dfrac{m}{n}PB$ $\qquad PB=\dfrac{n}{m}AB$

$AP=\dfrac{m}{m+n}AB$ $\qquad PB=\dfrac{n}{m+n}AB$

$AB=\dfrac{m+n}{m}AP$ $\qquad AB=\dfrac{m+n}{n}PB$

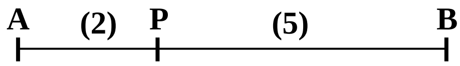


On hyvä huomata, että

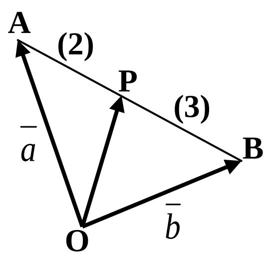
- suhdeluvut merkitään sulkeisiin
- osien suhde ilmaistaan samassa järjestyksessä, jossa janan päätepisteet on mainittu
  Esimerkiksi piste P jakaa janan

  AB suhteessa $2:5$

  BA suhteessa $5:2$



Esim. 5.3. Piste P jakaa janan AB suhteessa $2:3$ Määritä vektori $\overrightarrow{OP}$ vektoreiden $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ ja $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$ avulla.



Ratkaisu:

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$ $\qquad \| \overrightarrow{OA}=\bar{a}$ ja $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP}=\bar{a}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ $\qquad \| \overrightarrow{AB}=-\bar{a}+\bar{b}$

$\overrightarrow{OP}=\bar{a}+\dfrac{2}{5}(-\bar{a}+\bar{b})$ $\qquad \|$ poistetaan sulkeet

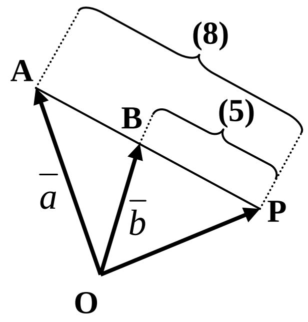
$$\overrightarrow{OP}=\bar{a}-\frac{2}{5}\bar{a}+\frac{2}{5}\bar{b}=\frac{3}{5}\bar{a}+\frac{2}{5}\bar{b}$$

Vast. $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}\bar{a}+\dfrac{2}{5}\bar{b}$

Huomautus: Koska piste jakaa janan AB suhteessa $2:3$, niin siksi $AP:PB=2:3$

Esim. 5.4. Janan AB jatkeella on piste P niin, että $PA:PB=8:5$. Lausu vektori $\overrightarrow{OP}$ vektoreiden $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ ja $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$ avulla.

Ratkaisu:



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$ || $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ ja $\overrightarrow{AP}=\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP}=\bar{a}+\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$ || $\overrightarrow{AB}=-\bar{a}+\bar{b}$

$\overrightarrow{OP}=\bar{a}+\frac{8}{3}(-\bar{a}+\bar{b})$ || poistetaan sulkeet

$$\overrightarrow{OP}=\bar{a}-\frac{8}{3}\bar{a}+\frac{8}{3}\bar{b}=-\frac{5}{3}\bar{a}+\frac{8}{3}\bar{b}$$

Vast. $\overrightarrow{OP}=-\frac{5}{3}\bar{a}+\frac{8}{3}\bar{b}$

5.4. Vektoreiden yhdensuuntaisuuslause

Vektoreiden yhdensuuntaisuuslause: $\bar{a}\parallel\bar{b}$ täsmälleen silloin, kun $\bar{a}=t\bar{b}$, missä $t\in\mathbb{R}, t\neq 0$

Huomautus: Vektorin kertominen positiivisella luvulla tuottaa aina alkuperäisen vektorin kanssa samansuuntaisen vektorin $t\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{a}$, jos $t>0$

Vektorin kertominen negatiivisella luvulla tuottaa aina alkuperäisen vektorin kanssa vastakkaissuuntaisen vektorin $t\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{a}$, jos $t<0$

Esim. 5.5. Ovatko vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ yhdensuuntaisia, kun $\bar{u}=8\bar{a}+4\bar{b}$ ja $\bar{v}=2\bar{a}+\bar{b}$

Ratkaisu: Vektoreiden yhdensuuntaisuuslauseen perusteella vektorit ovat yhdensuuntaisia, jos vektorista $\bar{v}$ saadaan vektori $\bar{u}$ kertomalla se jollakin luvulla $t\neq 0$

$\bar{u}=t\bar{v}$ | sijoitetaan $\bar{u}=8\bar{a}+4\bar{b}$ ja $\bar{v}=2\bar{a}+\bar{b}$

$8\bar{a}+4\bar{b}=t(2\bar{a}+\bar{b})$ | poistetaan sulkeet

$8\bar{a}+4\bar{b}=2t\bar{a}+t\bar{b}$ | vektorien kertoimien pitää olla samat

$\begin{cases}8=2t\\4=t\end{cases}$ | ratkaistaan molemmista t, jos saadaan sama vakion t arvo, niin silloin vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ovat yhdensuuntaisia

$\begin{cases}4=t\\4=t\end{cases}$

Vast. Koska molemmista yhtälöistä saatiin sama vakion t arvo, niin vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ovat yhdensuuntaisia. Tarkalleen ottaen samansuuntaisia, koska $t>0$.

Esim. 5.6. Millä vakion k arvolla vektorit $\bar{u} = 37,5\bar{a} + 5k\bar{b}$ ja $\bar{v} = 3k\bar{a} + 10\bar{b}$ ovat samansuuntaiset, kun $\bar{u} \neq \bar{0}$ ja $\bar{u} \neq \bar{0}$ sekä $\bar{a} \nparallel \bar{b}$.

Ratkaisu: Vektorit $\bar{u} = 37,5\bar{a} + 5k\bar{b}$ ja $\bar{v} = 3k\bar{a} + 10\bar{b}$ ovat yhdensuuntaisuuslauseen perusteella samansuuntaisia, jos on olemassa luku $t > 0$ niin, että

$$\bar{u} = t\bar{v} \qquad \Big| \; \bar{u} = 37,5\bar{a} + 5k\bar{b} \text{ ja } \bar{v} = 3k\bar{a} + 10\bar{b}$$

$$37,5\bar{a} + 5k\bar{b} = t\left(3k\bar{a} + 10\bar{b}\right) \qquad \Big| \text{ poistetaan sulkeet}$$

$$37,5\bar{a} + 5k\bar{b} = 3kt\bar{a} + 10t\bar{b}$$

Koska $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, niin vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat tason kantavektoreita ja koska kantavektoriesitys on yksikäsitteinen, niin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 3kt = 37,5 \\ 10t = 5k \qquad \| :10 \end{cases} \qquad \Big| \text{ ratkaistaan yhtälöpari jakamalla luvulla 10}$$

$$\begin{cases} 3kt = 37,5 \\ t = \frac{1}{2}k \end{cases} \qquad \Big| \text{ sijoitetaan ylempään yhtälöön}$$

$3k \cdot \frac{1}{2}k = 37,5$ josta saadaan $k^2 = 25$ ja edelleen $k = \pm 5$

Jos $k = 5$, niin silloin $t = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$

Jos $k = -5$, niin silloin $t = \frac{1}{2} \cdot (-5) = -\frac{5}{2}$ (ei käy, sillä t piti olla positiivinen)

Vast. $k = 5$

5.5. Vektorin jakaminen komponentteihin

Tason kantavektorit

Tason kantavektoreiksi voidaan valita mitkä tahansa kaksi vektoria (tai summavektoria), jos ne ovat erisuuntaisia vektoreita ja ne eivät ole nollavektoreita

Vektorin komponenttiesitys

Tason kantavektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla voidaan kirjoittaa kaikki muut tason vektorit vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ lineaarikombinaationa.

Esim. tason vektori $\overline{c} = s\overline{a} + t\overline{b},$ missä $s, t \in \mathbb{R}$ sekä $\overline{a} \nparallel \overline{b}$ että $\overline{a},\ \overline{b} \neq \overline{0}$

Esim. 5.7. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat tason kantavektorit. Jaa vektori $\overline{u}$ vektoreiden $\overline{a}+\overline{b}$ ja $\overline{a}-\overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin, kun $\overline{u} = 4\overline{a} - 2\overline{b}$.

Ratkaisu: Kirjoitetaan vektori $\overline{u}$ komponenttien $\overline{a}+\overline{b}$ ja $\overline{a}-\overline{b}$ lineaarikombinaationa.

$\overline{u} = s(\overline{a}+\overline{b}) + t(\overline{a}-\overline{b})$ | $\overline{u} = 4\overline{a} - 2\overline{b}$

$4\overline{a} - 2\overline{b} = s(\overline{a}+\overline{b}) + t(\overline{a}-\overline{b})$ | poistetaan sulkeet

$4\overline{a} - 2\overline{b} = s\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{a} - t\overline{b}$ | järjestellään termit oikealla puolella

$4\overline{a} - 2\overline{b} = s\overline{a} + t\overline{a} + s\overline{b} - t\overline{b}$ | erotetaan yhteinen tekijä

$4\overline{a} - 2\overline{b} = (s+t)\overline{a} + (s-t)\overline{b}$ | kertoimien pitää olla samat, saad. yhtälöpari

$$\begin{cases} s+t=4 \\ s-t=-2 \end{cases}$$

$2s = 2 \quad \| :2$

$s = 1$ | sijoitetaan $s=1$ yhtälöön $s+t=4$

$1+t=4$

$t = 4-1 = 3$

Vast. $\overline{u} = 1(\overline{a}+\overline{b}) + 3(\overline{a}-\overline{b}) = \overline{a}+\overline{b}+3(\overline{a}-\overline{b})$

5.6. Kantavektorit $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$ ja $\bar{k}$

- Vektori $\bar{i}$ on positiivisen $x-$ akselin suuntainen yksikkövektori (pituus on yksi).
- Vektori $\bar{j}$ on positiivisen $y-$ akselin suuntainen yksikkövektori (pituus on yksi).
- Vektori $\bar{k}$ on positiivisen $z-$ akselin suuntainen yksikkövektori (pituus on yksi).
- Jokainen tason vektori voidaan esittää yksikäsitteisesti vektoreiden $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ lineaarikombinaationa ja jokainen avaruuden vektori voidaan esittää yksikäsitteisesti vektoreiden $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ avulla.

Vektorin muodostaminen

Vektori $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1\right)\bar{i}+\left(y_2-y_1\right)\bar{j}+\left(z_2-z_1\right)\bar{k}$, kun $A=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ ja $B=\left(x_2,y_2,z_2\right)$

Vektorin pituus

Vektorin $\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ pituus $\left|\bar{a}\right|$ saadaan laskettua kaavalla $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Vektorin suuntainen yksikkövektori

Vektorin $\bar{a}$ suuntainen yksikkövektori $\bar{a}^{\mathrm{o}}=\dfrac{\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}$

Esim. 5.8. Olkoon $A=(-2,3,7)$ ja $B=(4,3,-1)$ **a)** Muodosta vektori $\bar{a}=\overline{AB}$ **b)** Laske vektorin $\bar{a}$ pituus. **c)** Muodosta vektorin $\bar{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen vektori $\bar{b}$, jonka pituus on 20.

Ratkaisu: **a)** Vektori $\bar{a}=\overline{AB}=(4-(-2))\bar{i}+(3-3)\bar{j}+(-1-7)\bar{k}=6\bar{i}-8\bar{k}$

b) Vektorin pituus $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{100}=10$

c) Vektori $\bar{b}$ $\quad \bar{b}=-20\overline{a^0}$

Vektorin $\bar{a}$ suuntainen yksikkövektori $\overline{a^0}=\dfrac{\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}=\dfrac{6\bar{i}-8\bar{j}}{10}=\dfrac{6\bar{i}}{10}-\dfrac{8\bar{k}}{10}=\dfrac{3}{5}\bar{i}-\dfrac{4}{5}\bar{k}$

Täten vektori $\bar{b}$ $\quad \bar{b}=-20\overline{a^0}=-20\left(\dfrac{3}{5}\bar{i}-\dfrac{4}{5}\bar{k}\right)=-4\bar{i}+16\bar{k}$

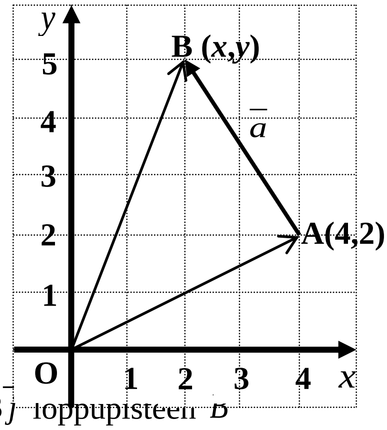
Vast. **a)** $\bar{a}=6\bar{i}-8\bar{k}$ **b)** $\left|\bar{a}\right|=10$ **c)** $\bar{b}=-4\bar{i}+16\bar{k}$

Paikkavektorin muodostaminen

Paikkavektori alkaa aina origosta O. Jos $A=(x,y,z)$, niin paikkavektori $\overrightarrow{OA}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$.

Esim. 5.9. Määritä vektorin $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}$ loppupiste, kun vektorin alkupiste on $A(4,2)$.

Ratkaisu: Olkoon vektorin $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}$ loppupiste $B(x,y)$,
jolloin sen paikkavektori $\overrightarrow{OB}$ on



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{OA}+\bar{a} \qquad \Big| \; \overrightarrow{OA}=4\bar{i}+2\bar{j} \text{ ja } \bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j} \\
&= 4\bar{i}+2\bar{j}+\left(-2\bar{i}+3\bar{j}\right) \\
&= 4\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{i}+3\bar{j} \\
&= 2\bar{i}+5\bar{j}
\end{aligned}
$$

Koska paikkavektori $\overrightarrow{OB}=2\bar{i}+5\bar{j}$, niin vektorin $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}$ loppupisteen B koordinaatit ovat $(2,5)$

Vast. Loppupisteen B koordinaatit ovat $(2,5)$.

Vektoreiden pistetulo eli skalaaritulo

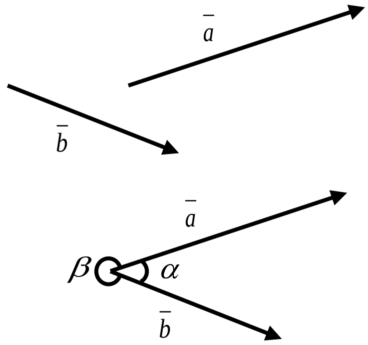
Vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen pistetulo merkitään $\bar{a}\bullet\bar{b}$. Pistetulon merkki näyttää kertomerkiltä, mutta vektoreita ei voi kertoa keskenään kuten lukuja kerrotaan.

Pistetulo määritellään kahdella eri tavalla

Tapa 1: $\bar{a}\bullet\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, jossa $\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$ ja $\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$

Tapa 2: $\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$, jossa $\cos(\bar{a},\bar{b})=$ vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma

Vektoreiden välinen kulma



Jos vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ siirretään alkamaan samasta pisteestä, syntyy kaksi kulmaa. Vektoreiden välinen kulma on näistä kulmista pienempi ja siksi kulma on välillä $\left[0^{\circ},180^{\circ}\right]$.

Vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma saadaan pistetulon kaavasta $\cos(\bar{a},\bar{b})=\dfrac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$, josta $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})=\cos^{-1}\dfrac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$.

Esim. 5.10. Laske pistetulo $\bar{a}\bullet\bar{b}$, kun **a)** $\bar{a}=2\bar{i}-4\bar{j}+\bar{k}$ ja $\bar{b}=-5\bar{i}+3\bar{j}+20\bar{k}$.

b) Vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma on 45° ja pituudet ovat $|\bar{a}|=2$ ja $|\bar{b}|=3\sqrt{2}$

Ratkaisu: **a)** $\bar{a}\bullet\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=2\cdot(-5)+(-4)\cdot3+1\cdot20=-10-12+20=-2$

b) $\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})=2\cdot3\sqrt{2}\cos45^{o}=2\cdot3\cancel{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}=6$

Vast. **a)** $\bar{a}\bullet\bar{b}=-22$ **b)** $\bar{a}\bullet\bar{b}=6$

Esim. 5.11. Laske vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma on, kun $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}$ ja $\bar{b}=-\bar{i}+3\bar{j}$

Ratkaisu: Pistetulon kaavasta $\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$ saadaan $\cos(\bar{a},\bar{b})=\dfrac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$, josta vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})=\cos^{-1}\dfrac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$.

Lasketaan ensin vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pituudet $|\bar{a}|$ ja $|\bar{b}|$ ja pistetulo.

Vektoreiden pituudet: $|\bar{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ja $|\bar{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

Pistetulo: $\bar{a}\bullet\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2=1\cdot(-1)+2\cdot3=-1+6=5$

Vektoreiden välinen kulma saadaan ratkaistua kaavasta $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$

$$\bar{a}\bullet\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$$

$$\cos(\bar{a},\bar{b})=\frac{\bar{a}\bullet\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

$$\cos(\bar{a},\bar{b})=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$$

$$\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})=\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=45^{o}$$

Vast. Vektoreiden välinen kulma on 45^{o}

Pistetulon laskulait

$\bar{a}\bullet\bar{b}=\bar{b}\bullet\bar{a}$	vaihdantalaki
$\bar{a}\bullet\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\bullet\bar{b}+\bar{a}\bullet\bar{c}$	osittelulaki
$\bar{a}\bullet\left(t\bar{b}\right)=t\left(\bar{a}\bullet\bar{b}\right)$	skalaarin siirtosääntö

Esim. 5.12. Laske $\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\bullet\left(2\bar{a}+5\bar{b}\right)$, kun $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})=60^{o}$ ja $\left|\bar{a}\right|=4$ ja $\left|\bar{b}\right|=10$.

Ratkaisu:

$$\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\bullet\left(2\bar{a}+5\bar{b}\right)=\left(\bar{a}\right)\bullet\left(2\bar{a}\right)+\left(\bar{a}\right)\bullet\left(5\bar{b}\right)+\left(3\bar{b}\right)\bullet\left(2\bar{a}\right)+\left(3\bar{b}\right)\bullet\left(5\bar{b}\right)$$

$$=2\left(\bar{a}\bullet\bar{a}\right)+5\left(\bar{a}\bullet\bar{b}\right)+3\cdot2\left(\bar{b}\bullet\bar{a}\right)+3\cdot5\left(\bar{b}\bullet\bar{b}\right)$$

$$=2\left|\bar{a}\right|\left|\bar{a}\right|\cos 0^{o}+5\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos 60^{o}+6\left|\bar{b}\right|\left|\bar{a}\right|\cos 60^{o}+15\left|\bar{b}\right|\left|\bar{b}\right|\cos 0^{o}$$

$$=2\cdot4\cdot4\cdot1+5\cdot4\cdot10\cdot\frac{1}{2}+6\cdot10\cdot4\cdot\frac{1}{2}+15\cdot10\cdot10\cdot1=1752$$

Vektorin pituus pistetulon avulla

Vektorin $\bar{a}$ pituus $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\bar{a}\bullet\bar{a}}$, koska pistetulon määritelmästä $\bar{a}\bullet\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos(\bar{a},\bar{b})$ seuraa, että $\bar{a}\bullet\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{a}\right|\cos(\bar{a},\bar{a})=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{a}\right|\underbrace{\cos 0^{o}}_{=1}=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{a}\right|=\left|\bar{a}\right|^{2}$, josta edelleen saadaan $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\bar{a}\bullet\bar{a}}$.

Pistetulolle $\bar{a}\bullet\bar{a}$ käytetään myös merkintää $\bar{a}^{\,2}$, jolloin saadaan $\bar{a}^{\,2}=\left|\bar{a}\right|^{2}$.

Esim. 5.13. Laske pituus $\left|2\bar{a}+3\bar{b}\right|$, kun $\left|\bar{a}\right|=3$ ja $\left|\bar{b}\right|=5$ sekä vektoreiden välinen kulma on 60°.

Ratkaisu:

$$\left|2\bar{a}+3\bar{b}\right|=\sqrt{\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)\bullet\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)}=\sqrt{\left(2\bar{a}\right)\bullet\left(2\bar{a}\right)+\left(2\bar{a}\right)\bullet\left(3\bar{b}\right)+\left(2\bar{a}\right)\bullet\left(3\bar{b}\right)+\left(3\bar{b}\right)\bullet\left(3\bar{b}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(2\bar{a}\right)\bullet\left(2\bar{a}\right)+\left(2\bar{a}\right)\bullet\left(3\bar{b}\right)+\left(2\bar{a}\right)\bullet\left(3\bar{b}\right)+\left(3\bar{b}\right)\bullet\left(3\bar{b}\right)} \qquad \left\|\,\bar{b}\bullet\bar{a}=\bar{a}\bullet\bar{b}\right.$$

$$=\sqrt{\left(2\bar{a}\right)^{2}+12\left(\bar{a}\bullet\bar{b}\right)+\left(3\bar{b}\right)^{2}}=\sqrt{4\bar{a}^{\,2}+12\cdot\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos 60^{o}+9\bar{b}^{\,2}} \qquad \left\|\,\cos 60^{o}=\frac{1}{2}\right.$$

$$=\sqrt{4\cdot3^{2}+12\cdot3\cdot5\cdot\frac{1}{2}+9\cdot5^{2}}=\sqrt{351}=\sqrt{9\cdot39}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{39}=3\sqrt{39}$$

Vast. $\left|2\bar{a}+3\bar{b}\right|=3\sqrt{39}$

Vektoreiden kohtisuoruusehto

Vektorin pistetulon määritelmästä $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\overline{a},\overline{b})$ saadaan suoraan vektoreiden kohtisuoruusehto, sillä $\cos(\overline{a},\overline{b})=0$, jos $\sphericalangle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=90^{\circ}$

$\overline{a}\perp\overline{b}$ täsmälleen silloin, kun $\overline{a}\bullet\overline{b}=0$

Esim. 5.14. Millä t:n arvolla vektorit $\overline{a}=3\overline{i}+2\overline{j}$ ja $\overline{b}=-4+5t\overline{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Ratkaisu: Vektorit $\overline{a}=3\overline{i}+2\overline{j}$ ja $\overline{b}=-4\overline{i}+5t\overline{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos $\overline{a}\bullet\overline{b}=0$.

Pistetulon $\overline{a}\bullet\overline{b}=3\cdot(-4)+2\cdot 5t=-12+10t$ pitää olla nolla, jolloin saadaan yhtälö

$$-12+10t=0$$

$$10t=12 \qquad \|:10$$

$$t=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

Vast. Vektorit ovat kohtisuorassa, kun $t=\frac{6}{5}$

ClassPad

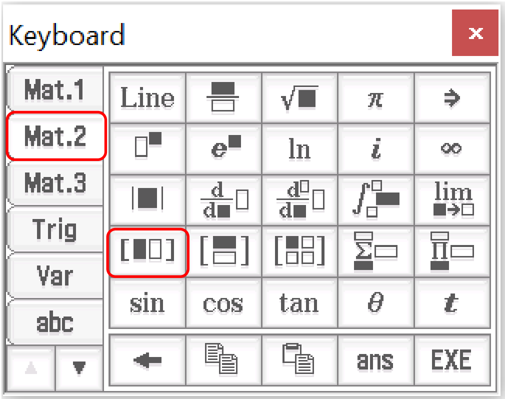
ClassPad II Manager käsittelee vektoreita vaaka- tai pystymatriiseina. Esimerkiksi

vaakamatriisi $\begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}$ tarkoittaa vektoria $3\bar{i} - 4\bar{j}$

vaakamatriisi $\begin{bmatrix} -2 & 7 \end{bmatrix}$ tarkoittaa vektoria $-2\bar{i} + 7\bar{j}$

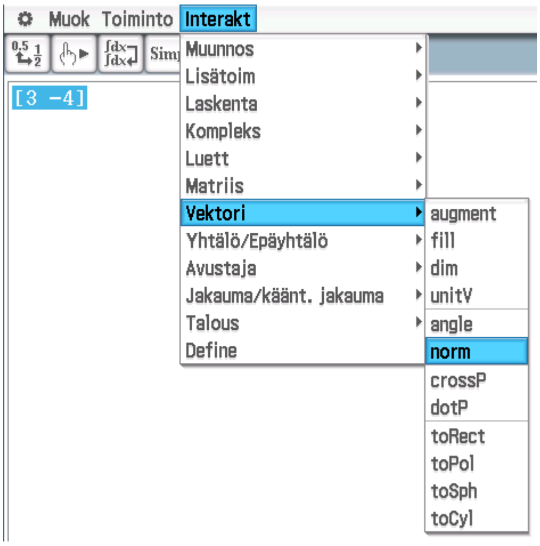
1. Avaa virtuaalinäppäimistö ja välilehti Mat.2

Lasketaan vektorin pituus.

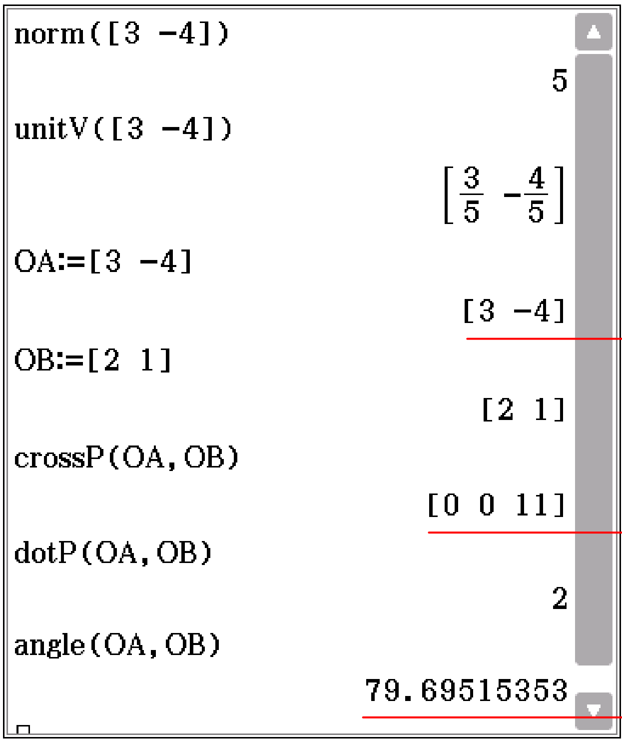


2. Kirjoita vektori $\begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}$ ja maalaa se.

Interakt. valikko => Vektori => norm



Vastaavasti saadaan muutkin vektoreihin liittyvät laskutoimitukset. Vektoreilla laskemista helpottaa niiden nimeäminen.



norm	= normi, pituus
unitV	= yksikkövektori
crossP	= ristitulo
dotP	= pistetulo
angle	= vektorien välinen kulma

Nopein tapa nimetä vektori on kirjoittaa vektorin nimen perään :=

Voit käyttää kahden vektorin laskutoimituksissa suoraan Interaktiivista valikkoa ilman valintoja. Kokeile!

Käytä vektorien välisessä kulmassa likiarvoja (desim.) ja asteita.

Esim. 5.15. Laske laskimella mihin pisteeseen päädytään, kun pisteestä $A=(3,-1)$ siirrytään vektorin $\bar{a}=-3\bar{i}+4\bar{j}$ suuntaan 10 pituusyksikköä?

Ratkaisu:

Vast. Päädytään pisteeseen $(-3,7)$.

Huomautus: Jos klikkaat merkkiä kahdesti, niin lisää ulottuvuuksia ja voit kirjoittaa esimerkiksi avaruusvektorin $\bar{a}=2\bar{i}+5\bar{j}+\bar{k}$.

5.7. Pallo

Pallon, kuten ympyränkin, yhtälö voidaan esittää joko keskipistemuodossa tai normaalimuodossa.

- Pallon yhtälö keskipistemuodossa

  $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$, jossa $(x_0, y_0$ ja $z_0)$ on pallon keskipiste ja r on säde.

- Pallon yhtälö normaalimuodossa

  $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, jossa $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

Esim. 5.15. Mikä on pallon $x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+12=0$ keskipiste ja säde?

Ratkaisu: Järjestään termit niin, että samat muuttujat ovat vierekkäin

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+12=0$$
$$x^2-4x+y^2+2y+z^2-8z=-12$$

Täydennetään neliöksi

$$x^2 \quad -4x \qquad +y^2 \quad +2y \qquad +z^2 \quad -8z \qquad =-12$$
$$(x)^2+2\cdot x\cdot(-2)+(-2)^2+(y)^2+2\cdot y\cdot 1+(1)^2+(z)^2+2\cdot z\cdot(-4)+(-4)^2=-12+(-2)^2+(1)^2+(-4)^2$$
$$(x-2)^2 \quad + \quad (y+1)^2 \quad + \quad (z-4)^2 \quad =-12+4+1+16$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=9.$$

Vast. Keskipiste on $(2,-1,4)$ ja säde $r=\sqrt{9}=3$

5.8. Avaruussuoran yhtälöt

Suoran suuntavektori

Suoran l suuntavektoriksi $\bar{s} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ käy mikä tahansa vektori, joka on muodostettu kyseisen suoran l kahden pisteen avulla.

Suoran suuntavektori $\bar{s} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$, kun $A = (x_1, y_1, z_1)$ ja $B = (x_2, y_2, z_2)$.

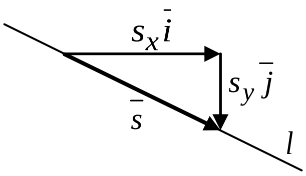
esim. Suoran, joka kulkee pisteiden $A(4,3,-2)$ ja $B(5,-6,1)$ kautta, eräs suuntavektori on

$$\bar{s} = (5-4)\bar{i} + (-6-3)\bar{j} + (1-(-2))\bar{k} = \bar{i} - 9\bar{j} + 3\bar{k}$$

Suuntavektorin $\bar{s}$ ja suoran kulmakertoimen *k* välinen riippuvuus tasossa

Olkoon suoran l suuntavektorina $\bar{s} = s_x\bar{i} + s_y\bar{j}$ ($s_x \neq 0$).

Tällöin suoran l kulmakerroin k saadaan yhtälöstä $k = \dfrac{s_y}{s_x}$.



Esim. 5.16. Määritä suoran kulmakerroin, kun suoran suuntavektori on $\bar{s} = -3\bar{i} + 12\bar{j}$.

Ratkaisu: Koska suuntavektorina on $\bar{s} = -3\bar{i} + 12\bar{j}$, niin silloin $s_x = -3$ ja $s_y = 12$

Näin kulmakertoimeksi saadaan $k = \dfrac{s_y}{s_x} = \dfrac{12}{-3} = -4$

Vast. Suoran kulmakerroin $k = -4$.

Esim. 5.17. Määritä suoran suuntavektori $\bar{s}$, kun suoran kulmakerroin $k = 2$.

Ratkaisu: Jos suoran suuntavektori, niin silloin suoran kulmakerroin $k = \dfrac{s_y}{s_x}$.

Tiedämme nyt, että suoran kulmakerroin $k = 2 = \dfrac{2}{1}$ ja toisaalta $k = \dfrac{s_y}{s_x}$.

Näin ollen suoran suuntavektoriksi käy vektori $\bar{s} = \bar{i} + 2\bar{j}$.

Huomautus: Jos suoran kulmakerroin on *k*, niin silloin suoran suuntavektoriksi käy $\bar{s} = \bar{i} + k\bar{j}$.

Suoran normaalivektori tasossa

Suoran l normaalivektoriksi $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j}$ käy mikä tahansa vektori, joka on kohtisuorassa suoraa l vastaan. Koska suoran l suuntavektori $\overline{s} = s_x\overline{i} + s_y\overline{j}$ on yhdensuuntainen suoran l kanssa, niin suoran normaalivektori on kohtisuorassa myös suoran suuntavektorin kanssa.

Kohtisuoruusehdon mukaan $\overline{s} \bullet \overline{n} = 0$. Näin, jos suoran l suuntavektori $\overline{s} = s_x\overline{i} + s_y\overline{j}$, niin silloin suoran l normaalivektoriksi käy esimerkiksi vektorit $\overline{n} = s_y\overline{i} - s_x\overline{j}$ tai $\overline{n} = -s_y\overline{i} + s_x\overline{j}$ sillä

$$\overline{s} \bullet \overline{n} = s_x \cdot s_y + s_y \cdot (-s_x) = s_x s_y - s_x s_y = 0$$

$$\overline{s} \bullet \overline{n} = s_x \cdot (-s_y) + s_y \cdot s_x = -s_x s_y + s_x s_y = 0$$

Esim. 5.18. Määritä suoran $10x - 2y + 6 = 0$ suuntavektori $\overline{s}$ ja normaalivektori $\overline{n}$.

Ratkaisu: Suoran yhtälön ratkaistu muoto $10x - 2y + 6 = 0$, josta $y = 5x + 3$.

Suoran kulmakerroin $k = 5$ ja näin suoran suuntavektoriksi käy vektori $\overline{s} = \overline{i} + 5\overline{j}$.

Täten normaalivektoriksi käy esimerkiksi vektorit

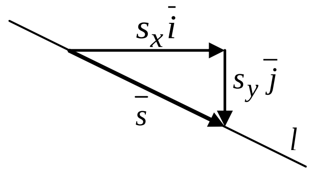
$\overline{n} = -5\overline{i} + \overline{j}$, koska $\overline{s} \bullet \overline{n} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 = -5 + 5 = 0$

$\overline{n} = 5\overline{i} - \overline{j}$, koska $\overline{s} \bullet \overline{n} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) = 5 - 5 = 0$

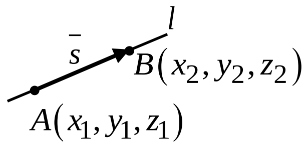
Vast. Normaalivektoreiksi käyvät vektorit $\overline{n} = -5\overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{n} = 5\overline{i} - \overline{j}$ (vastavektoreita keskenään).

Yhteenveto suoran suuntavektorista $\bar{s}$ ja normaalivektorista $\bar{n}$

Suoran yhtälö	$ax+by+c=0$	$y=kx+b$
suuntavektori	$\bar{s}=b\bar{i}-a\bar{j}$	$\bar{s}=\bar{i}+k\bar{j}$
normaalivektori	$\bar{n}=a\bar{i}+b\bar{j}$	$\bar{n}=-k\bar{i}+\bar{j}$



$\bar{s}=s_x\bar{i}+s_y\bar{j}$, jolloin $k=\dfrac{s_y}{s_x}$



$\bar{s}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k}$

Suoran vektorimuotoinen yhtälö

Suoran vektorimuotoinen yhtälö on muotoa:

vektori = paikkavektori + $t\cdot$ suoran suuntavektori

$\bar{r}=\bar{r}_0+t\cdot\bar{s}$

Suoran parametrimuotoinen esitys

Jos suora kulkee pisteen $P(x_0,y_0,z_0)$ kautta ja suoran suuntavektori $\bar{s}=a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$, niin suoran yhtälö voidaan esittää parametrimuodossa seuraavasti:

$$\begin{cases} x=\text{suoran pisteen } x-\text{koordinaatti } + \ t\cdot\text{suuntavektorin } \bar{i}\text{:n kerroin}=x_0+at \\ y=\text{suoran pisteen } y-\text{koordinaatti } + \ t\cdot\text{suuntavektorin } \bar{j}\text{:n kerroin}=y_0+bt \\ z=\text{suoran pisteen } z-\text{koordinaatti } + \ t\cdot\text{suuntavektorin } \bar{k}\text{:n kerroin}=z_0+ct \end{cases}$$

Suoran koordinaattimuotoinen esitys

Jos suora kulkee pisteen $P(x_0,y_0,z_0)$ kautta ja suoran suuntavektori $\bar{s}=a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$, niin suoran yhtälö voidaan esittää koordinaattimuodossa seuraavasti:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Esim. 5.19. Suora kulkee pisteiden $A(3,-1,2)$ ja $B(-2,3,1)$ kautta. Muodosta suoran yhtälö **a)** vektorimuodossa **b)** parametrimuodossa **c)** koordinaattimuodossa.

Ratkaisu: Suoran suuntavektoriksi käy $\bar{s}=(-2-3)\bar{i}+(3-(-1))\bar{j}+(1-2)\bar{k}=-5\bar{i}+4\bar{j}-\bar{k}$

Paikkavektoriksi voidaan valita joko $\overrightarrow{OA}$ tai $\overrightarrow{OB}$, missä O on origo. Valitaan paikkavektoriksi $\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OA}=\bar{r}_0=(3-0)\bar{i}+(-1-0)\bar{j}+(2-0)\bar{k}=3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ (Lasku on turhaan näkyvissä!)

a) Suoran yhtälö vektorimuodossa $\bar{r}=\bar{r}_0+t\cdot\bar{s}=\underbrace{3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}}_{=\bar{r}_0}+t(\underbrace{-5\bar{i}+4\bar{j}-\bar{k}}_{=\bar{s}})$

b) Suoran yhtälö parametrimuodossa $\begin{cases}x=3-5t\\ y=-1+4t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=2-t\end{cases}$

c) Suoran yhtälö koordinaattimuodossa $\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-(-1)}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$

Esim. 5.20. Tutki leikkaavatko suorat *l* ja *m*, kun suora *l* kulkee pisteiden $A(1,0,3)$ ja $B(-2,4,5)$ ja suora m pisteiden $C(-2,-1,4)$ ja $D(-1,-4,3)$ kautta. Jos suorat leikkaavat, niin ilmoita myös suorien leikkauspisteen koordinaatit.

Ratkaisu: Muodostetaan ensin suorien *l* ja *m* suuntavektorit, joiden avulla voidaan kirjoittaa suorien parametriesitykset.

Suora *l*: suuntavektori $\bar{s}_l=\overline{AB}=(-2-1)\bar{i}+(4-0)\bar{j}+(5-3)\bar{k}=-3\bar{i}+4\bar{j}+2\bar{k}$

Suora *m*: suuntavektori $\bar{s}_m=\overline{CD}=(-1-(-2))\bar{i}+(-4-(-1))\bar{j}+(3-4)\bar{k}=\bar{i}-3\bar{j}-\bar{k}$

Täten suorien parametriesitykset

$$l:\begin{cases}x=1-3t\\ y=4t\\ z=3+2t\end{cases}\qquad m:\begin{cases}x=-2+s\\ y=-1-3s\\ z=4-s\end{cases}$$

Suorien mahdollisessa leikkauspisteessä koordinaatit ovat yhtä suuria, jolloin saadaan edellä oleva yhtälöryhmällä. Jos yhtälöryhmällä on ratkaisu, niin suorat leikkaavat toisensa.

$$\begin{cases} 1-3t=-2+s \\ 4t=-1-3s \\ 3+2t=4-s \end{cases}, \text{ josta laskimella saadaan } s=-3 \text{ ja } t=2$$

Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, niin suorat leikkaavat toisensa.

Leikkauspiste saadaan selville joko sijoittamalla $s=-3$ suoran *m* parametriesitykseen tai $t=2$ suoran *l* parametriesitykseen.

Sijoitetaan $t=2$ suoran *l* parametriesitykseen. Tällöin saadaan leikkauspisteen koordinaateiksi:

$$l\colon \begin{cases} x=1-3t=1-3\cdot 2=-5 \\ y=4t=4\cdot 2=8 \\ z=3+2t=3+2\cdot 2=7 \end{cases}$$

Vast. Suorat leikkaavat pisteessä $(-5,8,7)$

5.9. Avaruustason yhtälöt

Tason vektorimuotoinen yhtälö

Olkoon $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ tason T suuntavektoreita. Nyt tason T vektorimuotoinen yhtälö on

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{u} + s\overline{v}$$

Tason koordinaattimuotoinen yhtälö

Olkoon tason normaalivektori $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$, jolloin tason koordinaattimuotoinen yhtälö on

$$ax + by + cz + d = 0$$

Tason yhtälö parametrimuodossa

Olkoon tason T yksi piste $P(x_0, y_0, z_0)$ ja tason suuntavektorit $\overline{u} = u_x\overline{i} + u_y\overline{j} + u_z\overline{k}$ ja $\overline{v} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}$, niin silloin tason T yhtälö parametrimuodossa on

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_x s + v_y t \\ z = z_0 + z_x s + z_x t \end{cases}, \text{ jossa } s, t \in \mathbb{R}$$

Esim. 5.21. Taso kulkee pisteiden $A(0,3,-2)$, $B(2,-1,1)$ ja $C(1,2,-3)$ kautta. Esitä tason yhtälö **a)** vektorimuodossa **b)** parametrimuodossa.

Ratkaisu: Tason suuntavektoreiksi käyvät esimerkit vektorit

$$\overline{u} = \overline{AB} = (2-0)\overline{i} + (-1-3)\overline{j} + (1-(-2))\overline{k} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}$$

$$\overline{v} = \overline{AC} = (1-0)\overline{i} + (2-3)\overline{j} + (-3-(-2))\overline{k} = \overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$$

Tason paikkavektoriksi käy esimerkiksi vektori $\overline{r_0} = \overline{OA} = 3\overline{j} - 2\overline{k}$

a) Tason yhtälö vektorimuodossa $\overline{r} = 3\overline{j} - 2\overline{k} + t\left(2\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}\right) + s\left(\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}\right)$

b) Tason yhtälö parametrimuodossa $\begin{cases} x = 2s + t \\ y = 3 - 4s - t \\ z = -2 + 3s - t \end{cases}$, jossa $s, t \in \mathbb{R}$

Esim. 5.22. Taso kulkee pisteen $A(3,-1,-4)$ kautta. Esitä tason yhtälö koordinaattimuodossa, kun tason normaalivektori $\bar{n}=-2\bar{i}+5\bar{j}-7\bar{k}$ vektorimuodossa.

Ratkaisu: Koska tason normaalivektori $\bar{n}=-2\bar{i}+5\bar{j}-7\bar{k}$, niin silloin $a=-2,\ b=5$ ja $c=-7$.
Tason koordinaattimuotoinen yhtälö on

$$-2x+5y-7z+d=0$$

Ratkaistaan vielä d sijoittamalla yhtälöön $-2x+5y-7z+d=0$ tason piste $A(3,-1,-4)$, jolloin saadaan

$$-2\cdot 3+5\cdot(-1)-7\cdot(-4)+d=0$$

$$-6-5+28+d=0$$

$$d=-17$$

Vast. Tason yhtälö koordinaattimuodossa $-2x+5y-7z-17=0$

Esim. 5.23 Missä pisteessä suora $x=3-t,\ y=-2+4t$ ja $z=10+2t$ leikkaa $xy-$ tason?

Ratkaisu: Suora leikkaa $xy-$ tason, kun $z=0$.
Merkitään suoran yhtälössä $z=0$ ja ratkaistaan *t*.

$$z=10+2t=0\text{, josta } t=-5$$

Sijoitetaan $t=-5$ suoran yhtälöön, jolloin saadaan leikkauspisteen
x ja *y* – koordinaatit. joka kulkee pisteen kautta tai jotain sellaista soveltavaa…

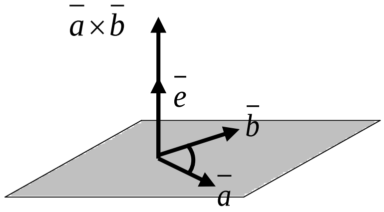
$$x=x=3-t=3-(-5)=8$$

$$y=-2+4t=-2+4\cdot(-5)=-22$$

Vast. Suora leikkaa *xy* – tason pisteessä $(8,-22,0)$.

5.10. Ristitulo eli vektoritulo

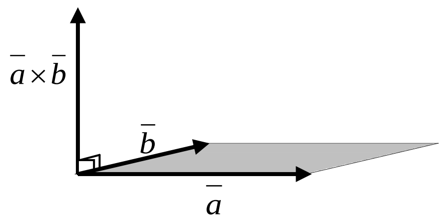
Ristitulo tarkoittaa vektoria $\overline{a}\times\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\sin(\overline{a},\overline{b})\overline{e}$.



- Merkintä $\overline{a}\times\overline{b}$ luetaan ”a risti b”
- Vektori $\overline{e}$ yksikkövektori, joka on vektoreita $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ vastaan kohtisuorassa.
- Vektorit $\overline{a},\overline{b}$ ja $\overline{e}$ muodostavat tässä järjestyksessä niin sanotun oikean käden järjestelmän, josta seuraa

$$\overline{a}\times\overline{b}=-(\overline{b}\times\overline{a})$$

- Vektorin $\overline{a}\times\overline{b}$ pituus $|\overline{a}\times\overline{b}|=$ suunnikkaan pinta-ala.



- Ristitulo $\overline{a}\times\overline{b}$, jossa $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$ ja $\overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}$ saadaan helposti kolmirivisen determinantin (taulukkokirja s. 19) avulla seuraavasti

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\overline{k}\text{, josta esim.}$$

kaksirivinen determinantti $\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}=a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y$

Esim. 5.24. Muodosta vektori $\bar{a}\times\bar{b}$, kun $\bar{a}=3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ ja $\bar{b}=-4\bar{i}+5\bar{j}+6\bar{k}$

Ratkaisu:
$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & 2\\ -4 & 5 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 6\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}3 & 2\\ -4 & 6\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ -4 & 5\end{vmatrix}\bar{k}$$

$$=(-1\cdot 6-2\cdot 5)\bar{i}-(3\cdot 6-2\cdot(-4))\bar{j}+(3\cdot 5-(-1)\cdot(-4))\bar{k}$$

$$=-16\bar{i}-26\bar{j}-11\bar{k}$$

Vast. $\bar{a}\times\bar{b}=-16\bar{i}-26\bar{j}+11\bar{k}$

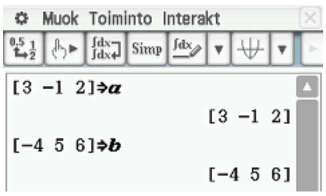
ClassPadilla:

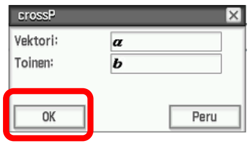
1. Talleta muistiin vektorit (myös a:=)

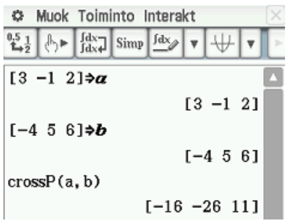
2. Valitse Interakt, Vektori ja crossP

3. Täytä kuten alla ja valitse OK

4. Vastaus $\bar{a}\times\bar{b}=-16\bar{i}-26\bar{j}+11\bar{k}$







Esim. 5.25. Laske kolmion ABC pinta-ala, kun $A(1,-2,4)$, $B(2,-1,3)$ ja $C(8,0,-2)$.

Ratkaisu: Lasketaan ensin vektoreiden $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ muodostaman suunnikkaan pinta-ala, joka on kaksinkertainen kysytyn kolmion pinta-alaan verrattuna.

Vektori $\overline{AB}=(2-1)\bar{i}+(-1-(-2))\bar{j}+(3-4)\bar{k}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$

$\overline{AC}=(8-1)\bar{i}+(0-(-2))\bar{j}+(-2-4)\bar{k}=7\bar{i}+2\bar{j}-6\bar{k}$

Ristitulo
$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 7 & 2 & -6\end{vmatrix}=-4\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$$

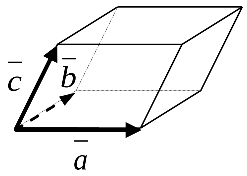
Suunnikkaan pinta-ala $|\overline{AB}\times\overline{AC}|=|-4\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}|=\sqrt{42}$

Vast. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}\sqrt{42}$.

5.11. Skalaarikolmitulo

Skalaarikolmitulo $\bar{a}\times\bar{b}\bullet\bar{c}=|\bar{a}\times\bar{b}||\bar{c}|\cos\alpha$, jossa α on vektoreiden $\bar{a}\times\bar{b}$ ja $\bar{c}$ välinen kulma.

- Kun vektorit $\bar{a},\bar{b}$ ja $\bar{c}$ alkavat samasta pisteestä, niin niiden määräämän suuntaissärmiön tilavuus V
  $V=|\bar{a}\times\bar{b}\bullet\bar{c}|$



- Jos $\bar{a}\times\bar{b}\bullet\bar{c}=0$, niin silloin vektoreiden määräämän suuntaissärmiön tilavuus on myös 0 ja siksi vektorit $\bar{a},\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat samassa tasossa.
- Skalaarikolmitulo $\bar{a}\times\bar{b}\bullet\bar{c}=0$ saadaan helposti kolmirivisen determinantin avulla seuraavasti

Olkoon $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$ ja $\bar{c}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}$.

Tällöin $\bar{a}\times\bar{b}\bullet\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

Esim. 5.26. Laske skalaarikolmitulo $\bar{a}\times\bar{b}\bullet\bar{c}$, kun $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=4\bar{j}+5\bar{k}$ ja $\bar{c}=8\bar{i}+5\bar{j}$.

Ratkaisu: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\cdot 2-\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}\cdot 1+\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}\cdot 3=-25\cdot 2-(-40)\cdot 1+(-32)\cdot 3=-106$

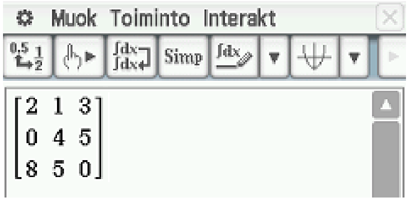
Vast. $\bar{a}\times\bar{b}\bullet\bar{c}=-106$

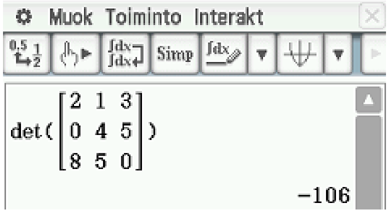
ClassPadilla:

1. Kirjoita 3×3 - matriisi

2. Maalaa ja valitse Interakt, Matriis, Laskenta ja det

3. Vastaus $\bar{a}\times\bar{b}\bullet\bar{c}=-106$

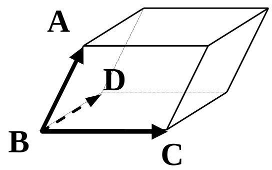




Esim. 5.27. Laske pisteen $A(2,6,-4)$ etäisyys tasosta $4x-8y-z-3=0$.

Ratkaisu: Esimerkiksi pisteet $B(3,1,1)$, $C(-2,0,-11)$ ja $D(10,5,-3)$ ovat ko. tasolla, koska ne toteuttavat tason yhtälön (esim. piste B: $4\cdot 3-8\cdot 1-1-3=0$)

Muodostetaan vektorit $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ ja $\overline{BD}$ ja siirretään ne alkamaan samasta pisteestä, jolloin ne määräävät suuntaissärmiön. Lasketaan suuntaissärmiön korkeus *h*, joka on sama kuin pisteen $A(2,6,-4)$ etäisyys pisteiden $B(3,1,1)$, $C(-2,0,-11)$ ja $D(10,5,-3)$ määräämästä tasosta



$$\overline{BA}=(2-3)\bar{i}+(6-1)\bar{j}+(-4-1)\bar{k}=-\bar{i}+5\bar{j}-5\bar{k}$$

$$\overline{BC}=-5\bar{i}-\bar{j}-12\bar{k}$$

$$\overline{BD}=7\bar{i}+4\bar{j}-4\bar{k}$$

Suuntaissärmiön tilavuus $V=A_p h$, josta $h=\dfrac{V}{A_p}$.

Toisaalta suuntaissärmiön tilavuus $V=\left|\overline{BC}\times\overline{BD}\bullet\overline{BA}\right|$

ja suuntaissärmiön pohjan pinta-ala $A_p=\left|\overline{BC}\times\overline{BD}\right|$ $A_p=\left|\overline{BC}\times\overline{BD}\right|$

$$\overline{BC}\times\overline{BD}\bullet\overline{BA}=\begin{vmatrix} -5 & -1 & -12 \\ 7 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & -5 \end{vmatrix}=-507\text{, josta tilavuus } V=\left|-507\right|=507$$

$$\overline{BC}\times\overline{BD}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & -1 & -12 \\ 7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=52\bar{i}-104\bar{j}-13\bar{k}\text{ , josta pohjan pinta-ala } A_p$$

$$A_p=\left|\overline{BC}\times\overline{BD}\right|=\left|52\bar{i}-104\bar{j}-13\bar{k}\right|=117$$

Tällöin suuntaissärmiön korkeus eli pisteen etäisyys tasosta

$$h=\frac{V}{A_p}=\frac{507}{117}=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}\quad h=\frac{V}{A_p}=\frac{507}{117}=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$$

Vast. Etäisyys tasosta on $\frac{13}{3}$.

M5 Kurssi, alkuosan tehtävät

Tehtävissä 5.1 – 5.6 ei saa käyttää laskinta.

5.1. Olkoon $A=(-1,1),\ B=(3,-2)$, $C=(2,-1,-5)$ ja $D=(2,3,-2)$

a) Muodosta vektori $\overrightarrow{AB}$

b) Laske vektorin $\overrightarrow{AB}$ pituus

c) Muodosta paikkavektori $\overrightarrow{OC}$.

d) Muodosta vektori, joka on 10 pituusyksikköä pitkä ja vastakkaissuuntainen vektorin $\overrightarrow{DC}$ kanssa.

5.2. a) Mikä on suoran $\bar{r}=2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}+t(-5\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$ suuntavektori $\bar{s}$?

b) Mikä on suoran $2x-y+4=0$ normaalivektori $\bar{n}$?

c) Kulkeeko suora $\begin{cases} x=4+3t \\ y=1-t \\ z=-3+2t \end{cases}$ pisteen $A(7,0,1)$ kautta?

d) Mikä on tason $5x-y+2z+4=0$ normaalivektori?

e) Onko piste $A(-1,3,2)$ tasolla $-x+2y-3z-1=0$?

f) Ovatko vektorit $\bar{a}=8\bar{i}-4\bar{j}+2\bar{k}$ ja $\bar{b}=-4\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$ yhdensuuntaisia?

5.3. a) Laske $\bar{a}\bullet\bar{b}$, kun $|\bar{a}|=\sqrt{3},\ |\bar{b}|=\sqrt{6}$ ja $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})=30^{0}$

b) Millä vakion t arvoilla vektorit $\bar{a}=t\bar{i}+3t\bar{j}+\bar{k}$ ja $\bar{b}=2t\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

c) Tason normaalivektori $\bar{n}=2\bar{i}-5\bar{j}+3\bar{k}$ ja se kulkee pisteen $A(1,0,-2)$ kautta. Kulkeeko taso pisteen $B(2,-1,5)$ kautta?

5.4. Jaa vektori $3\bar{a}+8\bar{b}$ vektoreiden $3\bar{a}+\bar{b}$ ja $\bar{a}-2\bar{b}$ suuntaisiin komponentteihin, kun $\bar{a}\nparallel\bar{b}$.

5.5. Olkoon kolmiossa ABC sivu $AB=\bar{a}$ ja $BC=\bar{b}$. Ilmoita jana ED vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla, kun piste D jakaa sivun AB suhteessa $2:5$ ja piste E jakaa sivun BC suhteessa $1:3$.

5.6. Mikä on pallon $x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z-5=0$ keskipiste ja säde?

M5 Kurssi, loppuosan tehtävät

Tehtävissä 5.7 – 5.15 saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa. (Katso kaikki ratkaisut)

5.7. a) Laske pisteen $A(2,0,-3)$ etäisyys tasosta $3x-y-5z-2=0$. (2p)
(tiedosto, video)

b) Laske pisteen $A(3,-6)$ etäisyys suorasta $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-4}{2}$. (4p)
(tiedosto, video)

5.8. Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset. Olkoon $\bar{a}=\frac{3}{2}\bar{i}-2\bar{j}$ ja olkoon vektorin $\bar{b}$ pituus 5. Määritä $\bar{b}$.
(tiedosto, video)

5.9. Origosta O alkava vektori $\overline{OP}$ on vektorin $3\bar{i}+\bar{j}$ suuntainen, ja sen kärki P on pisteiden $A=(1,2)$ ja $B=(7,1)$ yhdysjanalla. Missä suhteessa piste jakaa janan AB?
(S04/4) (tiedosto, video)

5.10. a) Laske pisteen *A=(4,8,1)* etäisyys suorasta BC, kun $B=(3,2,2)$ ja $C=(6,0,3)$.
(tiedosto, video)

b) Ovatko pisteet $A(0,2,1), B(2,1,5), C(4,-1,0)$ ja $D(2,3,-4)$ samassa tasossa?
(tiedosto, video)

5.11. Laske kolmion ABC painopiste, kun $A(-1,0,2)$, $B(2,3,5)$ ja $C(4,6,8)$.
(tiedosto, video)

5.12. Taso $x+2y+3z=6$ leikkaa positiiviset koordinaattiakselit pisteissä A, B ja C.

a) Määritä sen tetraedrin tilavuus, jonka kärjet ovat origossa O sekä pisteissä A, B ja C.

b) Määritä kolmion ABC pinta-ala.

(K14 / 9) (tiedosto, video)

5.13. Määritä normaalivektori tasolle, joka sisältää pisteen $(1,1,1)$ ja suoran $x=1+t$, $y=2+2t$ ja $z=3+3t,\ t\in\mathbb{R}$. (K02/11)
(tiedosto, video)

5.14. Todista lause ”Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora”.
(tiedosto, video)

5.15. Kappaleet K_1 ja K_2. liikkuvat avaruudessa suoraa rataa pitkin tasaisella nopeudella.

Hetkellä $t=0\,s$ kappale K_1 on pisteessä $A(1,2,3)$ ja kappale K_2 on pisteessä $B(3,4,0)$ ja hetkellä $t=1\,s$ kappale K_1 on pisteessä $C(3,2,4)$ ja kappale K_2 on pisteessä $D(5,3,3)$.

Leikkaavatko kappaleiden K_1 ja K_2 radat toisensa ja jos leikkaavat, niin määritä tämä leikkauspiste?
(tiedosto, video)

M6 Todennäköisyys ja tilastot

6.1. Tilastojen peruskäsitteet

Havaintoaineisto koostuu tilastoyksiköistä (havaintoyksiköistä), joihin liittyy muuttuja. Esimerkiksi opetusryhmän opiskelijoiden arvosanojen tutkimuksessa opiskelija on tilastoyksikkö ja arvosana on muuttuja.

Perusjoukolla (populaatiolla) tarkoitetaan kaikkia tilastoyksikköjä. Esimerkiksi kaikkien lukiolaisten äidinkielen päättöarvosanaa vuonna 2017. Tällöin käytössä olisi kokonaisaineisto. Yleensä perusjoukon tutkiminen tulee liian kalliiksi ja siksi perusjoukosta tutkitaan vain otosta (saatu satunnaisesti jollakin otantamenetelmällä) tai näytettä (valittuna tietyn lukion opiskelijat).

Muuttujat voidaan jakaa diskreetteihin eli epäjatkuviin ja jatkuviin muuttujiin.
Diskreetti muuttuja voi saada vain tiettyjä arvoja (matematiikan kurssiarvosana tai kengännumero).
Jatkuva muuttuja voi saada mitä arvoja tahansa tietyllä välillä (ihmisen pituus tai elinikä).

Muuttujat voidaan luokitella neljään luokkaan niin, että kukin mitta-asteikko sisältää kaikki edellisten asteikkojen ominaisuudet.

Luokittelu- eli nominaaliasteikko:

- Alkeellisin mitta-asteikko
- Kuvaa havaintojen välistä erilaisuutta tai samankaltaisuutta ts. kuuluvatko samaan luokkaan vai eivät.
- Esimerkkejä luokitteluasteikon muuttujista: ammatti, kansalaisuus.
- Muuttujille voidaan antaa numeroarvo, jolla ei kuitenkaan ole mitään aritmeettista merkitystä ja muuttujia ei myöskään voida laittaa paremmuusjärjestykseen.

Järjestys- eli ordinaaliasteikko:

- Esimerkkejä järjestysasteikon muuttujista: sotilasarvo, hakijan pätevyys.
- Muuttujille voidaan määrittää järjestys, jota ei voida kuitenkaan mitata millään mittaluvulla ja siksi vain järjestys merkitsee. Esimerkiksi ylivääpeli on sotilasarvoltaan ylempänä kuin vääpeli, mutta ei voida tarkalleen ilmoittaa kuinka paljon ylempänä.

Välimatka- eli intervalliasteikko:

- Esimerkkejä välimatka-asteikon muuttujista: kengännumero, lämpötila (^oC).
- Ilmaisee järjestyksen lisäksi myös mittausten välisen keskinäisen etäisyyden mutta nollapiste on **sopimuksenvarainen** (esim. lämpötilan celsiusasteikko).
- Ensimmäinen mitta-asteikko, jossa aritmeettisten laskutoimitusten suorittaminen on mielekästä.

Suhdeasteikko:

- Suhdeasteikko on mitta-asteikoista kaikkein täydellisin.
- Suhdeasteikolla on luonnollinen nollapiste (absoluuttinen nollapiste) ja sen vuoksi suhdelukuasteikko tekee mahdolliseksi suhdelukuvertailut eri muuttujien välillä.
- Esimerkkejä suhdeasteikon muuttujista: lasten lukumäärä, lämpötila (K).

6.2. Tilastojen esittäminen

Tilasto esitetään yleensä frekvenssijakauman tai diagrammin avulla.
Frekvenssijakauma on taulukko, jossa esitetään muuttujan arvot ja niihin liittyvät frekvenssit.

Freksvenssijakaumassa käytetään seuraavia merkintöjä: sulkeisiin on merkitty toinen merkintätapa

$x =$ muuttuja, esimerkiksi arvosana

$f =$ frekvenssi tai absoluuttinen frekvenssi, ilmoittaa muuttujan lukumäärän

$f\,\% =$ suhteellinen frekvenssi, ilmoittaa prosentuaalisen osuuden (p)

$F =$ summafrekvenssi, kumulatiivinen frekvenssi, kertymäfrekvenssi, (sf)

$F\,\% =$ suhteellinen summafrekvenssi, suhteellinen kertymäfrekvenssi ($sf\,\%$ tai P)

Diskreetin muuttujan frekvenssijakauma

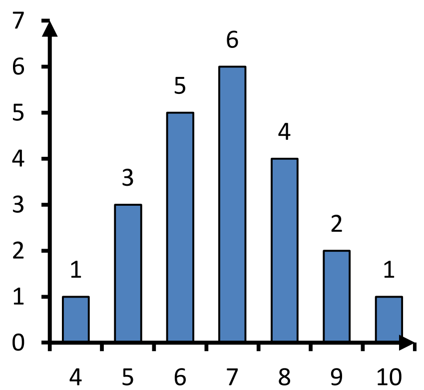
Esim. 6.1. Arvosanat ovat 7, 5, 10, 6, 6, 8, 7, 8, 5, 4, 9, 8, 6, 6, 7, 5, 6, 7, 9, 7, 7, 8. Laadi niistä frekvenssijakauma.

Ratkaisu:	x	f	$f\,\%\ (p)$	$F\ (sf)$	$F\,\%\ (sf\,\%$ tai $P)$
	4	1	$\frac{1}{22}\cdot 100\% \approx 4{,}5\%$	1	4,5 %
	5	3	13,6 %	1 + 3 = 4	4,5 % + 13,6 % = 18,1 %
	6	5	22,7 %	1 + 3 + 5 = 9	40,9 %
	7	6	27,3 %	15	68,2 %
	8	4	18,2 %	19	86,4 %
	9	2	9,1 %	21	95,5 %
	10	1	4,5 %	22	100 %
		$\Sigma f = 22$			

Frekvenssijakaumasta huomataan esimerkiksi, että 75 % opiskelijoista sai korkeintaan arvosanan 8.

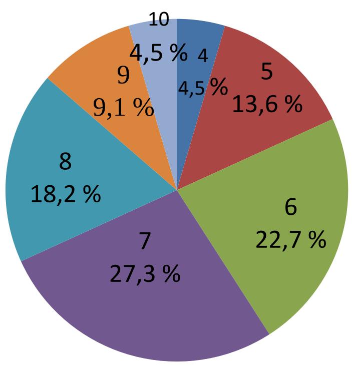
Yleensä jakaumista piirretään kuvaajia kuten pylväskuvioita, ympyräkuvioita tai viivakuviota.

Pylväsdiagrammi



Pylväsdiagrammilla kuvataan frekvenssiä.

Sektoridiagrammi



Sektoridiagrammilla kuvataan suhteellisia frekvenssejä.

Jatkuvan muuttujan frekvenssijakauma

Esim. 6.2. Alla on eräässä lukiossa opiskelivien koulumatka täysinä kilometreinä.

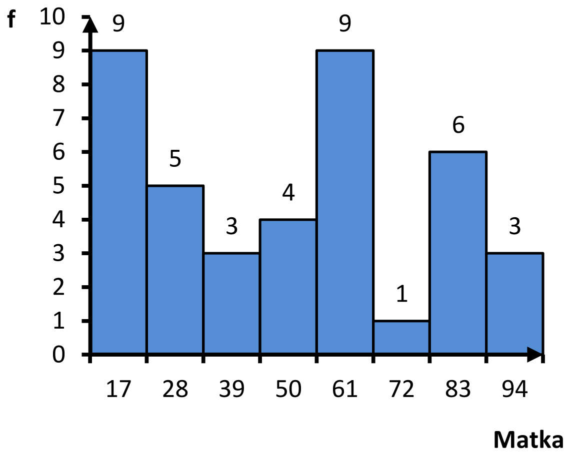
60, 84, 14, 62, 55, 99, 91, 83, 82, 61, 87, 16, 25, 16, 19, 86, 23, 47, 80, 66, 27, 64, 38, 40, 48, 60, 61, 77, 30, 19, 56, 39, 29, 21, 14, 12, 50, 93, 18, 65

Luokittele ja taulukoi aineisto.

Ratkaisu: Valitaan luokan pituudeksi 11, jolloin se alkaa aineiston pienimmästä arvosta 12 ja loppuu suurimpaan arvoon 99. Tällöin luokat ovat 12 – 22, 23 – 33, 34 – 44, 45 – 55, 56 – 66, 67 – 77, 78 – 88 ja 89 – 99. Lasketaan seuraavaksi miten monta havaintoarvoa kuhunkin luokkaan tulee ja kirjoitetaan frekvenssijakauma.

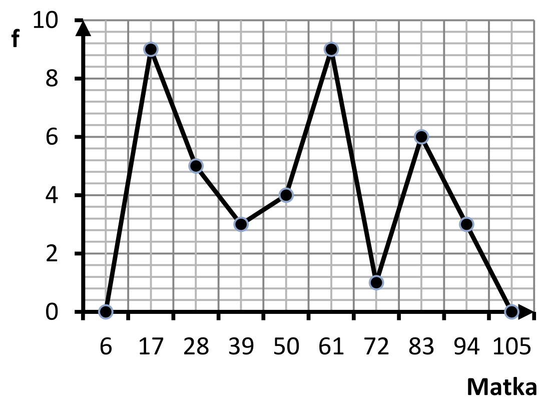
koulumatka	todelliset luokkarajat	luokkakeskus	f	f %	F	F %
12 – 22	[11,5 ; 22,5[	$\frac{11,5+22,5}{2}=17$	9	22,5 %	9	22,5 %
23 – 33	[22,5 ; 33,5[	$\frac{22,5+33,5}{2}=28$	5	12,5 %	14	35,0 %
34 – 44	[33,5 ; 44,5[	$\frac{33,5+44,5}{2}=39$	3	7,5 %	17	42,5 %
45 – 55	[44,5 ; 55,5[	$\frac{44,5+55,5}{2}=50$	4	10,0 %	21	52,5 %
56 – 66	[55,5 ; 66,5[	$\frac{55,5+66,5}{2}=61$	9	22,5 %	30	75 %
67 – 77	[66,5 ; 77,5[	$\frac{66,5+77,5}{2}=72$	1	2,5 %	31	77,5 %
78 – 88	[77,5 ; 88,5[	$\frac{77,5+88,5}{2}=83$	6	15,0 %	37	92,5 %
89 – 99	[88,5 ; 99,5[	$\frac{88,5+99,5}{2}=94$	3	7,5 %	40	100 %

Histogrammi



Pylväät piirretään yhteen ja pylvään keskikohdalle merkitään luokkakeskus.

Frekvenssimonikulmio (viivadiagrammi)



Viivadiagrammi alkaa ja päättyy nollatasolle. Luokkakeskuksen kohdalle merkitään frekvenssi ja pisteet yhdistetään viivalla.

6.3. Keskiluvut

Eri henkilöille voi muodostua erilainen käsitys tilastoaineiston graafisesta esityksestä. Siksi tilastomenetelmissä frekvenssijakaumaan sisältyvä informaatio pyritään keskittämään muutamaan harvaan koko tilastoaineistoa kuvaavaan lukuun, **tunnuslukuun** (keskiluvut ja hajontaluvut).

Moodi

Moodi on aineistossa useimmin esiintyvä muuttujan arvo.Tunnuslukuna moodi ei ole paras mahdollinen, koska niitä voi olla useitakin tai sitä ei ole edes olemassa (jokaisen muuttujan frekvenssi on sama).

Jos matematiikan kurssiarvosanat ovat: 7, 9, 10, 8, 7, 10, 8, 5, 7, 6, 9, 8, 7 ja 8, niin moodi on arvosanat 7 ja 8 (molempia on neljä kappaletta)

Jos muuttuja on luokiteltu, niin tasavälisessä frekvenssijakaumassa suurinta frekvenssiä vastaavaa luokkaa sanotaan **moodiluokaksi**. Moodin lukuarvo tällöin on moodiluokan luokkakeskus.

Esim. 6.3. Alla on erään oppilasryhmän pituuksien frekvenssijakauma. Laske pituuden moodi.

pituus	frekvenssi
141 – 150	3
151 – 160	6
161 – 170	5
171 – 180	6
181 – 190	2

luokkakeskus $= \dfrac{150,5+160,5}{2} = 155,5$

luokkakeskus $= \dfrac{170,5+180,5}{2} = 175,5$

Ratkaisu: Suurin frekvenssi (6 kpl) on luokissa 151 – 160 ja 171 – 180, jotka näin ovat aineiston moodiluokat. Moodin lukuarvot ovat luokkien luokkakeskukset.

Vast. Mo = 155,5 cm ja Mo = 175,5 cm

Mediaani

Mediaani on suuruusjärjestyksessä olevista muuttujan arvoista keskimmäinen, jos havaintojen lukumäärä n on pariton. Jos n on parillinen, mediaaniksi voidaan valita järjestysasteikolla mitatusta muuttujasta toinen kahdesta keskimmäisestä havaintoarvosta ja välimatka- ja suhdelukuasteikolla mitatusta muuttujasta kahden keskimmäisen keskiarvo.

Esim. 6.4. Laske arvosanojen **a)** 6, 5, 9, 7, 10, 6, 8 **b)** 10, 5, 8, 7, 9, 6, 6, 9 mediaani

Ratkaisu: **a)** Järjestetään arvosanat suuruusjärjestykseen 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10

Jaetaan havaintojen lukumäärä kahdella $\frac{7}{2}=3{,}5\approx 4$ (neljäs arvosana on keskimmäinen)

$$\underbrace{5,}_{1.}\ \underbrace{6,}_{2.}\ \underbrace{6,}_{3.}\ \boxed{\underbrace{7,}_{4.}}\ \underbrace{8,}_{5.}\ \underbrace{9,}_{6.}\ \underbrace{10}_{7.}$$

b) Järjestetään arvosanat suuruusjärjestykseen 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10

Jaetaan havaintojen lukumäärä kahdella $\frac{8}{2}=4$ (neljäs ja viides arvosana on keskimmäisiä)

$$\underbrace{5,}_{1.}\ \underbrace{6,}_{2.}\ \underbrace{6,}_{3.}\ \boxed{\underbrace{7,}_{4.}\ \underbrace{8,}_{5.}}\ \underbrace{9,}_{6.}\ \underbrace{9,}_{7.}\ \underbrace{10}_{8.}$$

Mediaani on näiden arvosanojen keskiarvo $Md=\frac{7+8}{2}=7{,}5$

Vast. **a)** Md = 7 **b)** Md = 7,5

Jos tarkasteltava jatkuva muuttuja on mitattu vähintään välimatka-asteikolla, määritellään mediaani mediaanin sisältävän mediaaniluokan luokkakeskuksena. Mediaaniluokaksi sanotaan luokkaa, jossa kumulatiivinen prosenttijakauma ensimmäisen kerran saavuttaa 50%:n rajan tai vastaavasti kumulatiivinen frekvenssi saavuttaa ensimmäisen kerran havaintoarvoista puolet.

Esim. 6.5. Alla on erään oppilasryhmän pituuksien frekvenssijakauma. Laske pituuden mediaani.

pituus	tod. luokkarajat	luokkakeskus	f	f %	F	F %
141 – 150	[140,5 ; 150,5[	145,5	3	13,6 %	3	13,6 %
151 – 160	[150,5 ; 160,5[	155,5	6	27,3 %	9	40,9 %
161 – 170	**[160,5 ; 170,5[**	**165,5**	**5**	**22,7 %**	**14**	**63,6 %**
171 – 180	[170,5 ; 180,5[	175,5	6	27,3 %	20	90,9 %
181 – 190	[180,5 ; 190,5[	185,5	2	9,1 %	22	100 %

mediaani-luokka

Ratkaisu: Mediaaniluokka on 161 – 170 ja siksi mediaani on 165,5 cm (luokkakeskus).

Vast. Md = 165,5 cm

Fraktiili

Mediaanin verrattavia tunnuslukuja ovat **fraktiilit**, jotka eivät ole keskilukuja. Fraktiili on luku, jota pienemmäksi jää tietyn suuruinen osa järjestetystä aineistosta. Frekvenssijakauman *p*%:n fraktiili on sellainen muuttujan arvo, jonka kohdalla havaintoarvojen suhteellinen summafrekvenssi saavuttaa arvon *p* ($0 < p < 100$).

Fraktiilit voidaan määrittää järjestysasteikon muuttujalle.

Fraktiileista kvartiilit ovat eniten käytettyjä. Kvartiilit jakavat mediaanin kanssa havaintoaineiston neljään yhtä suureen osaan. Fraktiilileilla on olemassa omat vakiintuneet nimitykset:

25%:n fraktiili on **alakvartiili** (Q_1)
50%:n fraktiili on mediaani ($Md = Q_2$)
75%:n fraktiili on **yläkvartiili** (Q_3)

Fraktiileja, jotka jakavat aineiston viiteen yhtä suureen osaan, kutsutaan kvintiileiksi.

Fraktiileja, jotka jakavat aineiston kymmeneen yhtä suureen osaan, kutsutaan desiileiksi.

Jos on käytössä laaja frekvenssitaulukko, p %:n fraktiiliksi voidaan valita se arvo, jossa suhteellinen summafrekvenssi F% ensimmäisen kerran saavuttaa p%:n rajan. Esimerkiksi **alakvartiili** saadaan määrittämällä suhteellisen summafrekvenssin F% kohtaa **25 %** ja **kuudes desiili D_6** saadaan määrittämällä summafrekvenssin kohtaa **60%** vastaava muuttujan arvo.

Esim. 6.6. Käytä alla olevaa frekvenssitaulukkoa hyväksi ja määritä muuttujan **a)** alakvartiili Q_1 **b)** yläkvartiili Q_3 **c)** kuudes desiili D_6 **d)** yhdeksäs desiili D_9

x	f	f %	F	F %
1	1	3,3%	1	3,3 %
2	2	6,7 %	3	10 %
3	4	13,3 %	7	23,3 %
4	5	16,7 %	12	40 %
5	7	23,3 %	19	63,3 %
6	4	13,3 %	23	76,7 %
7	3	10 %	26	86,7 %
8	2	6,7 %	28	93,3 %
9	1	3,3 %	29	96,7 %
10	1	3,3 %	30	100 %

Ratkaisu: **a)** Alakvartiili Q_1 on se, jossa suhteellinen summafrekvenssi saavuttaa ensimmäisen kerran 25 % rajan. Näin ollen alakvartiili $Q_1 = 4$.

b) yläkvartiili $Q_3 = 6$ (ensimmäisen kerran F% ylittää 75 %).

c) kuudes desiili $D_6 = 5$ (ensimmäisen kerran F% ylittää 60 %).

d) yhdeksäs desiili $D_9 = 8$ (ensimmäisen kerran F% ylittää 90 %).

Aritmeettinen keskiarvo

Minimiasteikkovaatimus on välimatka- eli intervalliasteikko.

Muuttujien $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

aritmeettinen keskiarvo

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Kurssiarvosanojen
8,7,5,8,9,10,8,6,9 ja 7.
aritmeettinen keskiarvo

$$\bar{x} = \frac{8+7+5+8+9+10+8+6+9+7}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{77}{10} = 7,7$$

Jos aineistosta on käytettävissä
frekvenssitaulukko,
niin aritmeettinen keskiarvo

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{n}$$

pistemäärä	frekvenssi
2	5
3	12
4	8

$$\bar{x} = \frac{5\cdot 2+12\cdot 3+8\cdot 4}{25}$$

$$\bar{x} = \frac{78}{25} = 3,12$$

Esim. 6.7. Matin englannin kurssiarvosanat olivat seuraavat: 8, 9, 8, 6 ja 10. Minkä arvosanan Matti pitäisi saada viimeisestä englannin kurssista, jotta loppuarvosanaksi tulisi 9?

Ratkaisu: Loppuarvosana on 9, jos arvosanojen keskiarvo on 8,5. Tällöin kuuden kurssin yhteenlaskettu summa on $\sum x_i = 6\cdot 8,5 = 51$

Viiden ensimmäisen kurssin summa on $8+9+8+6+10=41$

Näin ollen Matin pitää saada viimeisestä englannin kurssista arvosanaksi 51 – 41 = 10

Vast. Matin pitää saada arvosana 10

Huomautus: Jos aineisto on luokiteltu, niin silloin keskiarvoa laskettaessa käytetään luokkakeskuksia.

Esim. 6.8. Laske keskiarvo alla olevasta luokitellusta tilastoaineistosta.

massa	tod. luokkarajat	luokkakeskus	f	f %	F	F %
55 – 59	[54,5 ; 59,5[	57	3	12,5	3	12,5
60 – 64	[59,5 ; 64,5[	62	5	20,8	8	33,3
65 – 69	[64,5 ; 69,5[	67	4	16,7	12	50
70 – 74	[69,5 ; 74,5[	72	6	25	18	75
75 – 79	[74,5 ; 79,5[	77	6	25	24	100

Ratkaisu: $\bar{x} = \frac{3\cdot 57+5\cdot 62+4\cdot 67+6\cdot 72+6\cdot 77}{24} = \frac{1643}{24} = 68,458333 \approx 68,5$

Vast. Keskiarvo on noin 68,5 kg.

Painotettu keskiarvo

Jos muuttujien arvot $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ eivät ole yhtä merkityksellisiä, niin silloin voidaan laskea painotettu keskiarvo, jossa muuttujien arvot kerrotaan kunkin muuttujan x_i omalla painollaan w_i. Painotettu keskiarvo $\overline{x}_w$ on

$$\overline{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}.$$

Jos painot ovat suhdelukuja $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = 1$ niin tällöin: $\overline{x}_w = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$.

Esim. 6.9. Laske **a)** aritmeettinen **b)** painotettu keskiarvo vaihto-oppilaan arvosanoista.

aine	kurssien määrä	arvosana
matematiikka	3	7
englanti	5	9
fysiikka	1	9
kemia	1	7
ranska	3	10

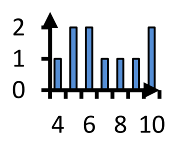
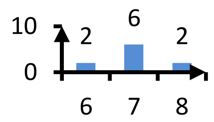
Ratkaisu: **a)** $\overline{x} = \frac{7+9+9+7+10}{5} = 8{,}4$ **b)** $\overline{x}_w = \frac{3\cdot7+5\cdot9+1\cdot9+1\cdot7+3\cdot10}{13} = 8{,}615... \approx 8{,}6$

Vast. **a)** aritmeettinen keskiarvo $\bar{x} = 8{,}4$ **b)** painotettu keskiarvo $\bar{x}_w \approx 8{,}6$

6.4. Hajontaluvut

Keskiluvut yksistään eivät anna riittävästi tietoa aineistosta. Esimerkiksi alla on Liisan ja Maijan matematiikan kurssiarvosanat. Molemmilla on sama keskiarvo 7, vaikka pylväsdiagrammit näyttävät hyvin erilaisilta.

Kurssi	Liisa	Maija
M1	8	6
M2	7	7
M3	6	7
M4	10	8
M5	10	6
M6	6	7
M7	9	7
M8	5	7
M9	5	7
M10	4	8

	Keskiarvo	Pylväsdiagrammi
Liisa	$\overline{x} = \frac{8+7+6+10+10+6+9+5+5+4}{10}$, $\overline{x} = 7$	
Maija	$\overline{x} = \frac{6+7+7+8+6+7+7+7+7+8}{10}$, $\overline{x} = 7$	

Keskilukujen lisäksi on tunnettava myös hajontaluvut, jotta havaintoarvojen jakautuminen tiedettäisiin paremmin ja voitaisiin analysoida aineistoa yksityiskohtaisemmin.

Keskihajonta

Tärkein ja eniten käytetty hajontaluku on **keskihajonta** eli **standardipoikkeama** *s*, joka saadaan laskettua kaavalla $s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$, kun tunnetaan koko aineisto ja kaavalla , kun aineistosta on käytössä otos (tutkimuksen koko aineistoa ei tunneta, kutsutaan otoskeskihajonnaksi).Käytännössä tulosten ero on merkityksetön, kun havaintoarvojen määrä n on riittävän suuri (n ≥ 30)

Mitä pienempi keskihajonta *s* on, niin sitä paremmin havaintoaineisto on jakautunut keskiarvon ympärille. Kun havaintoyksikkö on vähintään kahden keskihajonnan päässä keskiarvosta, on sen poikkeama keskiarvosta merkittävä.

Varianssi s^2

Keskihajonnan neliötä s^2 kutsutaan **varianssiksi**, joka saadaan näin kaavalla $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ tai kaavalla $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.

Vaihteluväli

Havaintoarvojen pienimmän ja suurimman arvon muodostama väli $[x_{min}, x_{max}]$.

Vaihteluvälin leveys (tai pituus) R

Vaihteluvälin leveyttäkin sanotaan usein vaihteluväliksi. Vaihteluvälin leveys saadaan seuraavasti: $R = x_{\max} - x_{\min}$

Kvartiiliväli

Kvartiiliväli on ala- ja yläkvartiilin muodostama väli (Q_1, Q_3).

Kvartiilipoikkeama

Välimatka- ja suhdeasteikolla määritellään kvartiilipoikkeama $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

Keskipoikkeama

Havaintoarvojen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ **keskipoikkeama** $d = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$

Esim. 6.10. Alla on lueteltu Liisan ja Maijan pitkän matematiikan pakolliset arvosanat.

Kurssi	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
Liisa	8	7	6	10	10	6	9	5	5	4
Maija	6	7	7	8	6	7	7	7	7	8

Laske **a)** vaihteluväli **b)** vaihteluvälin leveys (pituus) **c)** kvartiiliväli **d)** kvartiilipoikkeama **e)** keskipoikkeama

Ratkaisu: Kirjoitetaan molemmista frekvenssitaulukot, sillä tarvitsemme ala- ja yläkvartiileja.

Liisa

x	f	f %	F	F %
4	1	10 %	1	10 %
5	2	20 %	3	30 %
6	2	20 %	5	50 %
7	1	10 %	6	60 %
8	1	10 %	7	70 %
9	1	10 %	8	80 %
10	2	20 %	10	100 %

Maija

x	f	f %	F	F %
6	2	20 %	2	20 %
7	6	60 %	8	80 %
8	2	20 %	10	100 %

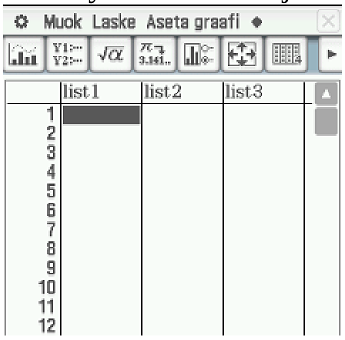
	Liisa	**Maija**
a) vaihteluväli	[4,10]	[6,8]
b) vaihteluvälin pituus R	R = 10 – 4 =6	R = 8 – 6 = 2
c) kvartiiliväli	(5,9)	(7,7)
d) kvartiilipoikkeama Q	$\frac{9-5}{2} = 2$	$\frac{7-7}{2} = 0$

e) keskipoikkeama $\mathbf{d}_{\mathbf{Liisa}} = \frac{1\cdot|4-7|+2\cdot|5-7|+2\cdot|6-7|+1\cdot|7-7|+1\cdot|8-7|+1\cdot|9-7|+2\cdot|10-7|}{10} = 1{,}8$

$$\mathbf{d}_{\mathbf{Maija}} = \frac{2\cdot|6-7|+6\cdot|7-7|+2\cdot|8-7|}{10} = 0{,}4$$

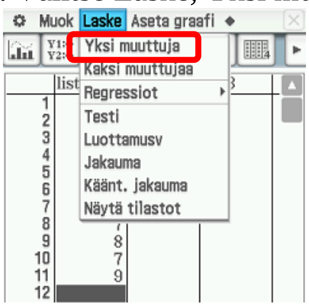
ClassPadilla: Laske keskiarvo ja moodi, kun arvosanat olivat 6, 9, 7, 4, 10, 9, 5, 7, 8, 7 ja 9

Ratkaisu: **1.** Siirry Tilasto - ohjelmaan

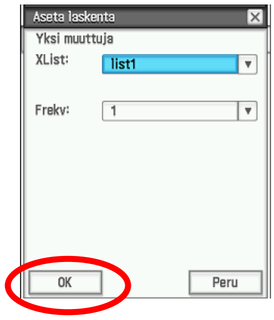


2. Syötä arvosanat listaan 1

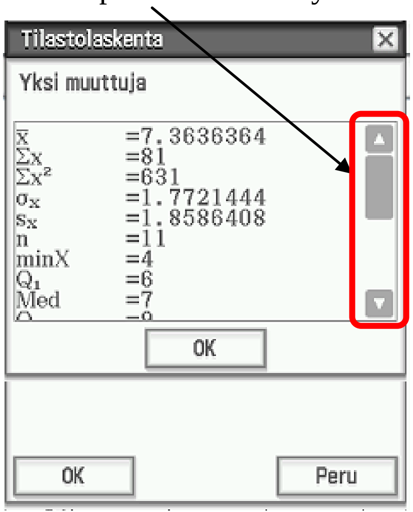
3. Valitse Laske, Yksi muuttuja



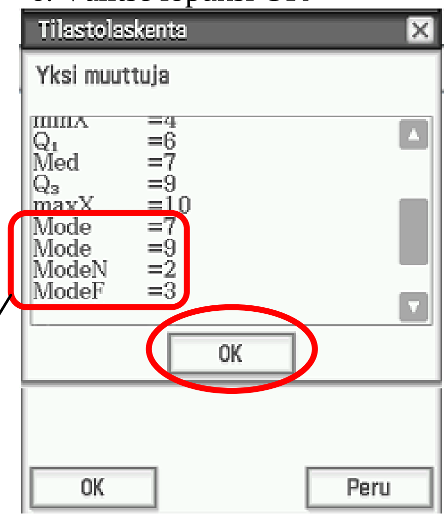
4. Valitse OK



5. Liukupalkista saat näkyviin lisää infoa.



6. Valitse lopuksi OK



Moodina ovat arvosanat 7 ja 9 (kaksi kappaletta) ja arvosanoja 7 ja 9 on 3 kappaletta.

Vast. Keskiarvo 7,4 ja moodina arvosanat 7 ja 9.

Selitykset:

$\bar{x} =$ keskiarvo

$\sum x =$ havaintoarvojen summa

$\sum x^2 =$ havaintoarvojen neliöiden summa

$\sigma_x =$ keskihajonta

$s_x =$ otoskeksihajonta (ei tunneta koko populaatiota)

$n =$ arvosanojen lukumäärä

$\min x =$ pienin havaintoarvo

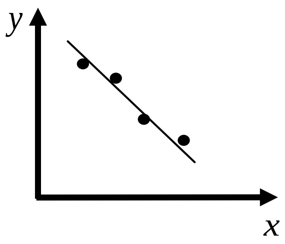
$Q_1 =$ alakvartiili

$Med =$ mediaani

$Q_3 =$ yläkvartiili

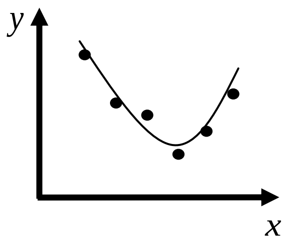
6.5. Korrelaatio

Korrelaatiolla tarkoitetaan kahden muuttujan välistä riippuvuutta. Jotta saisi oikean käsityksen millaisesta riippuvuudesta on kyse, niin kannattaa piirtää hajontakuvio eli korrelaatildiagrammi, jonka avulla on helpointa löytää sopivin regressiofunktio. Korrelaatio voi noudattaa esimerkiksi lineaarista mallia, polynomimallia tai eksponentiaalista mallia. Jos muuttujia on kaksi, niin silloin toista muuttujaa kutsutaan selittäväksi muuttujaksi ja toista selitettäväksi muuttujaksi. Yleensä selittävää muuttujaa merkitään x:llä ja selitettävää muuttujaa y:llä. Jos hajontakuviossa ei ilmene minkäänlaista säännönmukaisuutta, niin aineiston matemaattista tarkastelua ei kannata jatkaa pidemmälle.



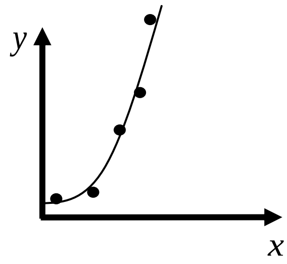
Lineaarinen malli

$y = kx + b$



Polynomimalli

$y = ax^2 + bx + c$

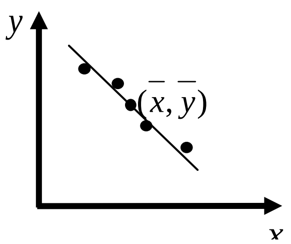


Eksponentiaalimalli

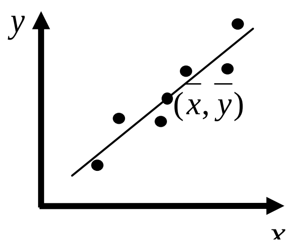
$y = ab^x$

Lineaarinen malli

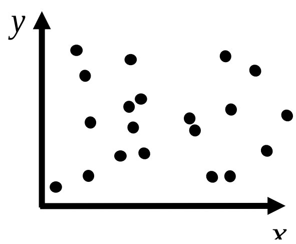
Lineaarisessa mallissa havaintoaineisto voidaan mallintaa suoran $y = kx + b$ avulla. Suoraa kutsutaan tällöin regressiosuoraksi, joka kulkee aina keskiarvopisteen $(\bar{x}, \bar{y})$ kautta. Korrelaatio on positiivista, jos regressiosuora on nouseva ja negatiivista, jos regressiosuora on laskeva.



negatiivinen korrelaatio



positiivinen korrelaatio

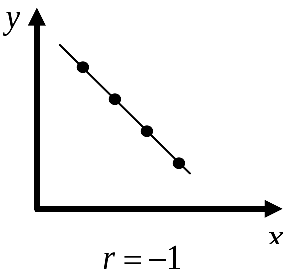


ei korrelaatiota

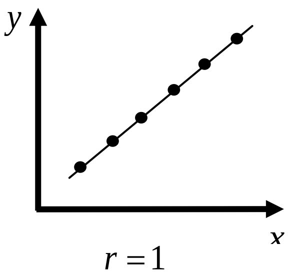
Korrelaatiokerroin r

Yhden tilastomuuttujan tarkastelussa käytettiin apuna keskilukuja ja hajontalukuja. Kahden muuttujan välistä riippuvuutta voidaan myös tarkastella tunnuslukujen avulla. Tärkein ja eniten käytetty tunnusluku on Pearsonin korrelaatiokerroin

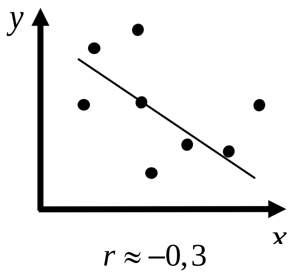
$r=\dfrac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\left(\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right)\cdot\left(\sum\left(y_i-\bar{y}\right)^2\right)}}$, joka mittaa lineaarista yhteyttä ja sen arvo on $-1\le r\le 1$. Korrelaatio on herkkä poikkeaville arvoille ja se on täydellistä, jos $r=\pm 1$.



$r=-1$



$r=1$

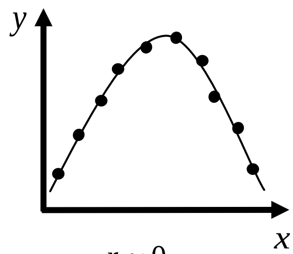


$r\approx -0,3$

Korrelaatiokertoimen arvo on hyvin harvoin nolla, vaan yleensä sen arvo poikkeaa nollasta. Yleisesti tulkitaan, että kahden muuttujan lineaarinen korrelaatio on

voimakasta, jos	$\lvert r\rvert \ge 0,8$
huomattava, jos	$0,6\le \lvert r\rvert < 0,8$
kohtalainen, jos	$0,3\le \lvert r\rvert < 0,6$
merkityksetön, jos	$\lvert r\rvert < 0,3$

Huomautus: Kahden muuttujan välinen riippuvuus voi olla hyvinkin voimakasta, vaikka Pearsonin korrelaatiokerroin $r\approx 0$. Muuttujien välinen yhteys ei ole silloin lineaarista vaan epälineaarista (katso vieressä olevaa korrelaatiodiagrammia). Jos korrelaatio ei ole lineaarista, niin silloin **selityskerroin eli selitysaste** r^2 kertoo, miten luotettavasti käytetty matemaattinen malli kuvaa kahden muuttujan välistä riippuvuutta.



$r\approx 0$

Regressiosuoran yhtälö

Regressionsuoran $y=kx+b$ parametrit $k=\dfrac{n\left(\sum x_iy_i\right)-\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\left(\sum x_i^2\right)-\left(\sum x_i\right)^2}$ ja

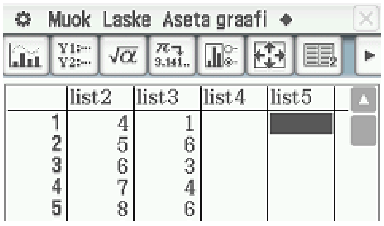
$b=\dfrac{\sum y_i-k\left(\sum x_i\right)}{n}=\dfrac{\sum y_i}{n}-\dfrac{k\left(\sum x_i\right)}{n}=\bar{y}-k\bar{x}$. Käytännössä parametrien arvot lasketaan aina laskimella tai tietokoneella.

Regressiosuoran yhtälön johtaminen ClassPadilla

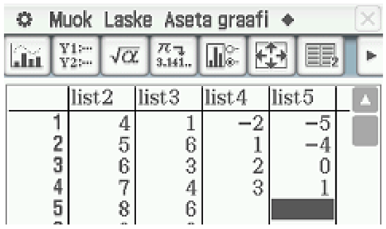
Laske korrelaatiokerroin ja muodosta regressiosuoran yhtälö, kun havaintopisteet ovat $(-2,-5),(1,-4),(2,0)$ ja $(3,1)$.

1. Siirry 

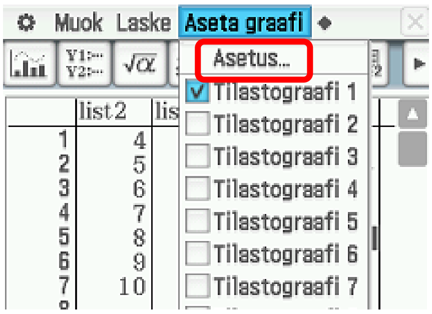
- ohjelmaan



2. Kirjoita listaan 4 pisteen $x-$koordinaatit listaan 5 pisteen $y-$ koordinaatit



3. Valitse Asetus



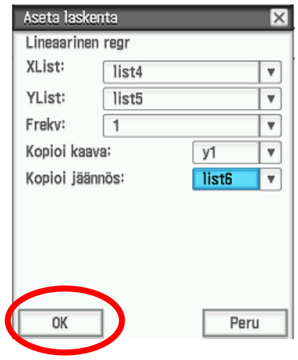
4. Vaihda graafiasetukset ja valitse Aseta

*X*List: list 4

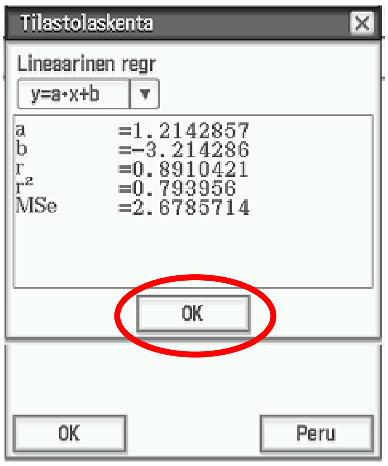
*Y*List: list 5

5. Valitse Lineaarinen regr

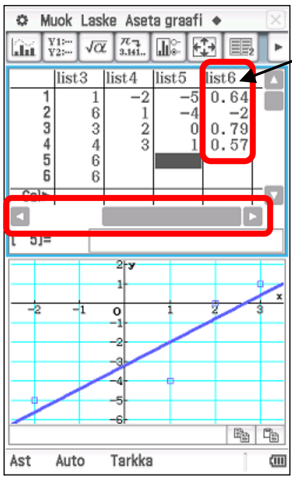
6. Vaihda asetukset ja valitse OK



7. Valitse OK



8. Siirrä liukupalkilla listaa oikealle



Jäännöstermit listassa 6.

Vast.

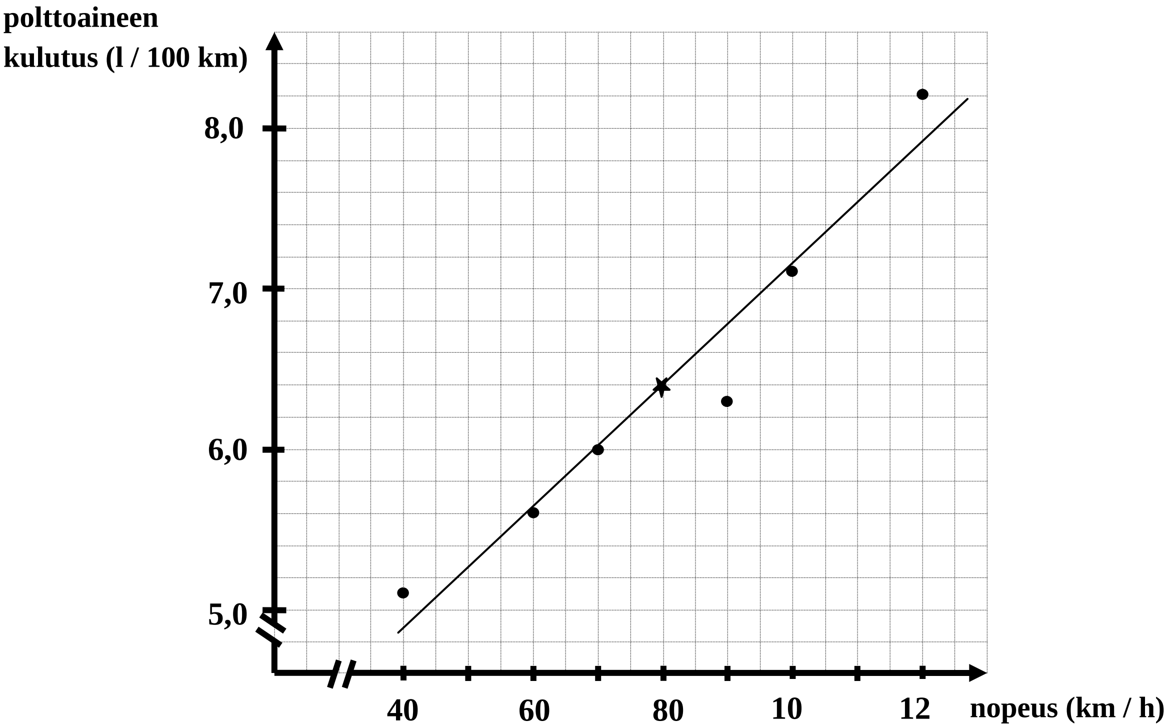
Korrelaatiokerroin $r \approx 0,89$ ja regressiosuoran yhtälö $y \approx 1,21x - 3,21$

Esim. 6.11. Ritva tarkkaili autonsa polttoaineenkulutusta eri nopeuksilla.

a) Tee hajontakuvio eli korrelaatiodiagrammi.
b) Piirrä silmämääräisesti regressiosuora (kulkee keskiarvopisteen kautta).
c) Laske laskimen avulla korrelaatiokerroin ja regressiosuoran yhtälö.
d) Mikä on polttoaineenkulutus nopeudella 85 km / h? Entä nopeudella 180 km/h?
e) Laske millä nopeudella polttoaineenkulutus on 7,5 litraa / 100 km.

Nopeus (km / h)	Polttoaineen kulutus (l / 100 km)
40	5,1
60	5,6
70	6,0
90	6,3
100	7,1
120	8,2

Ratkaisu: **a) ja b)** Keskiarvopiste (80 km / h, 6,4 l /100 km) on merkitty tähdellä.



c) Korrelaatiokerroin $r = 0,97070906 \approx 0,97$ (korrelaatio on voimakasta).
Regressiosuoran yhtälö $y = 0,03738095x + 3,39285714$

d) Kulutus nopeudella 85 km / h saadaan sijoittamalla regressiosuoran yhtälöön $x = 85$, josta $y = 0,03738095 \cdot 85 + 3,39285714 = 6,570238... \approx 6,6$.

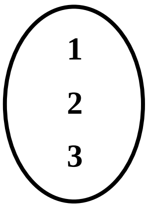
Nopeus 180 km / h poikkeaa liiaksi havaituista arvoista ja siksi kulutusta ei voida ennustaa annetun aineiston perusteella.

e) Ratkaistaan yhtälö $0,03738095x + 3,39285714 = 7,5$, josta saadaan $x = 109,8726185 = 110$

Vast. **c)** $r = 0,97$ ja $y = 0,03738095x + 3,39285714$ **d)** 6,6 l /100 km **e)** 110 km / h

6.6. Joukko-oppi

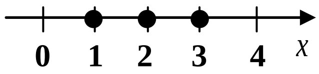
Joukko voidaan esittää mm. Venn-diagrammin, aaltosulkeiden, lukusuoran avulla tai laajemman joukon osana. Esimerkiksi alla on esitetty eri tavalla joukko A, johon kuuluvat alkiot 1, 2 ja 3.



Venn-diagrammi

$A = \{1, 2, 3\}$

Aaltosulkeiden avulla



Lukusuoran avulla

$A = \{ n \in \mathbb{Z} \mid 1 \le n \le 3 \}$

Laajemman joukon osana

Joukko on **äärellinen**, jos joukon alkiot voidaan laskea.

Joukko on **ääretön**, jos joukko ei ole äärellinen.

Tyhjässä joukossa $\varnothing$ ei ole yhtään alkiota.

Joukko B on joukon A **osajoukko**, jos jokainen joukon B alkio kuuluu myös joukkoon A. Tällöin merkitään $B \subset A$ (”joukko B sisältyy joukkoon A”).

Jos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja $B = \{2, 4, 6\}$, niin silloin $B \subset A$.

Joukkojen A ja B **yhdiste** $A \cup B$ on joukko, joka koostuu joukkojen A ja B alkioista.

Jos $A = \{10, 20\}$ ja $B = \{0, 17, 25\}$, niin silloin $A \cup B = \{0, 10, 17, 20, 25\}$.

Joukkojen A ja B **leikkaus** $A \cap B$ koostuu joukkojen A ja B yhteisistä alkioista.

Jos $A = \{10, 15, 20\}$ ja $B = \{10, 17, 20\}$, niin silloin $A \cap B = \{10, 20\}$.

Joukot A ja B ovat **erillisiä eli toistensa poissulkevia**, kun $A \cap B = \varnothing$

Jos $A = \{2, 4, 6\}$ ja $B = \{1, 3, 5\}$, niin silloin $A \cap B = \varnothing$.

Joukkojen A ja B **erotus** $A \setminus B$ on joukko, joka saadaan kun joukon A alkioista vähennetään joukon B alkiot.

Jos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ja $B = \{1, 3, 5\}$, niin silloin $A \setminus B = \{2, 4\}$.

Esim. 6.12. Olkoon joukko $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ja $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$.
Määritä **a)** yhdiste $A \cup B$ **b)** leikkaus $A \cap B$ **c)** erotus $A \setminus B$ **d)** erotus $B \setminus A$

Ratkaisu: **a)** $A \cup B = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16\}$ **b)** $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

c) $A \setminus B = \{5, 7, 9\}$ **d)** $B \setminus A = \{0, 2, 12, 14, 16\}$

6.7. Kombinatoriikka

Tuloperiaate

Jos kokonaisuus valitaan vaiheittain ja

1. vaiheessa on n_1 vaihtoehtoa
2. vaiheessa on n_2 vaihtoehtoa
3. vaiheessa on n_3 vaihtoehtoa

$\vdots$

k. vaiheessa on n_k vaihtoehtoa

niin kokonaisuus voidaan valita $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ eri tavalla.

Esim. 6.13. Kuinka monta erilaista vaihtoehtoa auton ostajalla on valittavana autoliikkeessä, jossa autoon voidaan valita 6 eri väriä, 2 eri korimallia ja 5 eri moottorivaihtoehtoa.

Ratkaisu: Tuloperiaatteen mukaan ”erilaisia autoja” voidaan valita $6 \cdot 2 \cdot 5 = 60$ kappaletta.

Permutaatio

Joukon *A* permutaatio on mikä tahansa jono, jossa joukon *A* jokainen alkio esiintyy täsmälleen yhden kerran. Olkoon *A* joukko, jossa on *n* alkiota.Tällöin

permutaatioiden lukumäärä on $n!$

k - permutaation lukumäärä on $\dfrac{n!}{(n-k)!}$,

Merkintä $5!$ tarkoittaa $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. On sovittu $0! = 1! = 1$.

Esim. 6.14. Kuinka monta erilaista heittojärjestystä voidaan laatia 4-jäseniselle tikkaporukalle, jos **a)** kaikki saavat heittää kerran tikkaa **b)** vain 3 saa heittää tikkaa?

Ratkaisu: **a)** Erilaisten heittojärjestysten eli permutaatioiden lukumäärä on $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) 3-permutaatioiden lukumäärä on $\dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$

Vast. **a)** 24 heittojärjestystä **b)** 12 heittojärjestystä.

Kombinaatio

Kombinaatio on joukon osajoukko, jossa alkioiden järjestyksellä ei ole väliä. Osajoukkoja pidetään samoina, kun niissä on täsmälleen samat alkiot.

Esim. 6.15. Kuinka monta erilaista kolmen hengen ryhmää voidaan valita viiden henkilön joukosta.

Ratkaisu: Viiden hengen joukosta voidaan valita kolmen hengen ryhmiä $\binom{5}{3}$ kappaletta.

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2\cdot 1} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = \frac{5\cdot 2}{1\cdot 1} = 10 \text{ kappaletta.}$$

Esim. 6.16. **a)** Kuinka monessa eri järjestyksessä voidaan valita kaksi henkilöä viidestä?
b) Kuinka monta erilaista kahden hengen ryhmää voidaan laatia viiden hengen joukosta?

Ratkaisu: a-kohdassa ei kiinnitetä huomiota ryhmän kokoonpanoon ja b-kohdassa kiinnitetään.

a) 2-permutaatioiden määrä on

ClassPadilla nPr (5, 3)

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = 5\cdot 4 = 20$$

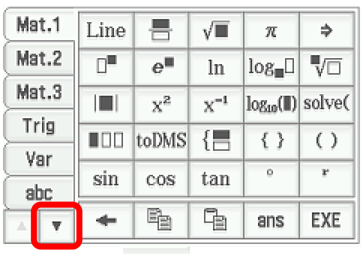
b) 2-kombinaatioiden määrä on

ClassPadilla nCr (5, 3)

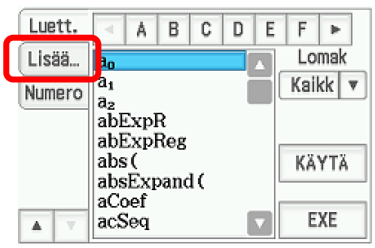
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{5\cdot 2}{1} = 10$$

Laskimella a – kohta

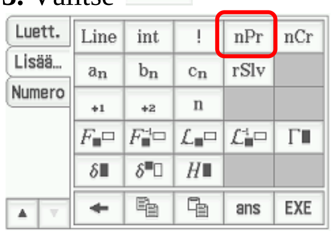
1. Kosketa ▼



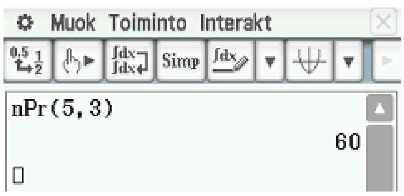
2. Avaa Lisää… - välilehti



3. Valitse nPr



4. Kirjoita kuten alla ja kosketa EXE



6.8. Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet

Ilmiötä, jonka tuloksen määrää sattuma (nopanheitto, lotto, …), kutsutaan satunnaisilmiöksi. Satunnaisilmiön tuloksia kutsutaan alkeistapauksiksi (esimerkiksi nopan silmäluvut 1, 2, … , 6 sekä kaikki erilaiset lottorivit). Alkeistapauksien muodostamaa joukkoa kutsutaan perusjoukoksi eli otosavaruudeksi. Joukko-opillisesti esimerkiksi nopanheittoa kuvaa joukko E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Satunnaisilmiön tuloksista eli alkeistapauksista voidaan muodostaa laajempia tapahtumia. Alkeistapausten todennäköisyyksiä sanotaan pistetodennäköisyyksiksi.

Klassinen todennäköisyys

Jos kaikki alkeistapaukset ovat yhtä mahdollisia, tapahtuman todennäköisyys on

$$P\,(\text{tapahtuma}) = \frac{\text{tapahtumalle suotuisten alkeistapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}} = \frac{k}{n}.$$

Tapahtuman A klassinen todennäköisyys on aina $0 \le P(A) \le 1$.

Esim. 6.17. Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä silmälukujen summa on
a) tasan 8 **b)** vähintään 9?

Ratkaisu: Tehdään taulukko, jossa vaakarivit edustavat ensimmäisen nopan silmälukuja ja pystyrivit toisen nopan silmälukuja ja merkitään ruutuihin pistelukujen summa..

a)

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Suotuisia alkeistapauksia on 5 ja kaikkien alkeistapausten lukumäärä on 36.

Näin ollen

P (silmälukujen summa on 8) = $5/36$ = 13,888…%

b)

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Suotuisia alkeistapauksia on 10 ja kaikkien alkeistapausten lukumäärä on 36.

Näin ollen

P (silmälukujen summa on vähintään 9) = $10/36$ = 27,777…%

Vast. **a)** 13,9 % todennäköisyydellä **b)** 27,8 % todennäköisyydellä

Tilastollinen todennäköisyys

Useasti todennäköisyyksiä joutuu laskemaan kokeellisten havaintojen pohjalta (syntyvyys, kolarialttius). Tilastoja hyväksi käyttäen arvio tapahtuman A todennäköisyydelle saadaan

$$P(A) \approx \frac{\text{tapahtuman } A \text{ esiintymiskertojen lukumäärä}}{\text{kokeen toistojen lukumäärä}}$$

Esim. 6.18. Auton maahantuoja tutki, kuinka monen ajokilometrin jälkeen erään automallin 1000 autoon ilmaantui ensimmäinen merkittävä korjausta vaativa vika. Millä todennäköisyydellä auto, joka on toiminut moitteetta ensimmäiset 10 000 km, toimii moitteetta seuraavat 10 000 km?

ajomatka (km)	autoja
0 -10 000	100
10 000 – 20 000	150
20 000 – 30 000	200
30 000 –40 000	300
40 000 -	250

Ratkaisu: P (toimii moitteetta seuraavat 10000km)$\approx\frac{200+300+250}{150+200+300+250}=\frac{750}{900}$=83,3333…%≈83,3%

Vast. 83,3 %

Geometrinen todennäköisyys

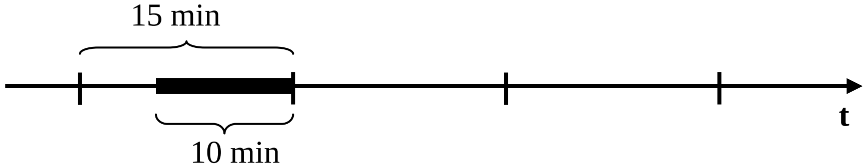
Jos satunnaiskokeessa alkeistapaukset ovat yhtä mahdollisia ja kokeen tulosta voidaan havainnollistaa geometrisella kuviolla (jana, tasoalue, …), niin tapahtuman todennäköisyys voidaan laskea kuvion geometrisia mittoja käyttäen.

Tapahtuman A geometrinen todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{\text{tapahtumalle } A \text{ suotuisten alkeistapausten geometrinen mitta}}{\text{koko kuvion geometrinen mitta}}$$

Esim. 6.19. Bussit lähtevät päätepysäkiltä viidentoista minuutin välein. Millä todennäköisyydellä turisti, joka ei tiedä bussin aikatauluista mitään, joutuu odottamaan bussia enintään 10 minuuttia?

Ratkaisu: Piirretään vaaka-akseli, joka on jaettu 15 minuutin pätkiin.



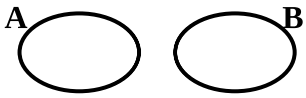
P(turisti joutuu odottamaan bussia enintään 10 min.) = $\frac{10\,\text{min}}{15\,\text{min}} = \frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots \approx 66{,}7\%$

Vast. Turisti joutuu odottamaan enintään 10 minuuttia 66,7 % todennäköisyydellä.

6.9. Todennäköisyyden laskusäännöt

Erilliset tapahtumat eli toistensa poissulkevat tapahtumat

Kun tapahtumalla A ja B ei ole yhteisiä suotuisia alkeistapauksia, niin silloin **tapahtumat ovat erillisiä eli toistensa poissulkevia**.Esimerkiksi heitettäessä noppaa kerran, tapahtumat A = ”saadaan silmäluku 2” ja B = ”saadaan silmäluku 5” ovat toisensa poissulkevia.



$A=\{2\}$ ja $B=\{5\}$ eli $A\cap B=\varnothing$ (leikkaus on tyhjä joukko)

Tapahtumat eivät ole riippumattomia

Tapahtumat A ja B eivät ole riippumattomia, jos toisen tapahtuman todennäköisyys riippuu siitä, että onko toinen tapahtunut vai ei. Esimerkiksi korttipakasta vedetään kaksi korttia, Tapahtumat A = ”ensimmäinen nostettu kortti on jätkä” ja B = ”toinen nostettu kortti on pata” eivät ole riippumattomia tapahtumia. Jos ensimmäinen kortti on patajätkä, niin silloin korttipakassa on 51 korttia, joista patoja on enää 12. Mutta jos ensimmäinen kortti on herttajätkä, niin silloin korttipakassa on vielä 13 pataa. Näin tapahtuman B = ”tulee pata” todennäköisyys riippuu tapahtumasta A = ”tulee jätkä”

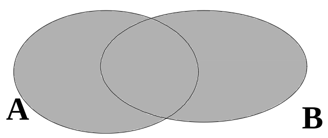
Erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntö

Jos tapahtumat A ja B ovat erillisiä, niin todennäköisyys sille, että jompikumpi tapahtumista tapahtuu, on tapahtuman A ja tapahtuman B todennäköisyyksien summa.

$$\boxed{\text{P(A tai B) = P(A) + P(B)}}$$

missä ”A tai B” tarkoittaa tapahtumaa ”jompikumpi tapahtumista A tai B tapahtuu”

Yleinen yhteenlaskusääntö



Jos tapahtumat A ja B eivät ole toistensa poissulkevia, niin silloin tapahtuman ”A tai B” todennäköisyys saadaan laskemalla yhteen tapahtumien todennäköisyydet ja vähentämällä tuloksesta yhteisen osuuden ”A ja B” todennäköisyydet.

$$\boxed{\text{P(A tai B) = P(A) + P(B) – P(A ja B)}}$$

missä ”A tai B” tarkoittaa tapahtumaa ”A ja B molemmat tapahtuvat”

Huomautus: Edellä esitetty yleinen yhteenlaskusääntö toimii myös silloin, kun tapahtumat A ja B ovat erillisiä. Silloin niillä ei ole yhteisiä alkeistapauksia ja siksi $P(A \text{ ja } B)=0$.

Esim. 6.20. Eetu valitsee umpimähkään kokonaisluvun väliltä [1, 30]. Millä todennäköisyydellä luku on jaollinen kolmella tai viidellä?

Ratkaisu: Tapahtumat ”luku on jaollinen kolmella” ja ”luku on jaollinen viidellä” eivät ole erillisiä. Yhteisiä ovat ne luvut, jotka ovat jaollisia sekä kolmella että viidellä eli kaikki luvut, jotka ovat jaollisia lukujen 3 ja 5 tulolla eli luvulla 15.

Lukuja on kaikkiaan 30 kpl.

Kolmella jaollisia ovat luvut	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 ja 30
Viidellä jaollisia ovat luvut	5, 10, 15, 20, 25 ja 30
Yhteiset luvut ovat	15 ja 30

P(luku on jaollinen kolmella tai viidellä)

= P(jaollinen kolmella) + P(jaollinen viidellä) – P(jaollinen kolmella ja viidellä)

$$=\frac{10}{30}+\frac{6}{30}-\frac{2}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

Vast. P(Luku on jaollinen kolmella tai viidellä) = $\frac{7}{15}$

Toisin: Olisi voitu myös laskea suotuisat alkeistapaukset, jotka ovat 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27 ja 30 (yhteensä 14 ja kaikkiaan alkeistapauksia on 30). Tällöin

P(luku on jaollinen kolmella tai viidellä) $=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}=0,4666\ldots\approx 46,7\%$

Ehdollinen todennäköisyys

Jos tapahtumat A ja B eivät ole riippumattomia tapahtumia, niin tapahtuman B ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys tapahtumalle B sillä ehdolla, että tapahtuma A on jo tapahtunut ja se merkitään $P(B|A)$ (lue” tapahtuman B todennäköisyys ehdolla A”)

Ehdollinen todennäköisyys $P(B|A)=\dfrac{P(A\text{ ja }B)}{P(A)}$, $P(A)\neq 0$ (nollalla ei voi jakaa)

Jos laatikosta, jossa on 4 valkoista ja 6 mustaa palloa, nostetaan kaksi palloa ja tapahtuma A = ”ensimmäinen pallo on valkoinen” ja B = ”toinen pallo on valkoinen”. Tällöin $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=0,4=40\%$ ja $P(B|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\approx 33,3\%$ tai suoraan

$$P(B|A)=\frac{P(A\text{ ja }B)}{P(A)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}}{\frac{4}{10}}=\frac{1}{3}.$$

Tapahtumien riippumattomuus

Tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomia, jos toisen tapahtuman todennäköisyys pysyy samana sillä ehdolla, että toinen tapahtuma tapahtuu.

Määritelmän mukaan tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomia, kun

$$P(A) = P(A|B);\ P(A) > 0 \text{ ja } P(B) > 0$$

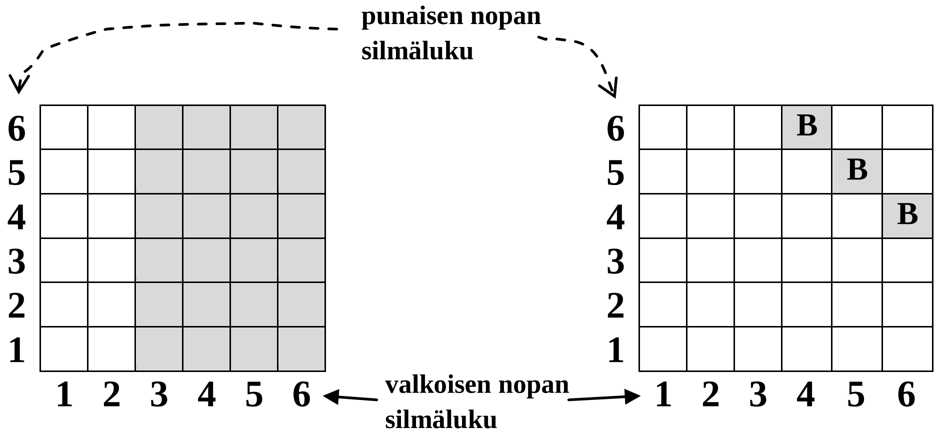
tai

$$P(A) = 0 \text{ tai } P(B) = 0$$

Merkintä $P(A) = P(A|B)$ tarkoittaa, että tapahtuman A todennäköisyys on yhtä suuri kuin tapahtuman A todennäköisyys, kun tapahtuma B on tapahtunut.

Esim. 6.21. Heitetään valkoista ja punaista noppaa. Olkoon A = ”valkoisella nopalla saadaan vähintään silmäluku 3” ja B = ” silmälukujen summa on 10” Ovatko tapahtumat A ja B toisistaan riippumattomia?

Ratkaisu: Lasketaan tapahtumien $P(A)$ ja $P(A|B)$ todennäköisyydet. Tehdään taulukko, johon merkitään vaakariville valkoisen nopan silmäluvut ja pystyriville punaisen nopan silmäluvut.



$$P(A) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \qquad P(A|B) = \frac{3}{3} = 1$$

Vast. Tapahtumat eivät ole toisistaan riippumattomia, koska $P(A) \neq P(A|B)$

Erillisten tapahtumien kertolaskusääntö

Jos tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomat, niin todennäköisyys sille, että molemmat tapahtuvat, on tapahtuman A ja tapahtuman B todennäköisyyksien tulo.

$$\boxed{P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)}$$

missä ”A ja B” tarkoittaa tapahtumaa ”sekä A että B tapahtuvat”

Esim. 6.22. Korissa A on 3 punaista ja 2 vihreää palloa. Korissa B on 4 punaista ja 5 sinistä palloa. Nostetaan kummastakin yksi pallo. Millä todennäköisyydellä molemmat pallot ovat punaisia?

Ratkaisu: P(saadaan korista A ja B punainen pallo)

= P(korista A punainen pallo) • P(korista B punainen pallo) $= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5} \cdot \frac{4}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{4}{15}$

Vast. Todennäköisyys, että saadaan punainen pallo korista A ja B, on $\frac{4}{15}$.

Yleinen kertolaskusääntö

Jos tapahtumat A ja B eivät ole riippumattomia, niin silloin toisen tapahtuman todennäköisyyteen vaikuttaa se, että onko toinen tapahtunut aikaisemmin vai ei.

$$\boxed{P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

Esim. 6.23. Laatikosta, jossa on 3 punaista ja 7 vihreää palloa, nostetaan 2 palloa. Millä todennäköisyydellä **a)** molemmat ovat punaisia **b)** ensimmäinen on punainen ja toinen vihreä?

Ratkaisu: **a)** Merkitään A = ” Ensimmäinen pallo on punainen.” ja B = ” Toinen pallo on punainen.”. Tällöin $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{1}{15}$

b) Merkitään A = ” Ensimmäinen pallo on punainen.” ja B = ” Toinen pallo on vihreä.”. Tällöin $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{10} \cdot \frac{7}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{7}{30}$

Vast. **a)** P(molemmat pallot punaisia) = $\frac{3}{10}$ **b)** P(ensin pun. ja sitten vihreä pallo) $= \frac{7}{30}$

Esim. 6.24. Laatikosta, jossa oli 3 punaista, 5 sinistä, 4 vihreää ja 6 keltaista palloa, nostetaan umpimähkään 3 palloa. Laske millä todennäköisyydellä saadaan
a) kolme sinistä palloa **b)** ensin punainen, sitten vihreä ja lopuksi keltainen pallo
c) 2 punaista ja yksi sininen pallo?

Ratkaisu: **a)** P(kolme sinistä palloa) = P(1. pallo ja 2. pallo ja 3. pallo on sininen)

$$= \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{17} \cdot \frac{3}{16} = \frac{5}{408} = 0{,}01225 \approx 1{,}2\%$$

b) P(1. pallo on punainen ja 2. on vihreä ja 3. pallo on sininen)

$$= \frac{3}{18} \cdot \frac{4}{17} \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{408} = 0{,}01225 \approx 1{,}2\%$$

c) P(1. ja 2. pallo on punainen ja 3. pallo on sininen tai 1. pallo on punainen ja 2. pallo on sininen ja 3. pallo on punainen tai 1. pallo on sininen ja 2. ja 3. pallo on punainen)

$$= \frac{3}{18} \cdot \frac{2}{17} \cdot \frac{5}{16} + \frac{3}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{2}{16} + \frac{5}{18} \cdot \frac{3}{17} \cdot \frac{2}{16} = 3 \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{2}{17} \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{272} = 0{,}01838 \approx 1{,}8\%$$

Vast. **a)** 1,2% **b)**1,2% **c)** 1,8%

Huomautus: Edellisen esimerkin c-kohdan tyyppisessä tehtävässä on syytä olla tarkkana, ettei oleta väärin, että pallot pitää nostaa mainitussa järjestyksessä. Tehtävän hahmottamista auttaa esimerkiksi se, että merkitsee eri vaihtoehdot, jossa on 2 punaista ja yksi sininen pallo paperille seuraavasti:

PPS, PSP, SPP, jossa P = punainen pallo ja S = sininen pallo

Komplementtitapahtuma eli vastatapahtuma

Jokaiselle tapahtumalle A on vastatapahtuma eli komplementtitapahtuma ”A ei tapahdu”. Vastatapahtuma merkitään $\bar{A}$.

Tapahtuma A ja sen vastatapahtuma $\bar{A}$ sisältävät yhdessä kaikki alkeistapaukset, jolloin tapahtuman ”A tapahtuu tai sen vastatapahtuma $\bar{A}$ tapahtuu” on varma tapahtuma eli sen todennäköisyys on 1. Näin ollen saamme

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ josta saadaan } P(A) = 1 - P(\bar{A})}$$

Joskus varsinaisen tapahtuman todennäköisyyden laskeminen on työlästä tai jopa mahdotonta rajallisessa ajassa ja silloin kannattaa kokeilla ratkaista tehtävä vastatapahtuman avulla.

Vastatapahtumaa kannattaa kokeilla tapauksissa, jossa käytetään sanoja enintään, korkeintaan, vähintään ja ainakin.

Enintään ja korkeintaan ovat synonyymejä sekä vähintään ja ainakin ovat synonyymejä keskenään.

enintään 3 (korkeintaan 3) tarkoittaa 0, 1, 2 tai 3

vähintään 2 (ainakin 2) tarkoittaa 2, 3, 4, ...

Esim. 6.25. Kirjoita vastatapahtuma tapahtumalle.
a) A = ”Saadaan vähintään 2 viitosta kuudella nopan heitolla”
c) A = ”Viisilapsisessa perheessä korkeintaan 3 lasta on tyttöjä.”

Ratkaisu: **a)** Viitosten lukumäärä voi olla 0,1,2,3,4,5,6.

Saadaan vähintään 2 viitosta tarkoittaa, että viitosia tulee 2, 3, 4, 5 tai 6.

Tällöin $\underbrace{\boxed{0,\ 1,}}_{\bar{A}}\ \underbrace{\boxed{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6}}_{A}$

Vast. Vastatapahtuma: $\bar{A} =$ Saadaan enintään (korkeintaan) yksi viitonen.

b) Tyttöjen lukumäärä voi olla 0, 1, 2, 3, 4, 5

Korkeintaan kolme tyttöä tarkoittaa, että tyttöjä on 0, 1, 2 tai 3.

Tällöin $\underbrace{\boxed{0,\ 1,\ 2,\ 3,}}_{A}\ \underbrace{\boxed{4,\ 5,}}_{\bar{A}}$

Vast. $\bar{A} =$ ”Saadaan ainakin (vähintään) 4 tyttöä”

Toistokoe

Toistokokeessa tapahtuman A todennäköisyys pysyy kullakin toistolla samana. Esimerkki toistokokeesta on nopanheitto, jossa noppaa heitetään monta kertaa. Mutta esimerkiksi pallojen nostaminen laatikosta, kun palloa ei palauteta laatikkoon takaisin, ei ole toistokoe, sillä tapahtuman A todennäköisyys riippuu edellisestä tapahtumasta ja näin ollen todennäköisyys ei pysy samana.

Jos kokeessa, joka toistetaan *n* kertaa, tapahtuman A todennäköisyys on p, niin silloin komplementtitapahtuman $\overline{A}$ todennäköisyys $q = 1 - p$.

$$\boxed{\text{P(tapahtuma A esiintyy täsmälleen k kertaa)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

Esim. 6.26. Seitsemän vuorokauden sääennusteen mukaan todennäköisyys, että jonakin tiettynä päivänä sataa, on 40 %. Laske millä todennäköisyydellä viikon aikana sataa **a)** kolmena päivänä **b)** viitenä päivänä **c)** enintään yhtenä päivänä **d)** korkeintaan viitenä päivänä?

Ratkaisu: *P*(sataa) = 0,4 ja *P*(ei sada) = 0,6

a) $\text{P(sataa tasan kolmena päivänä)} = \binom{7}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^4 = 0,290304 \approx 29,0\%$

b) $\text{P(sataa tasan viitenä päivänä)} = \binom{7}{5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^2 = 0,0774144 \approx 7,7\%$

c) P(sataa enintään yhtenä päivänä)
= P (ei sada yhtenä päivänäkään tai sataa tasan yhtenä päivänä)

$$= \binom{7}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^6 = 0,1586304 \approx 15,9\%$$

d) P(sataa korkeintaan viitenä päivänä) = 1 – P (sataa ainakin kuutena päivänä)

= 1 – P(sataa kuutena tai seitsemänä päivänä)

$$= 1 - \left(\binom{7}{6} \cdot 0,4^6 \cdot 0,6^1 + \binom{7}{7} \cdot 0,4^7 \cdot 0,6^0 \right) = 0,9811584 \approx 98,1\%$$

Vast. **a)** 29 % **b)** 7,7 % **c)** 15,9 % **d)** 98,1 %

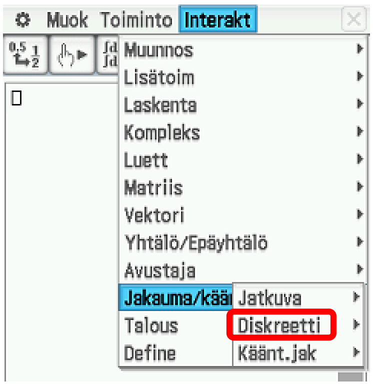
ClassPadilla:

Esim. 6.27. **a)** Kolmen vuorokauden sääennusteen mukaan sateen todennäköisyys on 23% joka päivä. Millä todennäköisyydellä vettä sataa tasan kahtena päivänä?

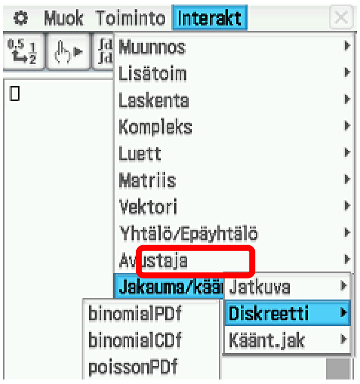
b) Seitsemän vuorokauden sääennusteen mukaan todennäköisyys, että jonakin tiettynä päivänä sataa, on 40 %. Laske millä todennäköisyydellä viikon aikana sataa tasan kolmena päivänä

Ratkaisu: **a)**

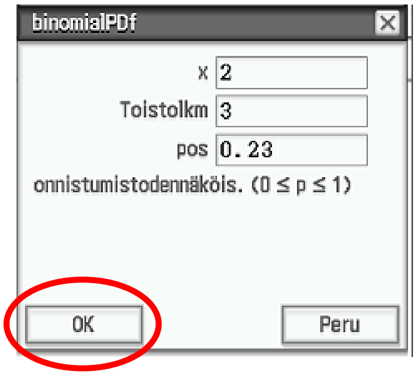
1. Valitse Interakt, Jakauma/käänt.jakauma, Diskreetti



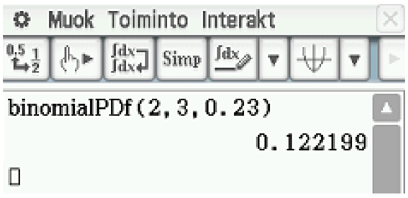
2. Valitse binomialPDf



3. Täytä valintaikkuna kuten alla on tehty ja valitse OK.

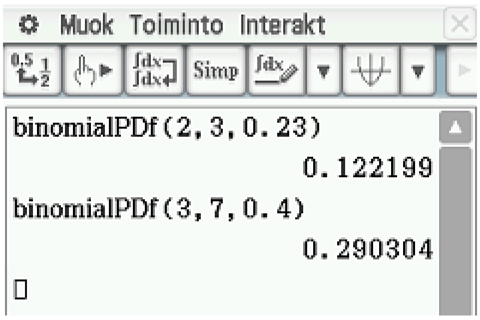


4. Vast. 12,2% todennäköisyys



5. b) –kohta kuten a-kohta paitsi eri arvot

6. Vast. 29,0% todennäköisyydellä



6.10. Diskreetti todennäköisyysjakauma

Todennäköisyysjakauman muuttuja voi olla diskreetti tai jatkuva. Diskreetti muuttuja voi saada vain tiettyjä erillisiä arvoja (nopan silmäluvut). Jatkuva muuttuja voi saada kaikki arvot tietyltä välilt (ihmisen pituus). Muuttujan tyypin mukaan puhutaan joko diskreetistä tai jatkuvasta jakaumasta.

Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ (merkitään myös X)

Satunnaismuuttuja on funktio, joka liittää johonkin tiettyyn tapahtumaan jonkun tietyn lukuarvon. Funktiosta käytetään satunnaismuuttujaa nimitystä historiallisista syistä. Satunnaismuuttujaa merkitään kirjaimella X tai $\underline{x}$. Jotta satunnaiskokeen tuloksia voidaan käsitellä matemaattisesti, niin satunnaiskokeen alkeistapauksille täytyy sopia joku reaaliluku.

Rahanheitossa voidaan sopia esimerkiksi, että satunnaismuuttuja $\underline{x}$ kuvaa kruunan luvuksi 1 ja klaavan luvuksi 2.

Nopanheitossa voidaan taas sopia, että satunnaismuuttuja $\underline{x}$ kuvaa nopan silmäluvut vastaaviksi kokonaisluvuiksi 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Otosavaruus eli perusjoukko = mahdollisten alkeistapauksien muodostama joukko.

Rahanheitossa otoavaruus eli perusjoukko $E = \{\text{kruuna, klaava}\}$.

Nopanheitossa otosavaruus eli perusjoukko $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ on funktio otosavaruudesta E reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$

$$\underline{x} : E \to \mathbb{R}$$

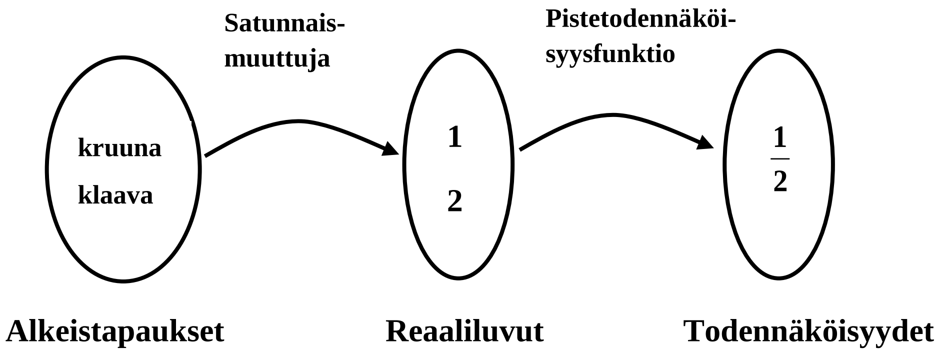
Pistetodennäköisyysfunktio

Satunnaismuuttuja on diskreetti, jos se voi saada vain erillisiä, tiettyjä arvoja x_i. Jokaiseen erilliseen arvoon x_i voidaan liittää vastaavan alkeistapauksen todennäköisyys p_i eli $f(x_i) = p_i$, jolloin saadaan pistetodennäköisyysfunktioksi p

$$p : \mathbb{R} \to [0,1],\ p(x) = P(\underline{x} = x)$$

Koska kaikkien tapahtumien todennäköisyys on vähintään 0 (mahdoton tapahtuma) ja enintään 1 (varma tapahtuma), niin siksi pistetodennäköisyysfunktion saamat arvot ovat välillä [0,1] ja $\sum p_i = 1$.

Alla on havainnollistettu mikä ero on satunnaismuuttujalla ja pistetodennäköisyysfunktiolla.



Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ jakauma muodostuu satunnaismuuttujan saamista arvoista ja niiden pistetodennäköisyyksistä.

Kertymäfunktio

Kertymäfunktion arvo kertoo sen todennäköisyyden, millä satunnaismuuttujan arvo on enintään x. Kertymäfunktio F määrää täysin jakauman.

$$F:\mathbb{R}\to[0,1],\ F(x)=P(\underline{x}\le x)$$

Diskreetin kertymäfunktion arvo $F(x)$ saadaan laskemalla yhteen ne pistetodennäköisyydet p_i, joita vastaavat satunnaismuuttujan arvot x_i eivät ylitä lukua x.

$$F(x_i)=P(\underline{x}\le x_i)=p_1+p_2+p_3+\dots p_i=\sum_{k=1}^{i} p_i$$

Diskreetin kertymäfunktion määritelmästä seuraa esimerkiksi

$$P(\underline{x}\le 10)=F(10)$$

$$P(\underline{x}<7)=P(\underline{x}\le 6)=F(6)$$

$$P(\underline{x}>8)=1-P(\underline{x}\le 8)=1-F(8)$$

$$P(1<\underline{x}\le 7)=P(\underline{x}\le 7)-P(\underline{x}\le 1)=F(7)-F(1)$$

Esim. 6.28. Noppaa heitetään kaksi kertaa. Olkoon satunnaismuuttuja $\underline{x}$ kuutosten määrä.
a) Laske pistetodennäköisyydet p_0, p_1 ja p_2. **b)** Laske yhteen pistetodennäköisyydet.
c) Määritä pistetodennäköisyysfunktio. **d)** Määritä kertymäfunktio.

Ratkaisu: **a)** Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ eli kuutosten lukumäärä voi olla 0, 1 tai 2. Lasketaan satunnaismuuttujan arvoja vastaavat pistetodennäköisyydet p_i

$$p_0 = P(\underline{x} = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$p_1 = P(\underline{x} = 1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{10}{36}$$

$$p_2 = P(\underline{x} = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

b) Pistetodennäköisyyksien summa $\sum p_i = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{25}{36} + \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = 1$

c) Pistetodennäköisyysfunktio $p(x) = P(\underline{x} = x) = \begin{cases} \frac{25}{36}, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{10}{36}, & \text{kun } x = 1 \\ \frac{1}{36}, & \text{kun } x = 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

d) Kertymäfunktio $F(x) = P(\underline{x} \le x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 0 + \frac{25}{36} = \frac{25}{36}, & \text{kun } 0 \le x < 1 \\ \frac{25}{36} + \frac{10}{36} = \frac{35}{36}, & \text{kun } 1 \le x < 2 \\ \frac{35}{36} + \frac{1}{36} = 1, & \text{kun } x \ge 2 \end{cases}$

Vast. **a)** $p_0 = \frac{25}{36}, p_1 = \frac{10}{36}$ ja $p_2 = \frac{25}{36}$ **b)** $\sum p_i = 1$

Esim. 6.29. Tilastojen mukaan tuote on viallinen 20 % todennäköisyydellä. Liikkeestä ostetaan kolme tuotetta. Viallisten tuotteiden lukumäärä on satunnaismuuttuja.

a) Muodosta satunnaismuuttujan jakauma ja havainnollista sitä janadiagrammilla.
b) Määritä satunnaismuuttujan pistetodennäköisyysfunktio ja piirrä sen kuvaaja.
c) Määritä satunnaismuuttujan kertymäfunktio ja piirrä sen kuvaaja
d) Laske todennäköisyydet $P(\underline{x} \le 2)$, $P(\underline{x} > 2)$ ja $P(1 < \underline{x} \le 3)$

Ratkaisu: **a)** Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ eli viallisten tuotteiden lukumäärä voi olla 0, 1, 2 tai 3. Lasketaan satunnaismuuttujan arvoja vastaavat pistetodennäköisyydet

$$p_0 = P(\underline{x}=0) = 0,8^3 = 0,512 = 51,2\%$$

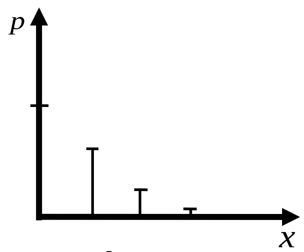
$$p_1 = P(\underline{x}=1) = \binom{3}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^2 = 0,384 = 38,4\%$$

$$p_2 = P(\underline{x}=2) = \binom{3}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^1 = 0,096 = 9,6\%$$

$$p_3 = P(\underline{x}=3) = 0,2^3 = 0,008 = 0,8\%$$

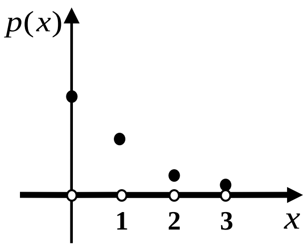
satunnaismuuttujan $\underline{x}$ jakauma

x	p
0	0,512
1	0,384
2	0,096
3	0,008



janadiagrammi

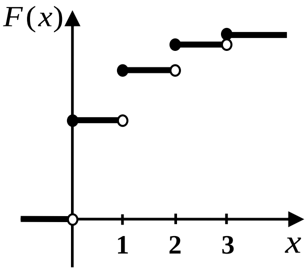
b) Pistetodennäköisyysfunktio $p(x) = P(\underline{x} = x) = \begin{cases} 0,512; & \text{kun } x = 0 \\ 0,384; & \text{kun } x = 1 \\ 0,096; & \text{kun } x = 2 \\ 0,008; & \text{kun } x = 3 \\ 0; & \text{muulloin} \end{cases}$



Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja

c) Kertymäfunktio on

$$F(x) = P(\underline{x} \le x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 0 + 0,512 = 0,512; & \text{kun } 0 \le x < 1 \\ 0,512 + 0,384 = 0,896; & \text{kun } 1 \le x < 2 \\ 0,896 + 0,096 = 0,992; & \text{kun } 2 \le x < 3 \\ 0,992 + 0,008 = 1; & \text{kun } x \ge 3 \end{cases}$$



Kertymäfunktion kuvaaja

Diskreetti satunnaismuuttuja voi saada vain erillisiä arvoja ja siksi myös diskreetin jakauman kertymäfunktion kuvaaja kasvaa hyppäyksittäin ja näin kuvaaja muistuttaa portaita, joka päättyy arvoon 1.

d) $P(\underline{x} \le 2) = F(2) = 0,992$

$$P(\underline{x} > 2) = 1 - P(\underline{x} \le 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,992 = 0,008$$

$$P(1 < \underline{x} \le 3) = P(\underline{x} \le 3) - P(\underline{x} \le 1) = F(3) - F(1) = 1 - 0,896 = 0,104$$

Huomautus: Edellä kysytyt todennäköisyydet laskettiin kertymäfunktiota hyväksi käyttäen. Todennäköisyydet voidaan laskea myös pistetodennäköisyysfunktion avulla

$$P(\underline{x} \le 2) = p_0 + p_1 + p_2 = 0,512 + 0,384 + 0,096 = 0,992$$

$$P(\underline{x} > 2) = p_3 = 0,008$$

$$P(1 < \underline{x} \le 3) = p_2 + p_3 = 0,096 + 0,008 = 0,104$$

Diskreetin satunnaismuuttujan tunnusluvut

Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ keskiarvo eli odotusarvo $E(\underline{x})$ eli μ

$$E(\underline{x}) = \mu = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ keskihajonta $D(\underline{x})$ eli σ

$$D(\underline{x}) = \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(\underline{x}))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2}$$

Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ varianssi $D(\underline{x})^2$ eli σ^2

$$D(\underline{x})^2 = \sigma^2 = p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + p_2 \cdot (x_2 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - \mu)^2$$

Esim. 6.30. Pelissä 5 euron panoksella voi voittaa 20 €, 10 € tai 5 € seuraavilla todennäköisyyksillä 2 %, 3 % ja 5 %. Laske voiton **a)** odotusarvo **b)** varianssi ja **c)** keskihajonta.

Ratkaisu: Koska pelaaja joutuu sijoittamaan peliin 5 euroa, niin todelliset voitot ja niiden todennäköisyydet ovat seuraavat.

todellinen voitto	15 €	5 €	0 €	– 5 €
todennäköisyys	0,02	0,03	0,05	0,90

Huomaa, että 20 euron voitto on todellisuudessa vain 15 euroa, sillä pelaaja menettää peliin sijoittamansa 5 euroa. Todennäköisyys, että pelaaja häviää sijoittamansa 5 euroa, on 100 % - 2 % - 3 % - 5 % = 90 %, jolloin todellinen voitto on – 5 euroa

a) Voiton odotusarvo $\mathrm{E}(\underline{x}) = \mu = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

$$= 0,02 \cdot 15€ + 0,03 \cdot 5€ + 0,05 \cdot 0€ + 0,9 \cdot (-5€) = -4,05€$$

Negatiivinen voiton odotusarvo merkitsee, että pitkissä pelisarjoissa pelaaja häviää noin 4,05 euroa peliä kohti, joka on täysin ymmärrettävää. Eihän kukaan järjestäisi pelejä omaksi tappiokseen.

b) Varianssi $\mathrm{D}(\underline{x})^2 = \sigma^2 = p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + p_2 \cdot (x_2 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - \mu)^2$

$$= 0,02 \cdot (15€ - (-4,05€))^2 + 0,03 \cdot (5€ - (-4,05€))^2 + 0,05 \cdot (0€ - (-4,05€))^2 + 0,9 \cdot (-5€ - (-4,05€))^2$$
$$= 84,2475€$$

c) Käytetään keskihajonnan laskemiseen hyväksi edellä laskettua varianssin arvoa

$$D(\underline{x}) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{84,2475} = 9,178643691 \approx 9,2$$

Keskihajonta kertoo, miten laajalle alueelle satunnaismuuttujan arvot ovat jakautuneet odotusarvon ympärille.

Binomijakauma

Binomijakaumassa toistetaan n kertaa samaa koetta, jonka todennäköisyys on p ja komplementtitapahtuman todennäköisyys on q.

Binomijakautuneen satunnaismuuttujan $\underline{x} \sim Bin(n, p)$

odotusarvo $E(\underline{x}) = \mu = np$
varianssi $(\mathrm{D}(\underline{x}))^2 = \sigma^2 = npq$
keskihajonta $\mathrm{D}(\underline{x}) = \sigma = \sqrt{npq}$

Esim. 6.31. Ruotsin kokeessa luetun ymmärtämiskokeessa on 25 kysymystä, jossa jokaisessa on 3 vaihtoehtoa ja vain yksi niistä on oikein. Japanilainen vaihto-oppilas osallistuu kokeeseen ja arvaa kaikki vastaukset.
Laske **a)** odotusarvo **b)** varianssi ja **c)** keskihajonta.

Ratkaisu: Olkoon satunnaismuuttuja $\underline{x}$ oikeiden vastausten lukumäärä. Kyseessä on toistokoe, jossa $n = 25$ ja $p = \frac{1}{3}$ sekä $\underline{x} \sim Bin(25, \frac{1}{3})$.

a) Odotusarvo $\mathrm{E}(x) = \mu = 25 \cdot \frac{1}{3} = \frac{25}{3} = 8{,}33333 \approx 8$

Todennäköisimmin vaihto-oppilas kieltä osaamattomana saa 8 kysymystä 25:stä oikein!

b) Varianssi $(\mathrm{D}(x))^2 = \sigma^2 = npq = 25 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{50}{9} = 5{,}555555$

c) Keskihajonta $\mathrm{D}(x) = \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{25 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{50}{9}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{9}} = \frac{5\sqrt{2}}{3} = 2{,}3570226$

6.11. Jatkuva todennäköisyysjakauma

Jatkuvan satunnaismuuttujan arvojoukossa on äärettömän monta lukua ja siksi jokaisen yksittäisen arvon todennäköisyys voidaan tulkita nollaksi. Siksi pistetodennäköisyysfunktion tilalle otetaan käyttöön tiheysfunktio $f(x)$.

Tiheysfunktio

Tiheysfunktion $f(x)$ on toteutettava seuraavat kaksi ehtoa:

1. $f(x) \geq 0$ (funktion kuvaaja on aina $x-$ akselilla tai sen yläpuolella)

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (funktion kuvaajan ja $x-$akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on 1)

Esim. 6.32. Määritä vakio a niin, että funktio $f(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$ käy tiheysfunktioksi.

Ratkaisu: **Ehto 1:** Kun $x < 0$ tai $x > 1$, niin $f(x) = 0$

Kun $0 \leq x \leq 1$, niin $f(x) = 2x + a$ on nouseva suora ($k = 2 > 0$), joka leikkaa $y-$ akselin pisteessä $(0, a)$ ja siksi $a \geq 0$.

Ehto 2: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\infty} f(x)dx = 0 + \int_{0}^{1}(2x + a)dx + 0$

$= \int_{0}^{1}(2x + a)dx = \bigg/_{0}^{1}(x^2 + ax) = (1 + a) - (0 + 0) = a + 1$

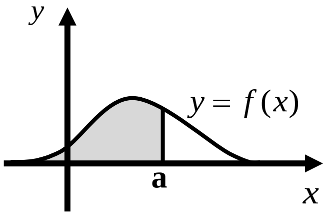
Näin saadaan yhtälö $a + 1 = 1$, josta $a = 0$ (kelpaa, koska ehdosta 1 saatiin $a \geq 0$)

Vast. $a = 0$

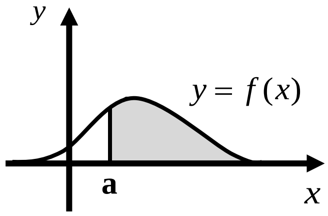
Jatkuvan satunnaismuuttujan todennäköisyys tiheysfunktion avulla

Todennäköisyys $P(\underline{x} \le a)$ saadaan laskemalla tiheysfunktion, suoran $x = a$ ja x – akselin väliin jäävän alueen pinta – ala ja siksi $P(\underline{x} = a) = 0$.

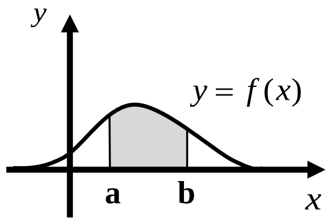
Alla olevat kuvat havainnollistavat tiheysfunktion ja x – akselin väliin jäävän pinta-alan ja todennäköisyyden välistä riippuvuutta.



$$P(\underline{x} \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$



$$P(\underline{x} \ge a) = \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$



$$P(a \ge \underline{x} \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Esim. 6.33. Jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio on $f(x) = \begin{cases} -0,5x + 1,5; & \text{kun } 1 \le x \le 3 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$.

Laske **a)** $P(\underline{x} \le 1,5)$ **b)** $P(\underline{x} \ge 2)$ **c)** $P(1,75 \le \underline{x} \le 2,5)$ **d)** $P(0 < \underline{x} < 2)$ **e)** $P(\underline{x} = 1,5)$

Ratkaisu: **a)** $P(\underline{x} \le 1,5) = \int_{-\infty}^{1,5} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{1,5} f(x)dx = 0 + \int_{1}^{1,5} (-0,5x + 1,5)dx = \frac{7}{16}$

b) $P(\underline{x} \ge 2) = \int_{2}^{\infty} f(x)dx = \int_{2}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{\infty} f(x)dx = \int_{2}^{3} (-0,5x + 1,5)dx + 0 = \frac{1}{4}$

c) $P(1,75 \le \underline{x} \le 2,5) = \int_{1,75}^{2,5} (-0,5x + 1,5)dx = \frac{21}{64}$

d) $P(0 < \underline{x} < 2) = \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = 0 + \int_{1}^{2} (-0,5x + 1,5)dx = \frac{3}{4}$

e) $P(\underline{x} = 1,5) = \int_{1,5}^{1,5} (-0,5x + 1,5)dx = 0$

Jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan kertymäfunktio

Jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio on funktio

$$F:\mathbb{R}\to[0,1],\ F(x)=P(\underline{x}\le x)$$

Kertymäfunktio $F(x)$ on kasvava, jatkuva ja sen arvojoukko on $[0,1]$.

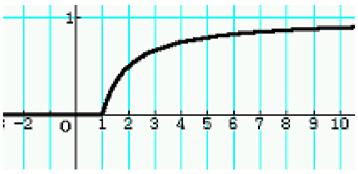
Kertymäfunktiolle $F(x)$ on voimassa seuraavat raja-arvot:

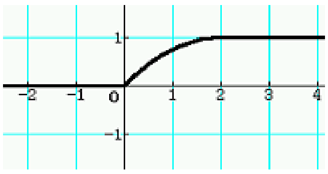
$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0 \text{ ja } \lim_{x\to\infty}F(x)=1$$

Esimerkiksi alla olevat kaksi funktiota $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ käyvät jatkuvan satunnaismuuttujan kertymäfunktioksi.

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x\le 1\\ 1-\dfrac{1}{x}, & \text{kun } x>1\end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0\\ -\dfrac{1}{4}x^2+x, & \text{kun } 0\le x\le 2\\ 1, & \text{kun } x>2\end{cases}$$





$F_1(x)$ on kasvava

Arvojoukko on $[0,1]$

$$\lim_{x\to-\infty}F_1(x)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}F_1(x)=1$$

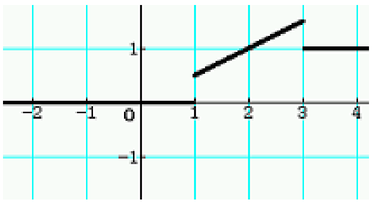
$F_2(x)$ on kasvava

Arvojoukko on $[0,1]$

$$\lim_{x\to-\infty}F_2(x)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}F_2(x)=1$$

Mutta esimerkiksi funktio $F_3(x)=\begin{cases}0; & \text{kun } x<1\\ 0,5x; & \text{kun } 1\le x\le 3\\ 1; & \text{kun } x>3\end{cases}$ ei käy jatkuvan satunnaismuuttujan kertymäfunktioksi.



Jos tunnetaan jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio $F(x)$, niin todennäköisyydet on helppo laskea (katso seuraava esimerkki).

Jatkuvan kertymäfunktion määritelmästä seuraa esimerkiksi

$$P(\underline{x} \le 10) = F(10)$$

$$P(\underline{x} < 7) = P(\underline{x} \le 7) = F(7)$$

$$P(\underline{x} > 8) = 1 - P(\underline{x} \le 8) = 1 - F(8)$$

$$P(1 < \underline{x} \le 7) = P(\underline{x} \le 7) - P(\underline{x} \le 1) = F(7) - F(1)$$

Esim. 6.34. Olkoon erään jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{25}x^2, & \text{kun } 0 \le x \le 5 \\ 1, & \text{kun } x > 5 \end{cases}$$

Laske **a)** $P(\underline{x} \le 1)$ **b)** $P(\underline{x} < 3)$ **c)** $P(\underline{x} > 2)$ **d)** $P(1 \le \underline{x} \le 4)$ **e)** $P(2 < \underline{x} < 5)$

Ratkaisu: **a)** $P(\underline{x} \le 1) = F(1) = \frac{1}{25} \cdot 1^2 = \frac{1}{25}$

b) $P(\underline{x} < 3) = P(\underline{x} \le 3) = F(3) = \frac{1}{25} \cdot 3^2 = \frac{9}{25}$

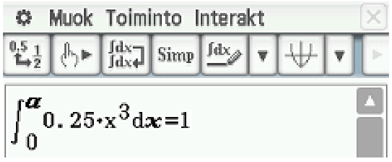
c) $P(\underline{x} > 2) = 1 - P(\underline{x} \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{1}{25} \cdot 2^2 = \frac{21}{25}$

d) $P(1 \le \underline{x} \le 4) = F(4) - F(1) = \frac{1}{25} \cdot 4^2 - \frac{1}{25} \cdot 1^2 = \frac{3}{5}$

e) $P(2 < \underline{x} < 5) = P(2 \le \underline{x} \le 5) = F(5) - F(2) = \frac{1}{25} \cdot 5^2 - \frac{1}{25} \cdot 2^2 = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

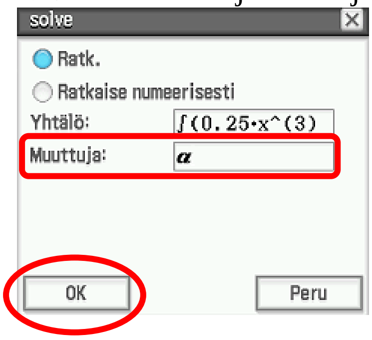
Huomautus: ClassPadilla voidaan myös helposti ratkaista millä ylärajan arvolla funktio kelpaisi tiheysfunktioksi.

1. Pääsovellus-ohjelmassa

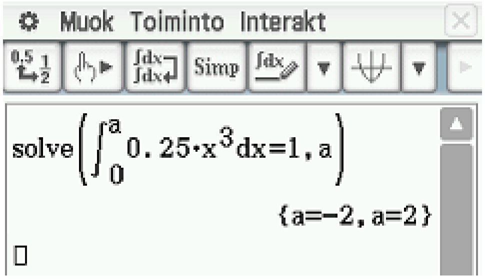


2. Maalaa ja valitse solve- komento

3. Vaihda muuttuja a:ksi ja valitse OK

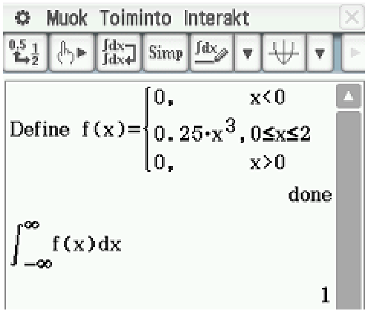


4. Negatiivista arvoa ei voida hyväksyä



Tällöin funktio $f(x) = \begin{cases} 0{,}25x^3; \text{ kun } 0 \le x \le 2 \\ 0; \qquad \text{muulloin} \end{cases}$

sopisi satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktioksi.



Esim. 6.35. Olkoon satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{9}x + a, & \text{kun } 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$.

a) Määritä vakio a. **b)** Muodosta kertymäfunktio $F(x)$ **c)** Laske $P(1 \leq \underline{x} \leq 2)$

Ratkaisu: **a)** Aloitetaan tehtävän ratkaisu poikkeuksellisesti ehdosta 2, jonka mukaan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{2}{9}x+a\right)dx=1 \qquad \Bigg\| \int_{-\infty}^{0}\left(-\frac{2}{9}x+a\right)dx=\int_{3}^{\infty}\left(-\frac{2}{9}x+a\right)dx=0$$

$$\int_{0}^{3}\left(-\frac{2}{9}x+a\right)dx=\Big/_{0}^{3}\left(-\frac{1}{9}x^2+ax\right)=\left(-\frac{1}{9}\cdot 3^2+a\cdot 3\right)-\left(-\frac{1}{9}\cdot 0^2+a\cdot 0\right)=-1+3a=1$$

$$a=\frac{2}{3}$$

Tutkitaan toteutuuko ehto 1 eli onko aina $f(x) \geq 0$.

Kun $0 \leq x \leq 3$, niin $f(x)=-\frac{2}{9}x+\frac{3}{2}$ laskeva suora ja näin funktio saa pienimmän arvonsa, kun $x=3$. Tällöin $f(3)=-\frac{2}{9}\cdot 3+\frac{2}{3}=0$, jolloin ehto 1 toteutuu kaikkialla, sillä, kun $x<0$ tai $x>3$ niin silloin $f(x)=0$.

b) Kun $x<0$, niin tiheysfunktio $f(x)=0$ ja siksi kertymäfunktio $F(x)=0$

Kun $0 \leq x \leq 3$, niin

$$F(x)=\int_{0}^{x}\left(-\frac{2}{9}t+\frac{2}{3}\right)dt=\Big/_{0}^{x}\left(-\frac{1}{9}t^2+\frac{2}{3}t\right)=\left(-\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x\right)-\left(-\frac{1}{9}\cdot 0^2+\frac{2}{3}\cdot 0\right)=-\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x$$

Kun $x>3$, niin kertymäfunktio $F(x)=1$.

Näin saatiin kertymäfunktioksi
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ -\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

c) $P(1 \leq \underline{x} \leq 2)=F(2)-F(1)=\left(-\frac{1}{9}\cdot 2^2+\frac{2}{3}\cdot 2\right)-\left(-\frac{1}{9}\cdot 1^2+\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{3}$

ClassPadilla:

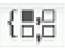
Esim. 6.36. Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio

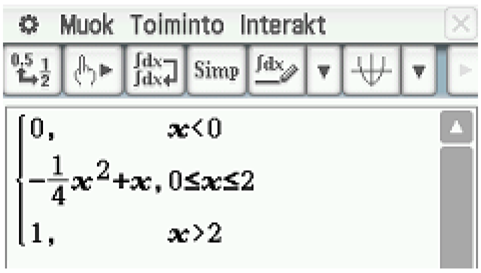
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun} \quad x<0\\ -\dfrac{1}{4}x^2+x, & \text{kun } 0\le x\le 2\\ 1, & \text{kun} \quad x>2\end{cases}$$

Laske kertymäfunktion avulla todennäköisyydet

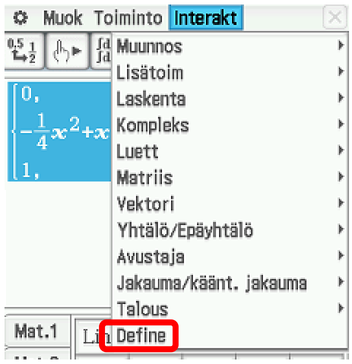
a) $P(\underline{x}\le 1{,}25)$ **b)** $P(0{,}25\le \underline{x}\le 1{,}85)$ **c)** $P(\underline{x}>0{,}75)$

Ratkaisu:

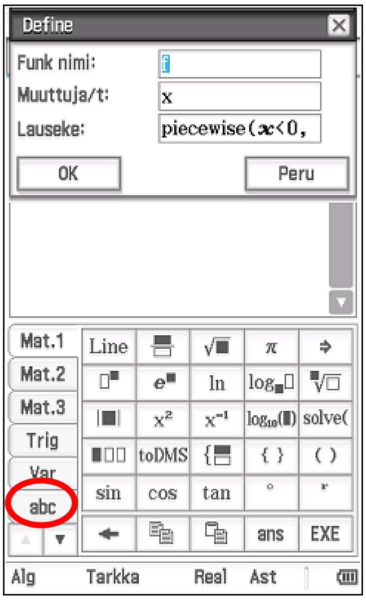
1. Valitse Pääsovelluksessa virtuaali – näppäimistön  välilehdestä  (koske kahdesti) ja kirjoita kuten alla on tehty



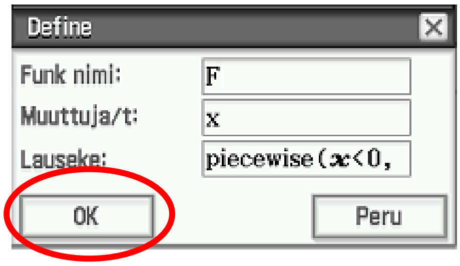
2. Maalaa paloittain määritelty funktio ja valitse komento Define



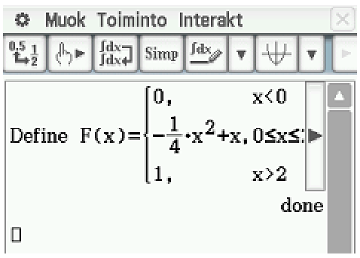
3. Muuta funktion nimi F:ksi. Käytä abc-välilehteä. Muuten tulee virheilmoitus.



4. Valitse OK

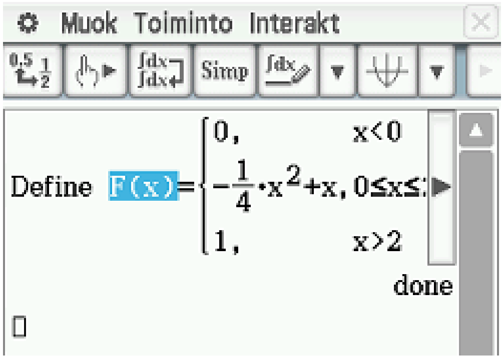


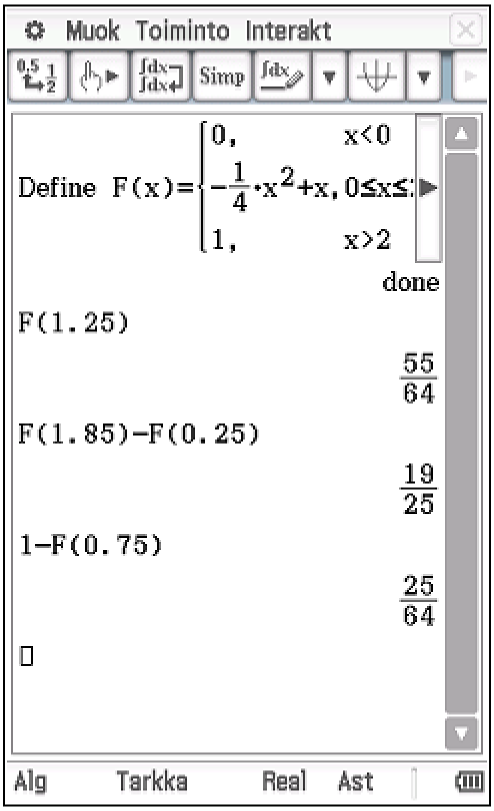
5. Nyt olet määritellyt kertymäfunktion



6. Voit piirtää kuvaajan raahaamalla maalatun F(x) –nimen koordinaatiston päälle.

7. Laske todennäköisyydet suoraan käyttämällä funktion nimeä kuten alla.



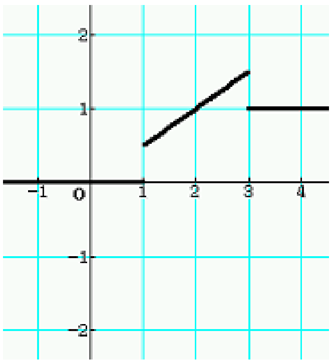


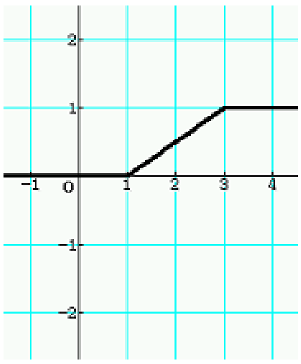
Vast. **a)** $P(\underline{x} \leq 1,25) = \dfrac{55}{64}$

b) $P(0,25 \leq \underline{x} \leq 1,85) = \dfrac{19}{25}$

c) $P(\underline{x} > 0,75) = \dfrac{25}{64}$

Varoitus: Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktion $f(x) = \begin{cases} 0,5; \text{kun } 1 \leq x \leq 3 \\ 0; \quad \text{muulloin} \end{cases}$ kertymäfunktio ei ole $F_1(x) = \begin{cases} 0; & \text{kun} \quad x < 1 \\ 0,5x; & \text{kun } 1 \leq x \leq 3 \\ 1; & \text{kun} \quad x > 3 \end{cases}$, vaan $F_2(x) = \begin{cases} 0; & \text{kun} \quad x < 1 \\ 0,5x - 0,5; & \text{kun } 1 \leq x \leq 3 \\ 1; & \text{kun} \quad x > 3 \end{cases}$


Funktion $F_1(x)$ kuvaaja


Funktion $F_2(x)$ kuvaaja

Jatkuvan satunnaismuttujan tunnusluvut

Alla olevat kaavat löytyvät taulukkokirjasta sivulta 51.

- Odotusarvo $$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$
- Varianssi $$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)dx$$
- Keskihajonta $$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)dx}$$

Esim. 6.37. Erään jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio on $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x; & \text{kun } 0 \le x \le 2 \\ 0; & \text{muulloin} \end{cases}$.

Laske odotusarvo ja keskihajonta.

Ratkaisu: Odotusarvo $$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\, f(x)dx + \int_{0}^{2} x\, f(x)dx + \int_{2}^{\infty} x\, f(x)dx$$

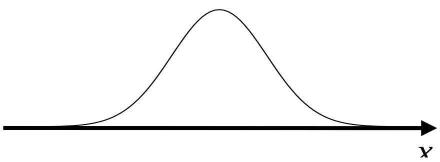
$$= 0 + \int_{0}^{2} x\, f(x)dx + 0 = \int_{0}^{2} x\, f(x)dx = \int_{0}^{2} x \cdot 0{,}5xdx = \frac{4}{3}$$

Keskihajonta $$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)dx} = \sqrt{\int_{0}^{2} (x-\mu)^2\, 0{,}5xdx} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}47$$

6.12. Normaalijakauma

Normaalijakauma on jatkuvista jakaumista tärkein. Normaalijakaumaa kutsutaan myös Gaussin jakaumaksi. Esimerkiksi ihmisen pituus noudattaa normaalijakaumaa.

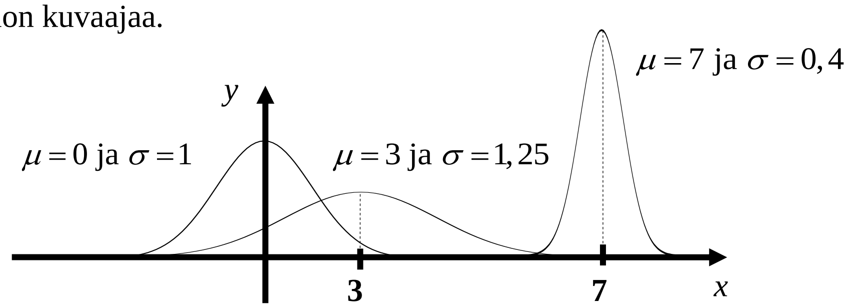
Satunnaismuuttuja noudattaa normaalijakaumaa $N(\mu,\sigma)$, missä μ on odotusarvo ja σ on keskihajonta, jos sen tiheysfunktio on $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ (alla kuva).



Tiheysfunktio $f(x)$ täyttää aina seuraavat kaksi ehtoa $f(x)\geq 0$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

Normaalijakauman kuvaaja

Normaalijakauman kuvaaja on symmetrinen huipun suhteen. Normaalijakauman huippu on aina odotusarvon μ kohdalla. Mitä suurempi normaalijakauman keskihajonta σ on, niin sitä leveämpi tiheysfunktion kuvaaja on ja tietenkin sitä matalampi, sillä pinta-ala $A=1$ (ehto 2). Alla on piirrettynä kolme normaalijakauman tiheysfunktion kuvaajaa.



Normitettu normaalijakauma

Jos odotusarvon $\mu=0$ ja keskihajonta $\sigma=1$, niin silloin normaalijakauman tiheysfunktio $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ sievenee muotoon $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Tällöin satunnaismuuttuja noudattaa normitettua normaalijakaumaa, jota merkitään pienellä kreikkalaisella kirjaimella φ (”fii”).

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Normitetun normaalijakauman kertymäfunktio

Normitetun normaalijakauman tiheysfunktion $\varphi(x)$ kertymäfunktiota merkitään isolla kreikkalaisella kirjaimella Φ (”fii”).

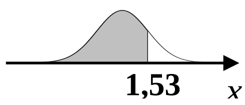
Edellä kappaleessa 9.4.2. käytettiin jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktion $f(x)$ kertymäfunktiota $F(x)$ todennäköisyyksien laskemiseen.

Normaalijakauman tiheysfunktiota $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ tai normitetun normaalijakauman tiheysfunktiota $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ei pystytä integroimaan ja siksi normitetun normaalijakauman kertymäfunktion arvot löytyvät taulukkokirjasta.

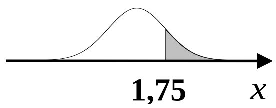
Normitettua normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ todennäköisyyden $P(\underline{x} \le a)$ laskemisessa pitää määrittää pinta-ala, jota rajoittavat Gaussin kellokäyrä, $x-$akseli ja suora $x = a$.

Esim. 6.38. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ noudattaa normitettua normaalijakaumaa eli $\underline{x} \sim N(0,1)$. Laske todennäköisyydet **a)** $P(\underline{x} \le 1,53)$ **b)** $P(\underline{x} \ge 1,75)$ **c)** $P(\underline{x} \le -1,56)$ **d)** $P(\underline{x} \ge -1,70)$ **e)** $P(0,62 \le \underline{x} \le 1,76)$

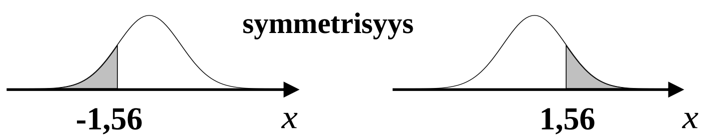
Ratkaisu: **a)** $P(\underline{x} \le 1,53) = \Phi(1,53) = 0,9370$



b) $P(\underline{x} \ge 1,75) = 1 - P(\underline{x} < 1,75)$
$= 1 - \Phi(1,75) = 1 - 0,9599 = 0,0401$



c) $P(\underline{x} \le -1,56) = P(\underline{x} \ge 1,56) = 1 - P(\underline{x} < 1,56) = 1 - \Phi(1,56) = 1 - 0,9406 = 0,0594$



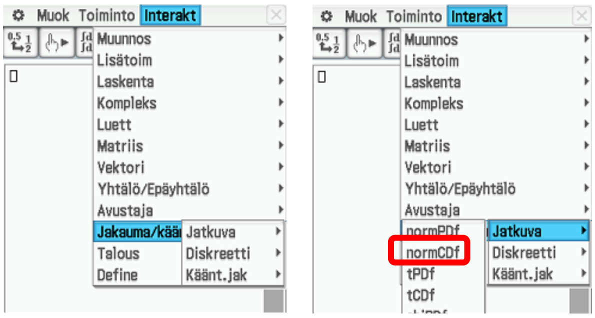
d) $P(\underline{x} \ge -1,70) = P(\underline{x} \le 1,70) = \Phi(1,70) = 0,9554$

e) $P(0,62 \le \underline{x} \le 1,76) = \Phi(1,76) - \Phi(0,62) = 0,9608 - 0,7324 = 0,2284$

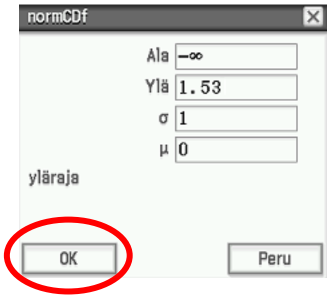
Esim. 6.39. Satunnaismuuttuja X noudattaa normitettua normaalijakaumaa. Määritä ClassPadilla **a)** $P(X \leq 1,53)$ **b)** $P(-0,2 \leq X \leq 1,99)$.

a) Ratkaisu:

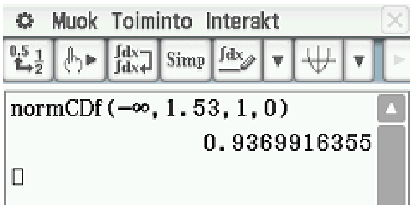
1. Valitse Interakt, Jakauma/käänt.jakauma, Jatkuva ja lopuksi normCDF



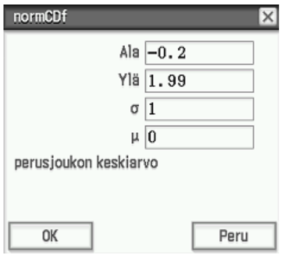
2. Täydennä taulukko ja valitse OK



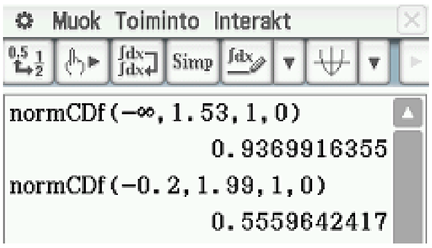
3. Vast. 93,70% todennäköisyydellä



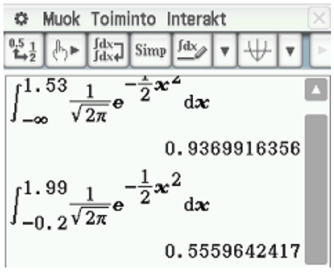
b) Kuten a-kohta paitsi eri arvot



5. Laskimen näyttö näyttää seuraavalta

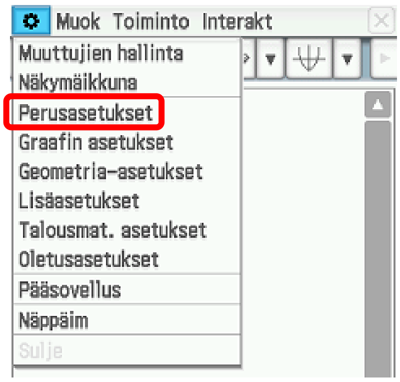


Huomautus: Laskimella voidaan laskea edellä olevat todennäköisyydet myös normaalijakauman tiheysfunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ avulla.

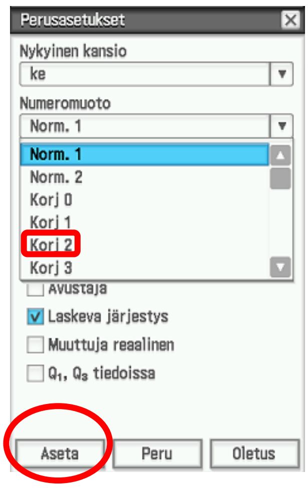


Vinkki: Muutetaan asetuksia niin, että vastaus saadaan kahden desimaalin tarkkuudella.

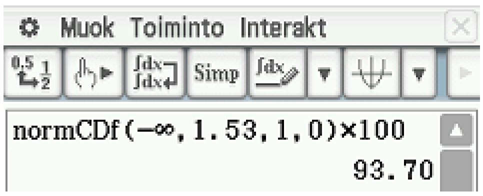
1. Valitse Perusasetukset



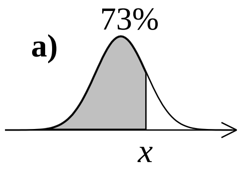
2. Valitse Korj 2 ja Aseta

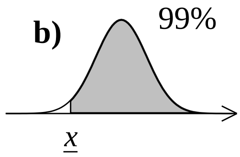


3. Tee kuten esimerkissä 9.17. Lisää lopuksi $\times 100$ saadaksesi vastauksen prosentteina.



Esim. 6.40. Ratkaise x taulukkokirjan avulla ja kun lisäksi tiedämme, että satunnaismuuttuja $\underline{x} \sim N(0,1)$

a)


b)


Ratkaisu: **a)** $P(\underline{x} \le x) = \Phi(x) = 0,73$

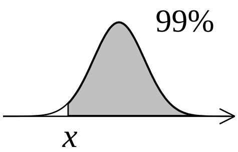
Taulukkokirjan sivulta 61 olevasta normaalijakauman kertymäfunktion taulukosta saadaan, että

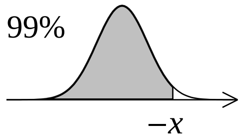
$$\Phi(0,61) = 0,7291 \text{ ja } \Phi(0,62) = 0,7324$$

Koska 0,7291 on lähempänä haettua arvoa 0,73, niin $x = 0,61$.

b) $P(\underline{x} \ge x) = 0,99$

Koska taulukkokirjan normaalijakauman kertymäfunktion taulukossa arvo kohdassa x tarkoittaa todennäköisyyttä $P(\underline{x} \le x)$, niin käytetään symmetrisyyttä hyväksi





$$P(\underline{x} \ge x) = P(\underline{x} \le -x) = 0,99$$

Taulukosta saadaan $\Phi(2,32) = 0,9898$ ja $\Phi(2,33) = 0,9901$

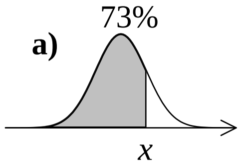
Koska 0,9901 on lähempänä haettua arvoa 0,99, niin $-x = 2,33$, josta $x = -2,33$

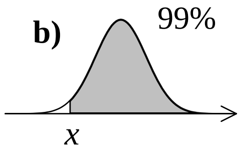
Vast. **a)** $x = 0,61$ **b)** $x = -2,33$

Huomautus: Seuraavalla sivulla sama esimerkki on ratkaistu ClassPadilla.

ClassPadilla sama esimerkki

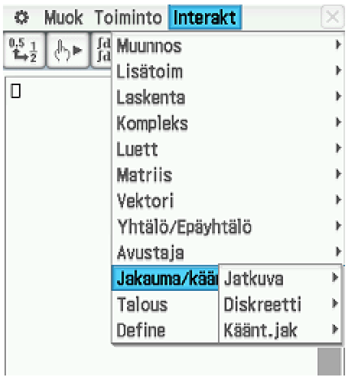
Ratkaise x taulukkokirjan avulla ja kun lisäksi tiedämme, että satunnaismuuttuja $\underline{x} \sim N(0,1)$

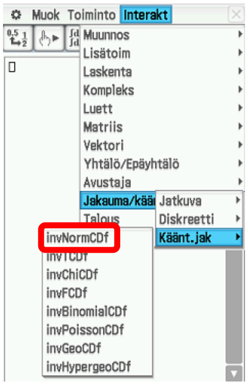
a)


b)


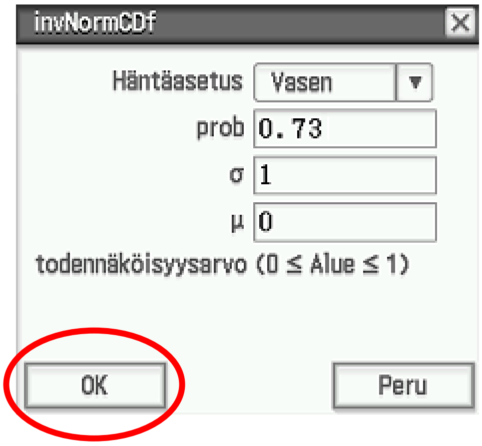
a) Ratkaisu:

1. Valitse Interakt, Jakauma/käänt.jakauma, Käänt.jak ja lopuksi invnormCDF



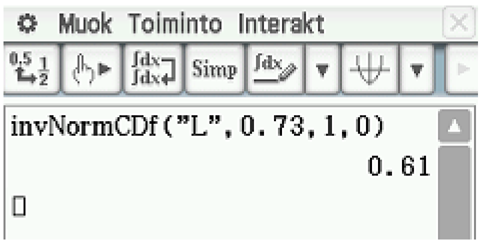


2. Täydennä taulukko ja valitse OK



Muista antaa todennäköisyys desimaaleina ja siksi 0,73 (ei 73 %)

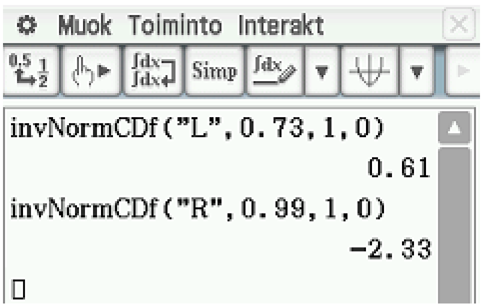
3. Vast. $x = 61$



Huomaa, että asetuksia muutettiin aikaisemmin niin, että vastaus saadaan kahden desimaalin tarkuudella.

b) Kuten a-kohta paitsi eri arvot

5. Vast. $x = -2,33$



Normaalijakauman normittaminen

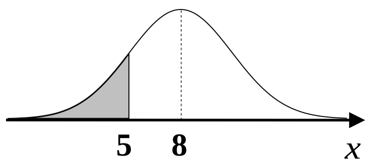
Edellä käsiteltiin normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 0$ ja keskihajonta $\sigma = 1$. Jos satunnaismuuttuja $\underline{x}$ noudattaa normaalijakaumaa, jossa odotusarvona on $\mu \neq 0$ ja keskihajontana $\sigma \neq 1$, niin silloin muuttujan arvo x pitää ensin normittaa, koska kertymäfunktion arvot on taulukoitu vain normitetun jakauman tapauksessa.

Normitettu satunnaismuuttuja $\underline{z} = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

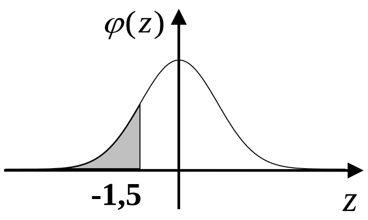
Esim. 6.41. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 8$ ja keskihajonta $\sigma = 2$ eli lyhyesti merkittynä $\underline{x} \sim N(8,2)$. Laske $P(\underline{x} \leq 5)$.

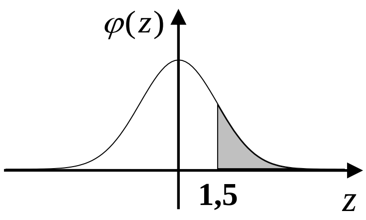
Ratkaisu: Normitetaan ensin luku 5, jolloin saadaan

$$\underline{z} = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{5-8}{2} = -1,5$$



Taulukkokirjaan on taulukoita vain ei-negatiiviset arvot. Käytetään siis symmetrisyyttä hyväksi. Alla olevat pinta-alat ovat yhtä suuret.





Koska kellokäyrän ja x – akselin rajoittaman alueen kokonaispinta-ala on 1, niin yläpuolisista oikealla olevassa kuvassa oleva pinta-ala saadaan vähentämällä kokonaispinta-alasta 1 vasemmalla puolella oleva pinta-ala eli taulukon arvo $\Phi(1,5)$.

$$P(\underline{x} \leq 5) = P\left(\underline{z} \leq -1,5\right) = P\left(\underline{z} \geq 1,5\right) = 1 - P\left(\underline{z} < 1,5\right) = 1 - \Phi\left(1,5\right) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

Esim. 6.42. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ noudattaa normaalijakaumaa $N(12,5)$. Laske todennäköisyydet
a) $P(\underline{x} \leq 20,75)$ **b)** $P(\underline{x} \leq 7)$ **c)** $P(\underline{x} > 15,25)$ **d)** $P(14,5 \leq \underline{x} \leq 24,5)$

Ratkaisu: **a)** $P(\underline{x} \le 20,75) = P(\underline{z} \le \frac{20,75-12}{5}) = P(\underline{z} \le 1,75) = \Phi(1,75) = 0,9599 = 95,99\%$

b) $P(\underline{x} \le 7) = P(\underline{z} \le \frac{7-12}{5}) = P(\underline{z} \le -1) = P(\underline{z} \ge 1) = 1 - P(\underline{z} < 1)$

$= 1 - \Phi(1) = 0,1587 = 15,87\%$

c) $P(\underline{x} > 15,25) = 1 - P(\underline{z} \le \frac{15,25-12}{5}) = 1 - P(\underline{z} \le 0,65)$

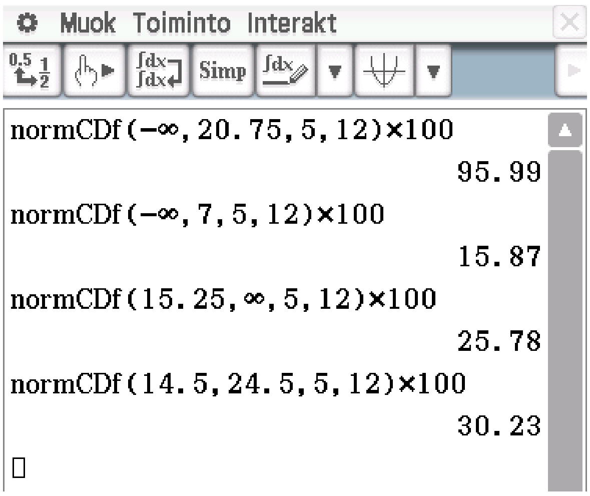
$= 1 - 0,7422 = 0,2578 = 25,78\%$

d) $P(14,5 \le \underline{x} \le 24,5) = P(\frac{14,5-12}{5} \le \underline{z} \le \frac{24,5-12}{5}) = P(0,5 \le \underline{z} \le 2,5)$

$= \Phi(2,5) - \Phi(0,5) = 0,9938 - 0,6915 = 0,3023 = 30,23\%$

Vast. **a)** 95,99% **b)** 15,87% **c)** 25,78% **d)** 30,23%

ClassPadilla: Kuten aikaisemmin soveltaen tehtävän lukuarvoja.



Esim. 6.43. Margariinipakkauksen paino noudattaa likimain normaalijakaumaa siten, että keskipaino on 400 g ja keskihajonta 9 g. Millä todennäköisyydellä kaupasta ostettu margariinipakkauksen paino on **a)** alle 420 g **b)** 390 – 415 g?

Ratkaisu: Olkoon margariinipakkauksen paino satunnaismuuttuja $\underline{x}$, jolloin $\underline{x} \sim N(400,9)$

a) Normitetaan ensin satunnaismuuttujan arvo $\underline{x} = 420$

$$\underline{z} = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{420-400}{9} = 2,222222...$$

Pyöristetään normitettu arvo kahden desimaalin tarkkuuteen, koska taulukkokirjassa arvot on taulukoitu kahden desimaalin tarkkuudella. Tällöin saadaan

P(margariinipakkauksen paino on alle 420 g)

$$= P(\underline{x} < 420) \approx P(\underline{z} < 2,22) = \Phi(2,22) = 0,9868 = 98,68\%$$

Kaupasta ostettu margariinipakkauksen paino on 98,68 %:n todennäköisyydellä alle 420 g.

b) Normitetaan ensin satunnaismuuttujan arvot $\underline{x} = 390$ ja $\underline{x} = 415$

$$z = \frac{\underline{x}-\mu}{\sigma} = \frac{390-400}{9} = -1,111111... \approx -1,11$$

$$z = \frac{\underline{x}-\mu}{\sigma} = \frac{415-400}{9} = 1,66666... \approx 1,67$$

P(margariinipakkauksen paino on välillä 390 – 415 grammaa)

$$= P(390 \le \underline{x} \le 415) \approx P(-1,11 \le \underline{z} \le 1,67) = \Phi(1,67) - \Phi(-1,11)$$

$$= \Phi(1,67) - (1-\Phi(1,11)) = \Phi(1,67) - 1 + \Phi(1,11) = 0,9525 - 1 + 0,8665 = 0,819 = 81,9\%$$

Kaupasta ostettu margariinipakkauksen paino on 81,9 %:n todennäköisyydellä välillä 390 – 415 g.

Vast. **a)** 98,68 %: **b)** 81,9 %:

Esim. 6.44. Kokeessa pistemäärät olivat jakautuneet likimain normaalisti keskiarvona 31,2 pistettä ja keskihajontana 7,5 pistettä. Mikä on asetettava erinomaisen arvosanan pistemäärärajaksi, kun 4 % parhaiten menestyneistä saa arvosanan 10?

Ratkaisu: Kokeen pistemäärä $\underline{x} \sim N(31,2;\ 7,5)$.

Normitettu satunnaismuuttuja $\underline{z} = \dfrac{\underline{x} - 31,2}{7,5} \sim N(0,1)$

On määritettävä sellainen pistemäärä x: $P(\underline{x} \geq x) = 0,04$

Tällöin $P(\underline{x} < x) = P(\underline{x} \leq x) = P(\underline{z} \leq \dfrac{x-31,2}{7,5}) = 0,96$

Taulukosta saadaan, että $\Phi(1,75) = 0,9599$

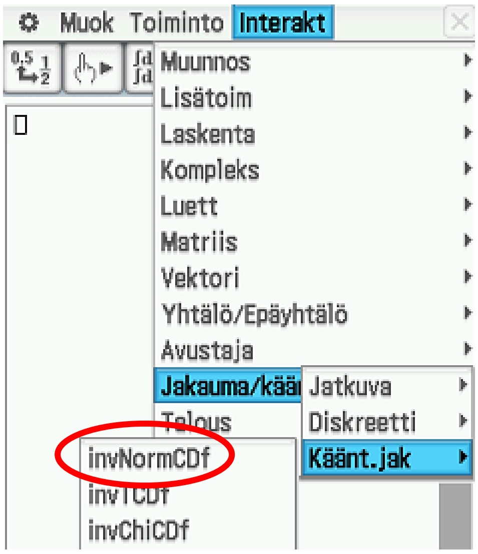
Saadaan yhtälö $\dfrac{x-31,2}{7,5} = 1,75$

Laskimella saadaan $x = 44,325$

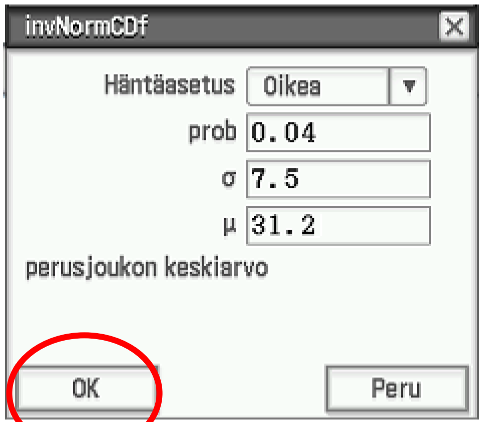
Vast. Pistemäärärajaksi pitää asettaa 44 pistettä.

ClassPadilla:

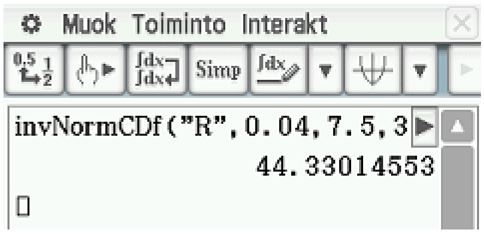
1. Valitse komentopalkista komento



2. Täydennä taulukko kuten alla ja valitse OK



3. Valitse 

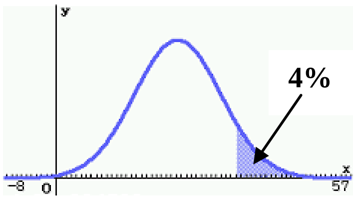


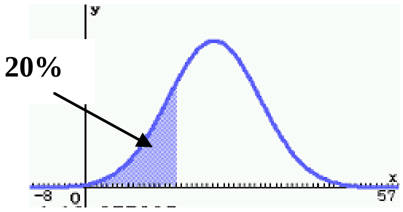
Vast. Pistemääräraja on 44 pistettä.

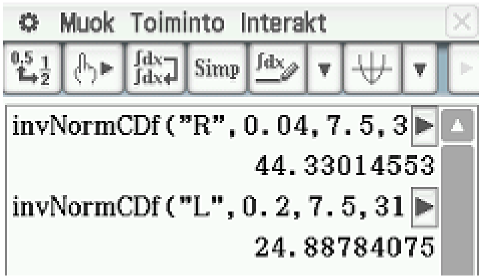
Huomautus

Tässä valittiin Häntäasetukseksi, Oikea, koska 4% parhaista haluttiin antaa arvosana 10.

Jos esimerkiksi vastaavan tyyppisessä tehtävässä halutaan tietää mikä olisi pisteraja, jos 20% huonoimmista hylätään, niin silloin valitaan Häntäasetus Vasen



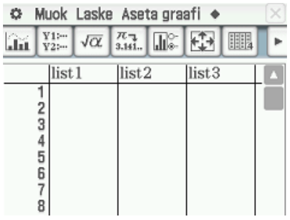




Todennäköisyyteen liittyvät komennot löytyvät laskimesta myös Tilasto-ohjelmasta.

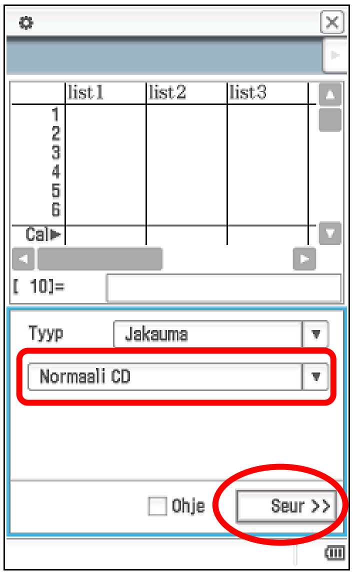
Laske millä todennäköisyydellä edellisessä esimerkissä opiskelija saa 27 – 37 pistettä.

1. Siirry Tilasto-ohjelmaan

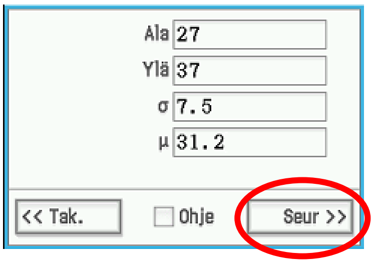


2. Valitse Jakauma

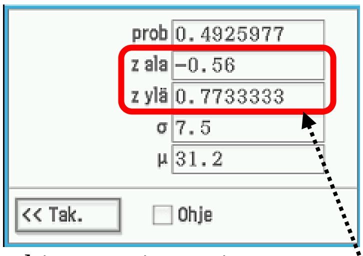
3. Valitse Normaal CD ja Seur



4. Täytä kuten alla ja valitse Seur

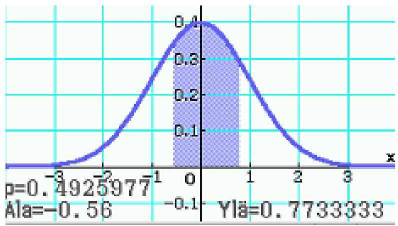


5. Saat vastauksen



Laskin normittaa pistemäärät 27 ja 37

Vast. Opiskelija saa 49,26%:n todennäköisyydellä 27 – 37 pistettä.



Huomaa, että laskin piirtää kuvaajan, jos kosketat laskimen vasemmasta yläkulmasta

Keskihajonnan vaikutus todennäköisyyteen

Olkoon $\underline{x}$ satunnaismuuttuja ja $\underline{x} \sim N(\mu, \sigma)$, niin silloin todennäköisyys tietyn keskihajonnanmitan päästä odotusarvosta on

$$P(\mu - \sigma \leq \underline{x} \leq \mu + \sigma) \approx 68,27\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq \underline{x} \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,45\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq \underline{x} \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,73\%$$

Huomaa, että todennäköisyys on sama kaikille normaalijakaumille riippumatta odotusarvosta ja keskihajonnasta.

Esim. 6.45. Laske laskimella todennäköisyydet $P(\mu - \sigma \leq \underline{x} \leq \mu + \sigma), P(\mu - 2\sigma \leq \underline{x} \leq \mu + 2\sigma)$ ja $P(\mu - 3\sigma \leq \underline{x} \leq \mu + 3\sigma)$, kun satunnaismuuttuja

a) $\underline{x} \sim N(0,1)$ **b)** $\underline{x} \sim N(50,10)$ **c)** $\underline{x} \sim N(3,2)$

Ratkaisu: **a)** $\underline{x} \sim N(0,1)$

$\boxed{\sigma = 1}$

$\boxed{\mu = 0}$

```
normCDf(-1,1,1,0)×100
                        68.27
normCDf(-2,2,1,0)×100
                        95.45
normCDf(-3,3,1,0)×100
                        99.73
```

b) $\underline{x} \sim N(50,10)$

```
normCDf(40,60,10,50)×100
                        68.27
normCDf(30,70,10,50)×100
                        95.45
normCDf(20,80,10,50)×100
                        99.73
```

c) $\underline{x} \sim N(3,2)$

```
normCDf(1,5,2,3)×100
                        68.27
normCDf(-1,7,2,3)×100
                        95.45
normCDf(-3,9,2,3)×100
                        99.73
```

Tehtävissä 6.1 – 6.7 saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa.

6.1. Alla on kurssin M6 arvosanojen frekvenssitaulukko. Vastaa ko. taulukon perusteella seuraaviin kysymyksiin.
Mikä on arvosanojen
a) moodi **b)** mediaani
c) alakvartiili **d)** yläkvartiili
e) neljäs desiili?
f) Kuinka moni opiskelija sai enintään arvosanan 7?

Arvosana	frekvenssi	f%	F	F%
4	2	4.76	2	4.76
5	9	21.43	11	26.19
6	9	21.43	20	47.62
7	5	11.90	25	59.52
8	7	16.67	32	76.19
9	9	21.43	41	97.62
10	1	2.38	42	100.00

6.2. a) Kahta noppaa heitetään. Millä todennäköisyydellä noppien silmälukujen summa on enintään 5?

Korissa on 3 punaista, 5 sinistä ja 2 vihreää palloa. Korista nostetaan kaksi palloa, millä todennäköisyydellä saadaan
b) kaksi punaista palloa
c) sininen ja vihreä pallo?

6.3. Opiskelija on saanut pitkän matematiikan kursseista arvosanat
8, 7, 7, 7, 10, 5, 10, 5, 4 ja 6.
Laske arvosanojen
a) keskiarvo **b)** moodi **c)** mediaani?
d) Opiskelija käy korottamassa hylätyn arvosanan. Mitä hänen pitäisi siitä saada, jos hän haluaa matematiikan loppuarvosanaksi 8?

6.4. Matematiikan ryhmässä oli 20 prosenttia tyttöjä enemmän kuin poikia. Laske opiskelijoiden matematiikan arvosanojen keskiarvo, kun poikien keskiarvo 7,27 ja tyttöjen 7,51.

6.5. Satunnaismuuttuja $\underline{x} \sim N(0,1)$
Laske todennäköisyydet
a) $P(\underline{x} \leq 1,75)$
b) $P(\underline{x} < -0,79)$

Satunnaismuuttuja $\underline{x} \sim N(12,3)$
Laske todennäköisyys
c) $P(16,5 < \underline{x} \leq 18,75)$
d) $P(8,55 < \underline{x} \leq 15,65)$.

Välivaiheet näkyviin.

6.6. Laatikossa on 2 ruskeaa, 6 mustaa ja 8 sinistä kuorta. Laatikosta otetaan umpimähkään kaksi kuorta. Millä todennäköisyydellä kuoret ovat samanväriset? (S05/8)

6.7. Tiedetään, että eräässä nelilapsisessa perheessä ainakin yksi lapsista on tyttö. Mikä on tällöin todennäköisyys, että kaikki lapset ovat tyttöjä? Jos tiedetään, että ainakin kaksi lapsista on tyttöjä, mikä on todennäköisyys, että perheessä on kaksi poikaa? Oletetaan, että poikia ja tyttöjä syntyy yhtä suurella todennäköisyydellä. Millaiset tulokset saadaan, jos käytetäänkin tilastojen antamia todennäköisyyksiä: poikien syntymistodennäköisyys on $p = 0,51$ ja tyttöjen $t = 0,49$? Sukupuolen määräytymiset oletetaan riippumattomiksi tapahtumiksi. (K06/10)

Tehtävissä 6.8 – 6.15 saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa. (Katso kaikki ratkaisut)

6.8. Tutkimuksessa tutkittiin 12 perheen äidin ja täysi-ikäisen tyttären pituuksia keskenään.

Äiti	Tytär
170	174
159	155
170	169
169	175
155	153
182	184
151	153
154	150
172	176
162	160
175	170
167	160

a) Laske korrelaatio-kerroin ja arvioi, miten voimakas korrelaatio pituuksissa on.
b) Arvioi miten pitkäksi kasvaa tytär, jonka äiti on 179 cm.
c) Miten pitkäksi äiti voidaan arvioida, jos tytär kasvaa 163 cm pitkäksi.
(tiedosto, video)

6.9. a) Pekka saa tikanheitossa kympin 80 % todennäköisyydellä. Laske millä todennäköisyydellä Pekka saa ainakin yhden kympin, kun hän heittää tikkaa 5 kertaa.
(tiedosto, video)
b) Noppaa heitetään 10 kertaa. Laske millä todennäköisyydellä saadaan enintään 2 nelosta?
(tiedosto, video)
c) Sääennusteen mukaan vesisateen todennäköisyys lomakohteessa on joka päivä 65% seuraavan viikon aikana. Kaksi ensimmäistä lomapäivää on satanut vettä. Laske millä todennäköisyydellä loppuloman aikana sataa vielä vähintään kolmena päivänä?
(tiedosto, video)

6.10. Noppaa heitetään kolme kertaa. Kolmella kuutosella saa 10 euroa ja kahdella kuutosella 6 euroa. Laske voiton odotusarvo, keskihajon-ta ja varianssi, kun peli maksaa 4 euroa.
(tiedosto, video)

6.11. Eräässä 30 oppilaan luokassa on matematiikan arvosanojen summa 219 ja niiden neliöiden summa 1 637. Laske arvosanojen keskihajonta. (s76/8a)
(tiedosto, video)

6.12. Tuote on viallinen 40 % todennäköisyydellä. Liikkeestä ostetaan 5 tuotetta. Olkoon satunnaismuuttujana viallisten tuotteiden lukumäärä. Laske todennäköisyydet
a) $P(\underline{x} < 4)$ **b)** $P(\underline{x} \geq 2)$ **c)** $P(1 < \underline{x} \leq 4)$
(tiedosto, video)

6.13. Todennäköisyys, että erään tulppaanilajikkeen sipuli itää, on 0,7. Kuinka monta sipulia on vähintään istutettava, jotta niistä ainakin kaksi itäisi yli 99% todennäköisyydellä? (S00/7)
(tiedosto, video)

6.14. a) Kahvipaketin paino noudattaa likimain normaalijakaumaa niin, että keskipaino on 500 g ja keskihajonta 12 g. Laske todennäköisyydet $P(\underline{x} \leq 490)$ ja $P(490 \leq \underline{x} \leq 510)$. (tiedosto, video)

b) Suklaapatukan paino noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskihajonta on 7 grammaa. Mikä pitää olla suklaapatukan keskipaino, kun kaupasta ostetun suklaapatukan paino on 75 % todennäköisyydellä enintään 55 g.
(tiedosto, video)

6.15. Henkilöt A ja B käyvät päivittäin samassa kahvilassa. Kumpikin saapuu kahvilaan sattumanvaraiseen aikaan klo 9.00 ja 10.00 välillä ja viipyy siellä 15 minuuttia. Mikä on todennäköisyys sille, että he ovat kahvilassa tiettynä päivänä samalla hetkellä? (K93/9a) (tiedosto, video)

M7 Derivaatta

7.1. Rationaalifunktio

Rationaalifunktio $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}, Q(x)\neq 0$, jossa $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja. Polynomifunktiot ovat myös rationaalifunktioita, sillä rationaalifunktion lausekkeessa nimittäjä $Q(x)$ voi olla myös vakio kuten funktiossa $f(x)=\dfrac{10x^2-5}{5}=\dfrac{10x^2}{5}-\dfrac{5}{5}=2x^2-1$. Jos rationaalifunktion lauseke ei sievene polynomiksi, niin funktiota voidaan kutsua murtofunktioksi.

Esimerkiksi funktio $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-4x}$ on määritelty, kun nimittäjä $x^2-4x\neq 0$

Ratkaistaan yhtälö $x^2-4x=0$.

$$\begin{aligned} x^2-4x&=0 && \text{Erotetaan yhteinen tekijä.}\\ x(x-4)&=0 && \text{Käytetään tulon nollasääntöä.}\\ x=0 \text{ tai } x-4&=0 \\ x&=4 \end{aligned}$$

Täten funktio on määritelty, kun $x\neq 0$ ja $x\neq 4$.

7.2. Rationaalilausekkeet

Supistaminen

- **Yhteen- ja vähennyslaskussa ei saa supistaa!**

$\dfrac{(x+2)-x^2}{x+2}$ Ei saa supistaa x:llä, ei luvulla 2, eikä lausekkeella $x+2$.

- **Kertolaskussa tulon tekijät saa supistaa!**

$$\frac{y(y+2)}{y+2}=\frac{y\cdot\cancel{(y+2)}}{\cancel{y+2}}=\frac{y\cdot 1}{1}=\frac{y}{1}=y$$

- **Ole tarkkana osamäärän kanssa**

Älä supista, sillä $\dfrac{x}{y}:\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{y}=\dfrac{x\cdot x}{y\cdot y}=\dfrac{x^2}{y^2}$

Mutta $\dfrac{a+3}{a}:\dfrac{a+3}{2a}=\dfrac{a+3}{a}\cdot\dfrac{2a}{a+3}=\dfrac{(a+3)\cdot 2\cancel{a}}{\cancel{a}(a+3)}=\dfrac{\cancel{(a+3)}\cdot 2}{\cancel{a+3}}=\dfrac{2}{1}=2$

Rationaalilausekkeen sievennys

Rationaalilausekkeen sieventämisessä käytetään hyväksi murtolukujen peruslaskutoimituksia ja polynomien jakamista tekijöihin.

Murtolukujen peruslaskutoimitusten käyttäminen

- **Yhteen – ja vähennyslasku:** $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = {}^{d)}\frac{a}{b} \pm {}^{b)}\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cd}{bd} = \frac{ad \pm cd}{bd}$

Lavennetaan samannimisiksi ja lasketaan yhteen tai vähennetään keskenään osoittajat.

$$^{x+1)}\frac{x}{x+1} - \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1)-(x^2+x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+x-x^2-x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

- **Kertolasku:** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Kerrotaan osoittajat ja nimittäjät keskenään. Jos mahdollista, supistetaan ennen kertolaskua.

$$\frac{4(x-2)}{x} \cdot \frac{3x}{8(x-2)} = \frac{4 \cdot (x-2) \cdot 3 \cdot x}{x \cdot 8 \cdot (x-2)} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{(x-2)}}{\cancel{x}} \cdot \frac{3\cancel{x}}{\underset{2}{\cancel{8}} \cdot \cancel{(x-2)}} = \frac{3}{2}$$

- **Jakolasku:** $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Muutetaan kertolaskuksi vaihtamalla kerrottavassa (jälkimmäisessä) osoittajan ja nimittäjän paikkaa, jonka jälkeen murtoluvut kerrotaan keskenään, kuten edellä opetettiin.

$$\frac{x-4}{2x} : \frac{x-4}{6x} = \frac{x-4}{2x} \cdot \frac{6x}{x-4} = \frac{(x-4) \cdot 6 \cdot x}{2 \cdot x \cdot (x-4)} = \frac{\cancel{(x-4)} \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \cancel{x}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x-4)}} = 3$$

Polynomin jakaminen tekijöihin

- Yhteisen tekijän erottaminen $ab+ac=a(b+c)$

$$\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{x(x-1)}{x-1}=x$$

- Binomikaavojen käyttö $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ja $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\frac{(x)^2+2\cdot x\cdot 2+(2)^2}{x+2}=\frac{(x+2)^2}{x+2}=x+2$$

$$\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x)^2-(2)^2}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=x-2$$

- Termien ryhmitteleminen $a^3+a^2+4a+4=a^2(a+1)+4(a+1)=(a+1)(a^2+4)$

$$\frac{x^3+2x^2-2x-4}{x+2}=\frac{x^2(x+2)-2(x+2)}{x+2}=\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2)}{\cancel{x+2}}=x^2-2$$

- Polynomien nollakohtien käyttö $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$\frac{2x^2-2x-4}{x^2+3x+2}=\frac{2\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x+2)}=\frac{2(x-2)}{x+2}=\frac{2x-4}{x+2}$$

$2x^2-2x-4=0$
$x=-1$ jaollinen $(x+1)$:llä
$x=2$ jaollinen $(x-2)$:lla

$x^2+3x+2=0$
$x=-1$ jaollinen $(x+1)$:llä
$x=-2$ jaollinen $(x+2)$:lla

- Jakokulmassa jakaminen

$$\frac{x^3-3x^2+8x-12}{x-2}=x^2-x+6$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-x+6 \\ \hline x-2 & x^3-3x^2+8x-12 \\ & \underline{\mp x^3 \pm 2x^2} \\ & -x^2+8x \\ & \underline{\pm x^2 \mp 2x} \\ & +6x-12 \\ & \underline{\mp 6x \pm 12} \\ & 0 \end{array}$$

Esim. 7.1. Sievennä lausekkeet **a)** $\frac{x^3-x}{x+1}$ **b)** $\frac{x}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x-1}$

Ratkaisu: **a)** $\frac{x^3-x}{x+1}$ Erotetaan osoittajassa yhteinen tekijä x

$=\frac{x(x^2-1)}{x+1}$ Käytetään binomikaavaa $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$=\frac{x(x+1)(x-1)}{x+1}$ Supistetaan lauseke $x+1$

$=x(x-1)$

$=x^2-x$

b) $\frac{x}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x-1}$ Kirjoitetaan x^2-2x+1 binomin neliönä

$=\frac{x}{(x-1)^2}-{}^{x-1)}\frac{1}{x-1}$ Lavennetaan samannimisiksi

$=\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{x-1}{(x-1)^2}$

$=\frac{x-(x-1)}{(x-1)^2}$ Vaihdetaan etumerkit

$=\frac{x-x+1}{(x-1)^2}$

$=\frac{1}{(x-1)^2}$

Vast. **a)** $\frac{x^3-x}{x+1}=x^2-x$ **b)** $\frac{x}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{(x-1)^2}$

7.3. Rationaaliyhtälöt

Rationaaliyhtälöllä tarkoitetaan sellaista yhtälöä, joka voidaan sieventää muotoon $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, jossa $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja. Rationaaliyhtälö voidaan ratkaista monella eri tavalla kuten useimmat yhtälöt. Esitän tässä kolme erilaista mahdollista ratkaisutapaa.

Tapa 1. Saata yhtälö muotoon $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, jolloin yhtälö on tosi vain kun $P(x)=0$ ja $Q(x)\neq 0$.

Esim. 7.2. Ratkaise yhtälö $\frac{1}{x-1}+\frac{x^2-2}{x^2-x}=0$

Ratkaisu: Lasketaan nimittäjien $x-1$ ja x^2-x nollakohdat

$$x-1=0 \qquad x=1$$

$$x^2-x=0$$
$$x(x-1)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=1$$

Yhtälö on määritelty, kun $x\neq 0$ ja $x\neq 1$. Saatetaan yhtälö muotoon $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{x^2-2}{x^2-x}=0$$

$$^{x)}\ \frac{1}{x-1}+\frac{x^2-2}{x(x-1)}=0$$

$$\frac{x}{x(x-1)}+\frac{x^2-2}{x(x-1)}=0$$

$$\frac{x^2+x-2}{x(x-1)}=0$$

Murtoyhtälö on nolla, kun osoittaja on nolla eli kun $x^2+x-2=0$.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 3}{2}$$

$x=-2$ tai $x=1$ (ei kelpaa, sillä $x\neq 1$)

Vast. Yhtälön toteutuu, kun $x=-2$.

Tapa 2. Tutkitaan ensin määrittelyehto. Tämän jälkeen kerrotaan nimittäjät pois ja ratkaistaan saatu yhtälö. Hyväksytään vain määrittelyalueeseen kuuluvat arvot.

Esim. 7.3. Ratkaise yhtälöt $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=0$

Ratkaisu: Määritelty, kun $x-2\neq 0$ ja $x\neq 0$ eli $x\neq 2$ ja $x\neq 0$. Kerrotaan nimittäjät pois.

$$\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=0 \qquad \|\cdot(x-2)\cdot x$$

$$\frac{x}{\cancel{x-2}}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot x+\frac{1}{\cancel{x}}\cdot(x-2)\cdot\cancel{x}=0$$

$$x^2+x-2=0$$ Ratkaistaan saatu 2. asteen yhtälö

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 3}{2}$$

$x=-2$ tai $x=1$ Kummatkin vastaukset voidaan hyväksyä

Vast. $x=-2$ tai $x=1$

Tapa 3. Tutkitaan ensin määrittelyehto, jonka jälkeen saatetaan yhtälö muotoon $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{S(x)}$. Kerrotaan ristiin ja ratkaistaan saatu yhtälö. Hyväksytään vain määrittelyalueeseen kuuluvat arvot.

Esim. 7.4. Ratkaise yhtälöt $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}=0$.

Ratkaisu: Määritelty, kun $x\neq\pm 1$.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}=0$$ Siirretään lauseke $-\frac{1}{x^2-1}$ oikealle.

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x^2-1}$$ Kerrotaan ristiin.

$$x^2-1=x-1$$ Siirretään termit samalle puolelle.

$$x^2-x=0$$ Erotetaan yhteinen tekijä.

$$x(x-1)=0$$ Käytetään tulon nollasääntöä.

$x=0$ tai $x-1=0$

$x=1$ (ei käy)

Vast. $x=0$

7.4. Rationaaliepäyhtälöt

- Murtoepäyhtälön ratkaisussa käydään läpi seuraavat vaiheet.

  1. Siirretään kaikki termit epäyhtälömerkin samalle puolelle.
  2. Lavennetaan samannimisiksi.
  3. Ratkaistaan osoittajan ja nimittäjän nollakohdat.
  4. Merkitään, että nimittäjä $\neq 0$.
  5. Tehdään merkkikaavio.
  6. Kirjoitetaan vastaus (nimittäjän nollakohtaa ei saa hyväksyä ratkaisuun).

Esim. 7.5. Ratkaise epäyhtälö $\frac{x}{x-1} \le x$

Ratkaisu:

$\frac{x}{x-1} \le x$ Siirretään termit samalle puolelle (1).

$\frac{x}{x-1} - {}^{x-1)}x \le 0$ Lavennetaan samannimisiksi (2).

$\frac{x}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} \le 0$ Poistetaan sulkeet.

$\frac{x}{x-1} - \frac{x^2-x}{x-1} \le 0$ Yhdistetään lausekkeet (**varo merkkivirhettä!**).

$\frac{x-x^2+x}{x-1} \le 0$ Yhdistetään samanmuotoiset termit.

$\frac{-x^2+2x}{x-1} \le 0$ Ratk. osoittajan ja nimittäjän nollakohdat (3).

$x-1=0$

$x=1$

$-x^2+2x=0$

$x(-x+2)=0$

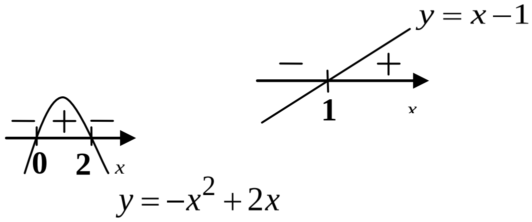
$x=0$ tai $-x+2=0$

$x=2$

$x \neq 1$ (Nimittäjän nollakohta (4)).

Tehdään merkkikaavio (5).

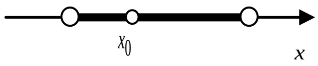
	0	1	2	x
$-x^2+2x$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
osamäärä	$+$	$-$	$+$	$-$



Vast. Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö toteutuu, kun $0 \le x < 1$ tai $x \ge 2$.

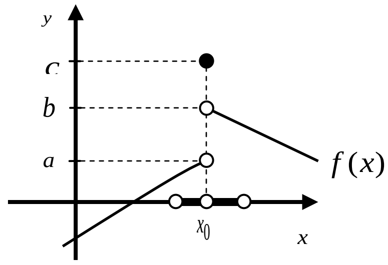
7.5. Funktion raja-arvo

Funktion raja-arvo on tärkeä ymmärtää matemaattisessa analyysissa. Raja-arvon avulla voidaan tutkia funktion käyttäytymistä jossakin tietyssä x_0:n aidossa ympäristössä (avoin väli, josta on poistettu sisäpiste x_0)



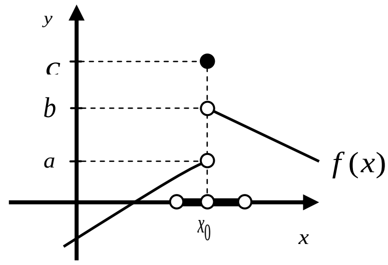
x_0:n aito ympäristö

- Funktiolla $f(x)$ sanotaan olevan kohdassa x_0 **vasemmanpuoleinen raja-arvo** a, jos funktion $f(x)$ arvot lähestyvät lukua a, kun x lähestyy kohtaa x_0 vasemmalta. Tällöin merkitään $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a$



$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a$$

- Funktiolla $f(x)$ sanotaan olevan kohdassa x_0 **oikeanpuoleinen raja-arvo** b , jos funktion $f(x)$ arvot lähestyvät lukua b , kun x lähestyy kohtaa x_0 oikealta. Tällöin merkitään $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = b$

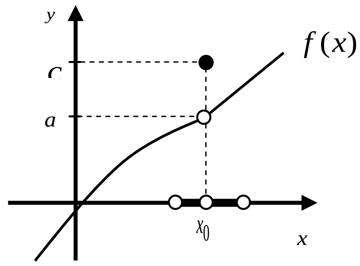


$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = b$$

- Funktiolla $f(x)$ on raja-arvo a kohdassa x_0 vain, jos funktion vasemmanpuoleinen ja oikeanpuoleinen raja – arvo on a kohdassa x_0 eli

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = a\,.$$

Tällöin merkitään $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

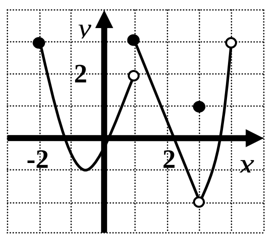


$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Vieressä on funktion $y = f(x)$ kuvaaja.

Raja-arvo ei ole olemassa kohdassa $x = 1$, koska $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 2$ ja $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 3$.

Raja-arvo on olemassa kohdassa $x = 3$, koska $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = -2$ ja $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = -2$



7.6. Funktion raja-arvon määrittäminen

Funktion raja-arvon määrittämistä varten on olemassa seuraavat laskusäännöt:

Jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, niin silloin

- $\lim_{x \to x_0} c = c$ kun c on vakio
- $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = a + b$
- $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = a - b$
- Jos $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = ab$
- Jos $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}, b \neq 0$

Esim. 7.6. Määritä raja-arvo $\lim_{x \to 3} f(x)$, kun $f(x) = x^2 + 2x$.

Ratkaisu: Edellä esitettyjen laskusääntöjen avulla saadaan

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 + 2x) = \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 2x = \lim_{x \to 3} (x \cdot x) + \lim_{x \to 3} 2 \cdot \lim_{x \to 3} x$$

$$= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 2 \cdot \lim_{x \to 3} x = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 9 + 6 = 15$$

Vast. $\lim_{x \to 3} f(x) = 15$

Huomautus: Edellinen esimerkki on hyvin helppo ratkaista suoraan sijoittamalla-

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 + 2x) = 3^2 + 2 \cdot 3 = 9 + 6 = 15$$

Raja-arvon määrittämisessä, kokeile ensin suoraa sijoitusta.

Funktioiden, joiden määrittelyjoukkona on reaalilukujen joukko, raja-arvo voidaan laskea suoraan sijoittamalla ko. muuttujan arvo funktion lausekkeeseen.
Suoraa sijoitusta voi käyttää siis

- polynomifunktioihin $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

  esim. $\lim\limits_{x\to -3} (2x^2 - x - 1) = 2\cdot(-3)^2 - (-3) - 1 = 2\cdot 9 + 3 - 1 = 20$

- eksponenttifunktioihin $f(x)=a^x$, $a>0$

  esim. $\lim\limits_{x\to -4} 2^x = 2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

- parittomiin juurifunktioihin $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n=3,\ 5,\ 7,\ldots$

  esim. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[3]{x-10} = \sqrt[3]{2-10} = \sqrt[3]{-8} = -2$

- parillisiin ja parittomiin potenssifunktioihin $f(x)=x^n, n=1,2,3,\ldots$

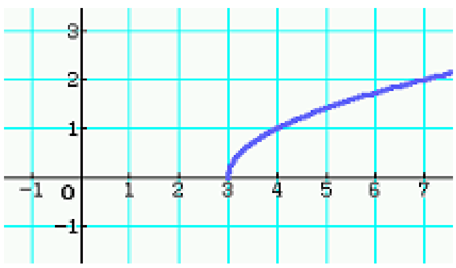
  esim. $\lim\limits_{x\to -2} x^3 = (-2)^3 = -8$

- sini- ja kosinifunktioihin (tulee kurssissa M9)

Murtofunktioissa, parillisissa juurifunktioissa, logaritmifunktioissa (kurssi M8) ja tangenttifunktioissa (kurssi M9) voi käyttää suoraa sijoitusta, jos funktio on määritelty siinä x:n avoimessa välissä, jota lähestytään.

Esimerkiksi funktiolla $f(x)=\sqrt{x-3}$ **ei ole raja – arvoa** kohdassa $x=3$ vaikka suora sijoitus antaa arvon nolla: $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x-3} = \sqrt{3-3} = 0$

Vieressä olevasta funktion $f(x)=\sqrt{x-3}$ kuvaajasta huomataan, että raja-arvo ei ole olemassa kohdassa $x=3$, sillä vasemmanpuolista raja-arvoa ei ole olemassa, koska $f(x)=\sqrt{x-3}$ ei ole määritelty $x=3$ avoimessa ympäristössä. Funktio on määritely vain kun $x\geq 3$ (reaalisuusehto).



7.7. Murtofunktion raja-arvon määrittäminen

Jos suoraan sijoittamisessa saadaan $\frac{0}{0}$, niin silloin osoittaja ja nimittäjä ovat jaollisia samalla lausekkeella ja tällöin tämä ”paha” lauseke voidaan supistaa pois. Jos saadaan $\frac{a}{0}, a \neq 0$, niin silloin raja-arvoa ei ole tai raja-arvo on epäoleellinen eli $f(x) \to -\infty$ tai $f(x) \to \infty$ (katso kurssi M13). Käytä apuna sievennyksessä seuraavia ”työkaluja”

- yhteisen tekijän erottamista

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1} x = 1$$

- muistikaavoja

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x\to-3}(x-3) = -3-3 = -6$$

- ryhmittelyä

$$\lim_{x\to4}\frac{x^3-4x^2-2x+4}{x-4} = \lim_{x\to4}\frac{x^2(x-4)-2(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x^2-2)}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to4}(x^2-2) = 4^2-2 = 16-2 = 14$$

- nollakohtia

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$2x^2+2x-4=0,$ josta $x=-2$ tai $x=1$ ja siksi
$2x^2+2x-4=2(x+2)(x-1)$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+2x-4}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{2(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1}2(x+2) = 2(1+2) = 6$$

- liittolauseella laventamista

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}+2)\,x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}+2)(x-4)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2) = \sqrt{4}+2 = 4$$

Toisin: $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2) = \sqrt{4}+2 = 4$

Esim. 7.7. Laske raja-arvo $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - |x|}{x-1}$.

Ratkaisu: Suora sijoitus tuottaa osamäärälle muodon $\dfrac{0}{0}$.

Sievennetään lauseke poistamalla ensin itseisarvomerkki (voidaan jättää suoraan pois, koska $x \to 1$ ja siksi $x \geq 0$) ja sen jälkeen erotetaan yhteinen tekijä seuraavasti:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - |x|}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x = 1$$

Vast. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - |x|}{x-1} = 1$

Esim. 7.8. Millä *a*:n arvolla funktiolla $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - a}{2x^2 + 2x - 12}$ on raja-arvo kohdassa $x = 2$ ja mikä tämä raja-arvo on?

Ratkaisu: Tehdään suora sijoitus $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 4x - a}{2x^2 + 2x - 12} = \dfrac{4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - a}{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 12} = \dfrac{8 - a}{0}$

Nimittäjän yksi nollakohta on $x = 2$ ja siksi nimittäjä on jaollinen binomilla $x - 2$.

Jotta funktiolla olisi raja-arvo kohdassa $x = 2$, niin osoittajan nollakohta pitää olla myös $x = 2$, jolloin osoittajakin on jaollinen binomilla $x - 2$.Tällöin voidaan supistaa sekä osoittajasta että nimittäjästä binomi $x - 2$ pois.

Osoittajalla $4x^2 - 4x - a$ on nollakohtana $x = 2$, jos osoittaja saa arvon nolla, kun osoittajan lausekkeeseen sijoitetaan x:n paikalle 2. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - a &= 0 \\ 8 - a &= 0 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

Tällöin funktio $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 8}{2x^2 + 2x - 12}$.

Ratkaistaan osoittajan ja nimittäjän nollakohdat.

$4x^2 - 4x - 8 = 0$	$2x^2 + 2x - 12$
$x = -1$ eli jaollinen binomilla $x + 1$	$x = -3$ eli jaollinen binomilla $x + 3$
$x = 2$ eli jaollinen binomilla $x - 2$	$x = 2$ eli jaollinen binomilla $x - 2$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4x^2 - 4x - 8}{2x^2 + 2x - 12} = \lim_{x \to 2} \frac{4(x+1)(x-2)}{2(x+3)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{4(x+1)}{2(x+3)} = \frac{4(2+1)}{2(2+3)} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

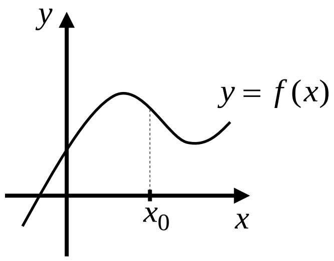
Vast. $a = 8$ ja raja-arvo on $\dfrac{6}{5}$.

7.8. Funktion jatkuvuus

Funktio on jatkuva kohdassa x_0,

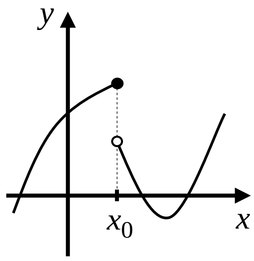
jos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ eli

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0)$$



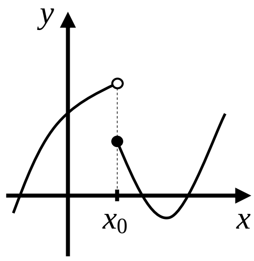
Funktio on jatkuva vasemmalta x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)$$



Funktio on jatkuva oikealta x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0)$$



Esim. 7.9 Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + ax, & \text{kun } x > 2 \\ -x + 2, & \text{kun } x \le 2 \end{cases}$ on jatkuva kaikkialla?

Ratkaisu: Funktio on jatkuva, kun $x \neq 2$, koska lausekkeet $3x^2 + ax$ ja $-x + 2$ ovat polynomilausekkeina jatkuvia. Funktio on jatkuva myös kohdassa $x = 2$, kun $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} f(x) = f(2)$.

Vasemmanpuolinen raja-arvo $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (-x + 2) = 0$.

Oikeanpuolinen raja-arvo $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} (3x^2 + ax) = 3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 = 12 + 2a$

Raja-arvo on olemassa, kun

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x)$$

$$12 + 2a = 0$$

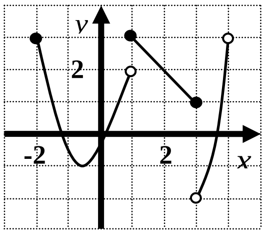
$$2a = -12$$

$$a = -6$$

Vast. Funktio on jatkuva kaikkialla, kun $a = -6$.

Funktio on jatkuva välillä *I*, jos se on jatkuva välin jokaisessa sisäpisteessä ja toispuolisesti jatkuva välin mahdollisissa päätepisteissä.

Vieressä oleva funktio on jatkuva esim. välillä $[-2,1[$, $[1,3]$ ja $]3,4[$ ja epäjatkuva välillä $[-2,1]$ ja $[2,4]$.



Tieto funktion jatkuvuudesta on esimerkiksi differentiaalilaskennassa erittäin tärkeä ja siksi on hyvä jo tässä kohtaa muistaa funktioiden jatkuvuudesta:

Kaikki alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.

Alkeisfunktioita ovat

1. Polynomifunktiot $f(x)=x^3-2x+1$
2. Rationaalifunktiot $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-4}$
3. Potenssifunktiot $f(x)=x^{0,4}$
4. Juurifunktiot $f(x)=\sqrt[4]{x^2+6}$
5. Eksponenttifunktiot $f(x)=3^x$
6. Logaritmifunktiot $f(x)=\log_4(x^3-x^2)$
7. Trigonometriset funktiot $f(x)=\sin(3x+\pi)$

Jatkuvien funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$

- **summa** $f(x)+g(x)$
- **erotus** $f(x)-g(x)$
- **tulo** $f(x)\cdot g(x)$
- **osamäärä** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
- **itseisarvo** $|f(x)|$ ja $|g(x)|$
- **yhdistetty funktio** $f\circ g$

ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan

7.9. Derivaatta

Funktion $f(x)$ derivaatalla kohdassa x_0 tarkoitetaan erotusosamäärän $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ raja-arvoa $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ja siitä käytään merkintää $f'(x_0)$. Geometrisesti erotusosamäärän raja-arvo tarkoittaa sitä, että sekantin kulmakerroin muuttuu tangentin kulmakertoimeksi. Täten funktion derivaatta kohdassa x_0 tarkoittaa tangentin kulmakerrointa ja ilmaisee funktion muuttumisen nopeuden siinä kohtaa. Täten funktio $f(x)$ on derivoituva kohdassa x_0, jos funktion $f(x)$ kuvaajalle kohtaan x_0 voidaan piirtää tangentti.

Funktion derivaatta kohdassa x_0

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ ja } f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Esim. 7.10. Muodosta derivaatan määritelmän nojalla funktion $f(x)=4x^2$ derivaatta $f'(1)$.

Ratkaisu: Ratkaistaan esimerkki käyttämällä kumpaakin edellä esitetyistä tavoista.

Tapa 1:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-4\cdot 1^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-4}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}4(x+1)=4(1+1)=8$$

Tapa 2:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

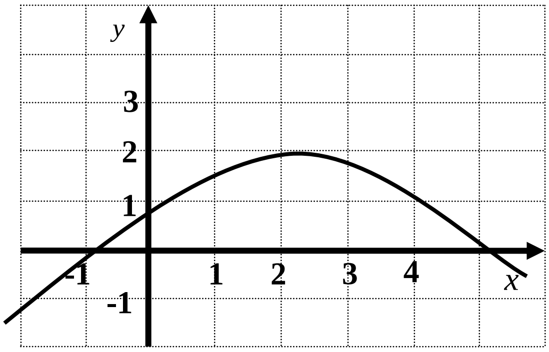
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4\cdot(1+h)^2-4\cdot 1^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4\cdot(1+2h+h^2)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{4}+8h+4h^2\cancel{-4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8h+4h^2}{h}$$

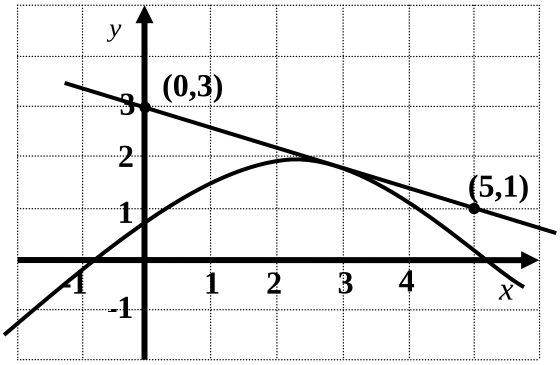
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(8+4h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(8+4h)=8+4\cdot 0=8$$

Vast. $f'(1)=8$

Esim. 7.11. Ratkaise vieressä olevan funktion $f(x)$ muutosnopeus kohdassa $x=3$.



Ratkaisu: Funktion muutosnopeus tarkoittaa geometrisesti samaa kuin tangentin kulmakerroin kohdassa $x=3$. Piirretään funktiolle silmämääräisesti tangentti kohtaan $x=3$ ja lasketaan tangentin kulmakerroin.



Piirretty tangentti kulkee pisteiden $(0,3)$ ja $(5,1)$ kautta ja näin ollen tangentin kulmakertoimeksi saadaan

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1-3}{5-0}=\frac{-2}{5}=-\frac{2}{5}$$

Vast. Funktion muutosnopeus on $-\frac{2}{5}$ kohdassa $x=3$.

Huomautus: Derivaatan määritelmän perusteella derivaatan arvo kohdassa $x=3$ on myös yhtä suuri kuin siihen piirretyn tangentin kulmakerroin ja siksi myös $f'(3)=-\frac{2}{5}$.

7.10. Derivoimissäännöt

Derivaatan määritelmää tarvitsee käyttää vain pyydettäessä. Muuten voidaan käyttää alla esitettyjä derivoimissääntöjä, kun muodostetaan funktion derivaattaa.

Olkoon f ja g derivoituvia funktioita ja k on vakio.

	Sääntö	**Esimerkki**
1.	$Dk = 0$	$D7 = 0$
2.	$Dx = 1$	
3.	$D(kf) = kDf$	$D(3x) = 3Dx = 3 \cdot 1 = 3$
4.	$Dx^n = nx^{n-1}$	$D5x^3 = 5Dx^3 = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2$
5.	$D(f+g) = Df + Dg$	$D(2x^5 + 3x^2 - 2x + 1) = 10x^4 + 6x - 2$
6.	$Dfg = f'g + fg'$	$D(2x(x^3 - 5x)) = 2(x^3 - 5x) + 2x(3x^2 - 5)$
7.	$D\dfrac{f}{g} = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$	$D\dfrac{4x+1}{3x} = \dfrac{4 \cdot 3x - (4x+1) \cdot 3}{(3x)^2}$

Esim. 7.12. Millä vakion a arvoilla funktion $f(x) = a^2x^2 - 2x$ muutosnopeus on 38 kohdassa $x = 5$?

Ratkaisu: Funktion muutosnopeus on sama kuin derivaatan arvo. Täten $f'(5) = 38$.

Derivoidaan funktio $\quad f'(x) = 2a^2x - 2$

Sijoitetaan $x = 5$ $\quad f'(5) = 2a^2x - 2 = 2a^2 \cdot 5 - 2 = 10a^2 - 2$

Saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
10a^2 - 2 &= 38 \\
10a^2 &= 40 \\
a^2 &= 4 \\
a &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan yhtälöstä a.

Vast. Kun $a = \pm 2$.

7.11. Tangentin ja normaalin yhtälö

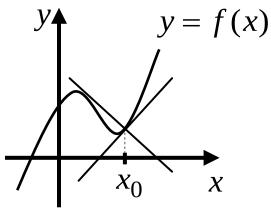
Yhtälön johtaminen, kun annettu piste on funktion kuvaajalla

Tangentti on suora ja suoran yhtälö saadaan kaavasta $y - y_0 = k(x - x_0)$, jossa (x_0, y_0) on suoran yksi piste ja k on suoran kulmakerroin. Koska tangentin kulmakerroin k_t pisteessä x_0 on derivaatan arvo eli $k_t = f\,'(x_0)$ ja tangentti ja sen normaali ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli $k_t \cdot k_n = -1$, josta saadaan $k_n = -\dfrac{1}{k_t}$.

Täten funktion kohtaan x_0 piirretyn tangentin ja normaalin yhtälö:

tangentti $\quad y - y_0 = f\,'(x_0)(x - x_0)$

normaali $\quad y - y_0 = -\dfrac{1}{f\,'(x_0)}(x - x_0)$



Esim. 7.13. Muodosta tangentin yhtälö funktiolle $f(x) = 2x^3 - 4x$ kohtaan $x = 1$.

Ratkaisu: Derivaatta $f\,'(x) = 6x^2 - 4$ ja näin tangentin kulmakerroin $k_t = f\,'(1) = 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 2$.

Tangentin *y*-koordinaatti $y = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 = -2$ (kulkee pisteen $(1, -2)$ kautta).

Tangentin yhtälö

$$
\begin{aligned}
y - y_0 &= k_t(x - x_0) \\
y - (-2) &= 2(x - 1) \\
y + 2 &= 2x - 2 \\
y &= 2x - 4.
\end{aligned}
$$

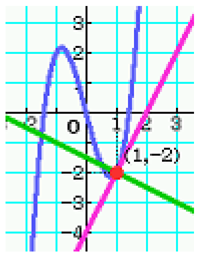
Normaalin kulmakerroin

v

$$
\begin{aligned}
k_t \cdot k_n &= -1 \\
2k_n &= -1 \\
k_n &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Normaalin yhtälö

$$
\begin{aligned}
y - y_0 &= k_n(x - x_0) \\
y - (-2) &= -\frac{1}{2}(x - 1) \\
y + 2 &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\
y &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$



Vast. Tangentin yhtälö $y = 2x - 4$ ja normaalin yhtälö $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

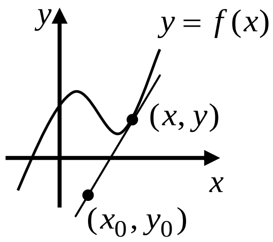
Yhtälön johtaminen, kun annettu piste ei ole funktion kuvaajalla

Ratkaistaan ensin tangentin kulmakerroin k_t, jonka avulla saadaan normaalin kulmakerroin käyttämällä tietoa, että $k_t \cdot k_n = -1$.

Tangentin kulmakerroin saadaan laskettua kahdella eri tavalla

tapa 1: $k_t = f\,'(x)$

tapa 2: $k_t = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$



Merkitään kulmakertoimet yhtäsuuriksi,
käytetään tietoa, että $y = f(x)$ ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

Esim. 7.14. Johda funktiolle $f(x) = x^2 + 2x$ tangentin, joka kulkee pisteen $(-1, -5)$ kautta, yhtälö.

Ratkaisu: Piste ei ole funktion $f(x)$ kuvaajalla, koska $f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1 \neq -5$.

Ratkaistaan tangentin kulmakerroin $k_t = f\,'(x) = 2x + 2$

Toisaalta kulmakerroin $k_t = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y - (-5)}{x - (-1)} = \dfrac{y + 5}{x + 1}$

Koska $y = f(x) = x^2 + 2x$, niin saadaan $k_t = \dfrac{y + 5}{x + 1} = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$

Merkitään yhtäsuuriksi ja ratkaistaan x laskimella.

$$2x + 2 = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}, \text{ josta } x = -3 \text{ tai } x = 1$$

Tangenttien kulmakertoimet

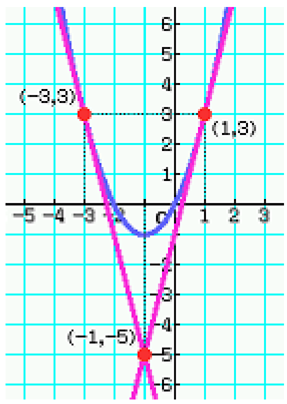
kun $x = -3$, niin
$k_t = f\,'(-3) = 2 \cdot (-3) + 2 = -4$

kun $x = 1$, niin
$k_t = f\,'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

Tangenttien yhtälöt

$y - (-5) = -4(x - (-1))$
$y = -4x - 9$

$y - (-5) = 4(x - (-1))$
$y = 4x - 1$



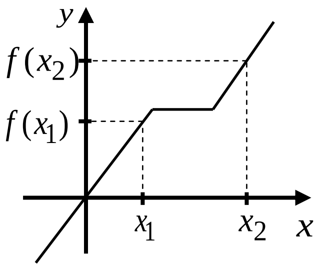
Vast. Tangenttien yhtälöt ovat $y = -4x - 9$ ja $y = 4x - 1$.

7.12. Käyrien välinen kulma

Kahden käyrän välinen kulma leikkauspisteessä

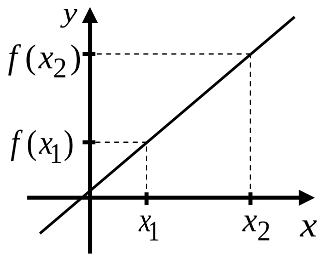
Kahden käyrän välisellä kulmalla leikkauspisteessä tarkoitetaan käyrien leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välistä kulmaa α, joka saadaan kuten M4 kurssissa laskettiin kahden suoran välistä kulmaa yhtälöstä $\tan\alpha = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

7.13. Funktion kasvaminen ja väheneminen



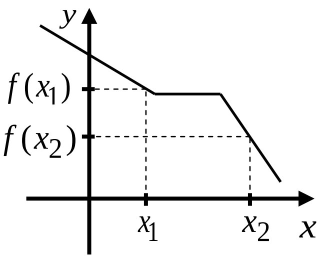
Funktio on kasvava, jos kaikilla x:n arvoilla on voimassa ehto

$f(x_1) \le f(x_1)$, kun $x_1 < x_1$



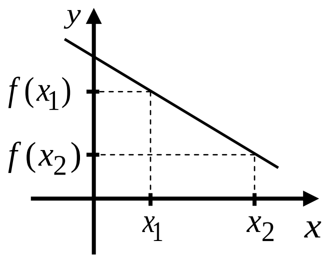
Funktio on aidosti kasvava, jos kaikilla x:n arvoilla on voimassa ehto

$f(x_1) < f(x_1)$, kun $x_1 < x_1$



Funktio on vähenevä, jos kaikilla x:n arvoilla on voimassa ehto

$f(x_1) \ge f(x_1)$, kun $x_1 < x_1$



Funktio on aidosti vähenevä, jos kaikilla x:n arvoilla on voimassa ehto

$f(x_1) > f(x_1)$, kun $x_1 < x_1$

Huomautus: Funktio on monotoninen, jos funktio on kasvava tai vähenevä.
Funktio on aidosti monotoninen, jos funktio on aidosti kasvava tai vähenevä.

7.14. Funktion tutkiminen derivaatan avulla

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Olkoon funktio $f(x)$ jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä $]a,b[$.

Jos välillä $]a,b[$ toteutuu ehto

1. $f'(x) \geq 0$, niin $f(x)$ on kasvava välillä $[a,b]$.
2. $f'(x) \leq 0$, niin $f(x)$ on vähenevä välillä $[a,b]$.
3. $f'(x) = 0$, niin $f(x)$ on vakio välillä $[a,b]$.
4. $f'(x) > 0$ ja $f'(x) = 0$ korkeintaan yksittäisissä kohdissa, niin $f(x)$ on aidosti kasvava välillä $[a,b]$.
5. $f'(x) < 0$ ja $f'(x) = 0$ korkeintaan yksittäisissä kohdissa, niin $f(x)$ on aidosti vähenevä välillä $[a,b]$.

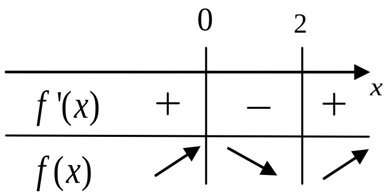
Esim. 7.15. Milloin funktio $f(x) = x^3 - 3x^2$ on aidosti kasvava ja milloin aidosti vähenevä?

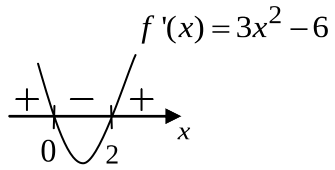
Ratkaisu: Funktio on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva kaikkialla.

Derivoidaan funktio $f'(x) = 3x^2 - 6x$

Derivaatan nollakohdat $3x^2 - 6x = 0$, josta $x = 0$ tai $x = 2$

Tehdään derivaatan merkkikaavio (funktion kulkukaavio)





Vast. Funktio on aidosti kasvava, kun $x \leq 0$ tai $x \geq 2$.

Funktio on aidosti vähenevä, kun $0 \leq x \leq 2$.

Huomautus: Derivaatan merkin tutkiminen voidaan tehdä myös testipisteiden avulla.

$$f'(-1) = 9 > 0$$
$$f'(1) = -3 < 0$$
$$f'(3) = 9 > 0$$

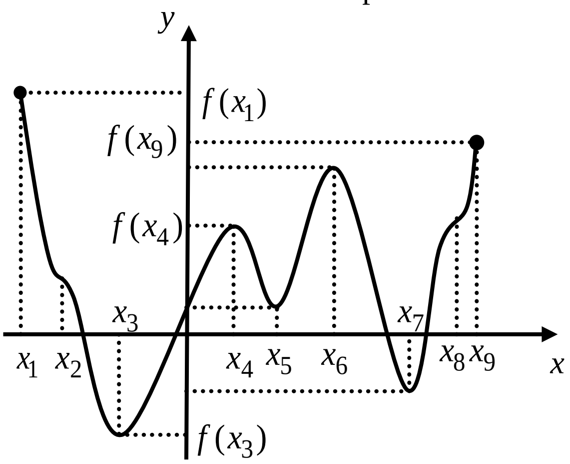
Funktion ääriarvot, ääriarvokohdat ja ääriarvopisteet

Ääriarvot, ääriarvokohdat ja ääriarvopisteet voivat olla paikallisia (lokaaleja) tai absoluuttisia (globaaleja). Ääriarvolla tarkoitetaan funktion saamaa paikallista tai absoluuttista arvoa. Ääriarvokohdalla tarkoitetaan sitä x:n arvoa, jossa funktio saa ko. arvon. Ääriarvopisteellä tarkoitetaan paikallista tai absoluuttista ääriarvopistettä.

Paikalliset ääriarvot

minimiarvo: $f(x_3)$, $f(x_5)$ ja $f(x_7)$

maksimiarvo: $f(x_1)$, $f(x_4)$, $f(x_6)$ ja $f(x_9)$



Absoluuttiset ääriarvot

pienin arvo: $f(x_3)$

suurin arvo $f(x_1)$

Paikalliset ääriarvokohdat

minimikohta: x_3, x_5 ja x_7

maksimikohta: x_1, x_4, x_6 ja x_9

Absoluuttiset ääriarvokohdat

minimikohta: x_3

maksimikohta: x_1

Ääriarvopisteet: esim. piste $(x_4, f(x_4))$ on paikallinen maksimipiste.

Huomautus: Kohdat x_2 ja x_8 eivät ole ääriarvokohtia.

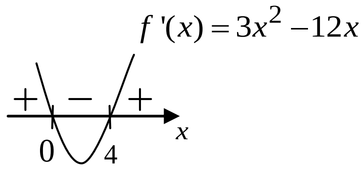
Esim. 7.16. Kuinka monta nollakohtaa on funktiolla $f(x) = x^3 - 6x^2 - 1$

Ratkaisu: Polynomifuntkiona jatkuva ja derivoituva kaikkialla.

Derivoidaan $f'(x) = 3x^2 - 12x$. Täten $f'(x) = 0$, kun $x = 0$ tai $x = 4$.

Funktion kulkukaavio

	0		4		x
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$	
$f(x)$	↗		↘	↗	



Funktion ääriarvo $f(0) = -1 < 0$. Funktiolla on vain yksi nollakohta, koska paikallinen maksimipiste $(0, -1)$ on x-akselin alapuolella.

Vast. Funktiolla $f(x) = x^3 - 6x^2 - 1$ on vain yksi nollakohta.

7.15. Jatkuvan funktion lauseet

Funktion suurin ja pienin arvo

Olkoon funktio $f(x)$ jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$. Tällöin funktion saamien arvojen joukossa on funktion suurin ja pienin arvo sekä funktio saa kaikkia arvot suurimman ja pienimmän arvon välissä.

Bolzanon lause

Olkoon funktio $f(x)$ jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja $f(a)\cdot f(b)<0$ (funktio saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot), niin tällöin funktiolla on ainaekin yksi nollakohta välillä $]a,b[$.

Esim. 7.17. Todista, että funktio $f(x)=3x^5+4x+3$ saa arvon 1.

Todistus: Funktio saa arvon 1, jos yhtälöllä $3x^5+4x+3=1$, josta saadaan $3x^5+4x+2=0$, on ratkaisu. Merkitään $g(x)=3x^5+4x+2$. Koska $g(-1)=3\cdot(-1)^5+4\cdot(-1)+2=-5<0$ ja $g(0)=2>0$ sekä polynomifunktiona $g(x)$ on jatkuva välillä $[-1,0]$, niin Bolzanon lauseen mukaan funktiolla $g(x)$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]-1,0[$. Täten myös yhtälöllä $3x^5+4x+3=1$ on ainakin yksi ratkaisu ko. välillä ja näin myös funktion $f(x)=3x^5+4x+3$ saa arvon 1 välillä $]-1,0[$. (Olisi voitu myös todeta aidosti kasvavaksi funktioksi, koska $f'(x)>0$ ja täten $f(x)$ saa kaikki arvot).

Fermat'n lause

Olkoon funktio $f(x)$ jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a,b[$. Tällöin funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai niissä derivaatan nollakohdissa, jotka ovat avoimella välillä $[a,b]$.

Esim. 7.18. Laske funktion $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$ suurin ja pienin arvo välillä $[2,5]$

Ratkaisu: Derivoidaan $f'(x)=3x^2-12x+9$. Täten $f'(x)=0$, kun $x=3$ tai $x=1$ (ei kelpaa).

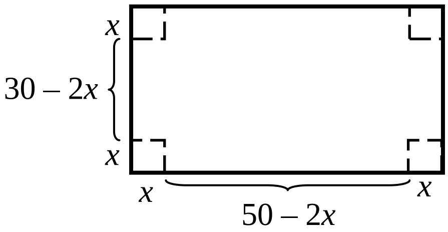
Lasketaan funktion arvo kohdissa $x=2, x=3$ ja $x=5$ $f(2)=5, f(3)=3$ ja $f(5)=23$.

Vast. Suurin arvo 23 ja pienin arvo 3.

7.16. Sovellustehtävät

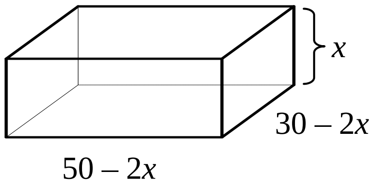
Sovellustehtävissä pitää esin muodostaa funktion lauseke ja määrittelyjoukko annettujen tietojen avulla. Tämän jälkeen tehtävä ratkaistaan kuten muutkin ääriarvotehtävät.

Esim. 7.19. Pakkauslaatikot valmistetaan suorakulmion muotoisista pahveista, joiden leveys on 30 cm ja pituus 50 cm, siten, että jokaisesta nurkasta leikataan samankokoinen neliö pois. Kuinka korkea laatikosta tulisi tehdä, jotta laatikon tilavuus olisi mahdollisimman suuri. Kuinka monta litraa laatikon tilavuus tällöin on?



Ratkaisu: Leikataan jokaisesta nurkasta neliön, jonka sivun pituus on x, muotoinen pala pois.

Taitetaan sivut ylös, jolloin syntyy laatikko, jonka korkeus on x ja pohjan sivunjen pituudet ovat $50-2x$ ja $30-2x$.



Laatikon tilavuus $V = A_p \cdot h$

Täten laatikon tilavuudeksi tilavuudeksi saadaan

$$V(x) = (50-2x)(30-2x)x = 4x^3 - 160x^2 + 1500x,\ 0 \le x \le 15$$

Määrittelyjoukko $0 \le x \le 15$ saatiin siitä, että neliötä leikatessa sivun pituus ei voi olla negatiivinen ja lyhyemmän sivun pituus on 30 cm ja siksi leikattavan neliön pituus ei voi olla yli 15 cm.

Voidaan käyttää Fermat'n lausetta, koska funktio $V(x)$ on polynomifunktiona jatkuva välillä $\left[0,15\right]$ ja derivoituva välillä $\left]0,15\right[$.

Derivoidaan $V'(x) = 12x^2 - 320x + 1500$

Derivaatan nollakohdat $12x^2 - 320x + 1500 = 0$

$x = 6{,}0685...$ tai $x = 20{,}5981...$ (ei kelpaa, $0 \le x \le 15$)

Lasketaan tilavuudet $V(0) = 0$

$V(0) = 4104{,}4103...$

$V(15) = 0$

Tilavuus $V = 4104{,}4103...\ \text{cm}^3 = 4{,}1044...\ \text{dm}^3 \approx 4{,}1$ lirtaa

Vast. Laatikosta tulisi tehdä 6,1 cm korkea, jolloin tilavuus on 4,1 litraa.

Tehtävissä 7.1 – 7.7 ei saa käyttää laskinta.

7.1. Derivoi funktiot

a) $f(x)=2x^3-4x^2+6x-7$

b) $f(x)=x^{-4}-8x^{\frac{3}{4}}+6x^{-1}+2x$

c) $f(x)=\dfrac{3x+1}{4x-2}$

d) $f(x)=(-2x^3+x)^2$

e) $f(x)=(x^5+2x-1)(4x-2)$

f) $f(x)=\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{5x}{10x^3}+\dfrac{x^5}{4}-3x+2$

7.2. Laske raja-arvot

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{2x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^3-18x}{x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-8x^3+16x^2}{x-4}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-|x|}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-3x+6}{x-2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

7.3. Ratkaise yhtälöt

a) $\dfrac{2x^2}{x-1}-x=0$ **b)** $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1}{x}+1$

7.4. Ratkaise epäyhtälöt

a) $\dfrac{x}{x-1}\le x$ **b)**

$\dfrac{x+5}{x-1}\ge x-1$

7.5. a) Millä muuttujan x arvoilla polynomin $P(x)=x^4-x^3+x$ derivaatta saa arvon 1?

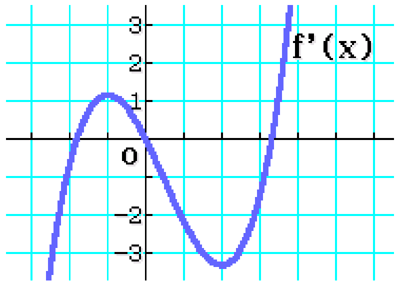
b) Millä vakion a arvoilla suora $a^2y-2a^2-ax+2x-y+2=0$ on nouseva?

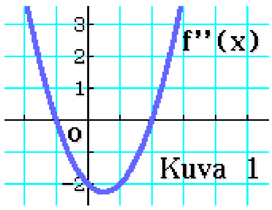
7.6. a) Sievennä $\dfrac{x^2-9}{4x^2+12x+9}\cdot\dfrac{2x^2+6}{x+3}$

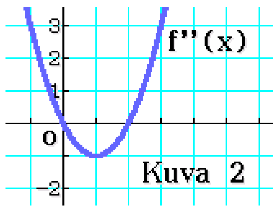
b) Sievennä $\dfrac{(2x^2+2x)(x-1)}{x^3+6x^2+9x}:\dfrac{2x^2-2}{x+3}$

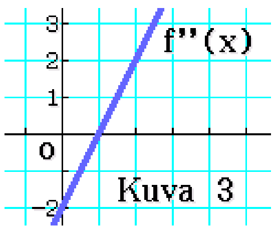
c) Määritä raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-2|+2}{x^2-1}$

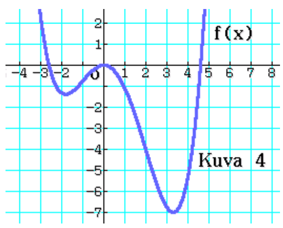
7.7. Vieressä on funktion $f(x)$ kuvaaja. Mitkä alla olevista kuvista 1 – 4 pitävät paikkansa?











Tehtävissä 7.8 – 7.15 saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa. (Katso kaikki ratkaisut)

7.8. Alapuolella on piirrettynä funktion $y = f(x)$ kuvaaja. Vastaa kuvaajan perusteella alla oleviin kysymyksiin.

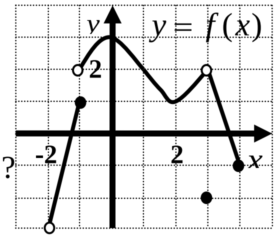
a) $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)$ **b)** $f(3)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Onko funktio $f(x)$ jatkuva

d) kohdassa $x=-1$

e) välillä $3 < x \le 4$

f) oikealta kohdassa $x=-1$?



7.9. a) Määritä funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$ se tangentti, joka kulkee pisteen $(3,-4)$ kautta.
(tiedosto, video)

b) Määritä $f(x) = 2x^2 - x + 1$ kohtaan $x = 1$ piirretyn normaalin yhtälö.
(tiedosto, video)

7.10. a) Mikä on funktion

$f(x) = x^4 - 4x^3, x \in [1,5]$

suurin ja pienin arvo?
(tiedosto, video)

b) Milloin funktio

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 - \frac{7}{6}x$ on aidosti kasvava ja milloin aidosti vähenevä? Määritä funktion ääriarvopisteet?
(tiedosto, video)

7.11. a) Laske funktioiden $f(x) = x^2 + 2$ ja $g(x) = 2x^2 + 2x + 3$ välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.
(tiedosto, video)

b) Olkoon funktio $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x$.

Kumpi on suurempi $f(0{,}3333333332)$ vai $f(0{,}3333333331)$?
(tiedosto, video)

7.12. Kahden metrin korkeudelta heitetty pallo osuu viiden metrin päässä olevan puun runkoon viiden metrin korkeudella. Pallon heittorata on paraabeli, jonka huippu on heittäjän ja puun välissä kahden metrin etäisyydellä puusta. Laske heittokulma. (K91/6) (tiedosto, video)

7.13. a) Ratkaise yhtälö $\frac{2x + a^2 - 3a}{x-1} = a$ vakion a kaikilla reaaliarvoilla. (K93 / 5).
(tiedosto, video)

b) Millä vakion a arvolla funktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x + a}{x-3}, & x < 2 \\ ax^2 + x - 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

on jatkuva kaikkialla?
(tiedosto, video)

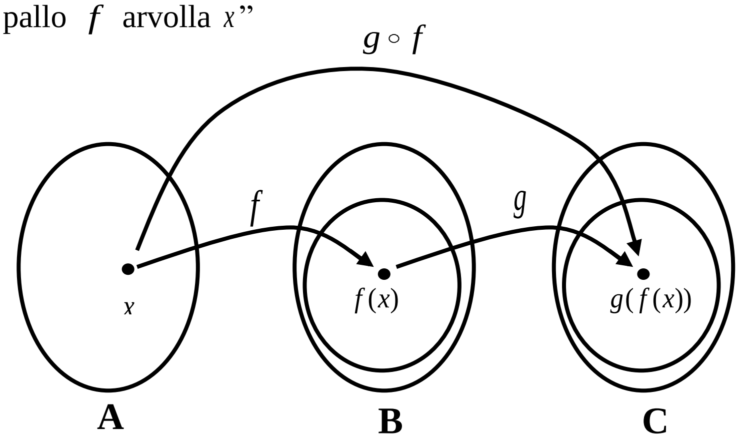
7.14. Suorakulmaisen särmiön pohjan pituuden ja leveyden suhde on 2:3. Laske suurimman sellaisen kannellisen suorakulmaisen särmiön muotoisen astian korkeus, jonka kokonaispinta-ala on 300 cm^2.
(tiedosto, video)

7.15. Kolmannen asteen polynomista P(x) tiedetään, että se on jaollinen binomilla x+2. Lisäksi sen derivaatan minimiarvo on -27/2, kun x=$\frac{1}{2}$. Polynomin hetkellinen muutosnopeus kohdassa x=3 on 24. Jos polynomi jaetaan binomilla $x-4$, niin jakojäännös on 36. Laske P(6).
(tiedosto, video)

M8 Juuri- ja logaritmifunktiot

8.1. Yhdistetty funktio

Olkoot funktiot $f:A\to B$ ja $g:B\to C$. Yhdistetyssä funktiossa $g\circ f$ sisäfunktion f arvojoukosta $f(x)$ tulee ulkofunktion g määrittelyjoukko. Merkintä $(g\circ f)(x)$ luetaan ”g pallo f arvolla x”



Yhdistetyllä funktiolla $(g\circ f)(x)$ (lue "g pallo f") tarkoitetaan funktiota, jonka määrittelee yhtälö $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. Funktiota f sanotaan sisäfunktioksi ja funktiota g ulkofunktioksi.

Esim. 8.1. Anna esimerkki sisäfunktiosta $s(x)$ ja ulkofunktiosta $u(x)$, jolle $f(x)=(u\circ s)(x)$, kun **a)** $f(x)=\sqrt{x+1}$ **b)** $f(x)=4x^2-12x+9$

Vast. **a)** $s(x)=x+1$ ja $u(x)=\sqrt{x}$ **b)** $s(x)=2x-3$ ja $u(x)=x^2$

Esim. 8.2. **a)** Muodosta funktiot $(g\circ f)(x)$, kun $f(x)=2x+1$ ja $g(x)=x^2-1$.

b) Mikä on funktion $(f\circ g)(x)$ määrittelyjoukko, kun $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ ja $g(x)=x^2-1$.

Ratkaisu: **a)** $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2-1=4x^2+4x+1-1=4x^2+4x$

b) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=f(x^2-1)=\dfrac{1}{(x^2-1)-3}=\dfrac{1}{x^2-4}$.

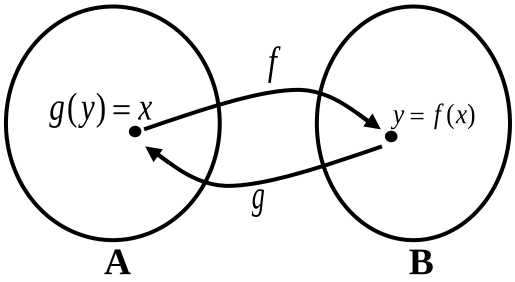
Yhdistetty funktio on määritelty kun $x\neq\pm2$.

Vast. **a)** $(g\circ f)(x)=4x^2+4x$ b) Määritelty, kun $x\neq\pm2$.

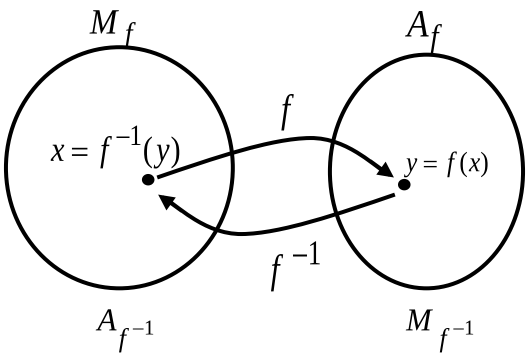
8.2. Käänteisfunktio

Käänteisfunktion määritelmä

Funktiot $f: A \to B$ ja $g: B \to A$ ovat toistensa käänteisfunktioita, kun kaikilla $x \in A$ on $g(f(x)) = x$ ja kaikilla $y \in B$ on $f(g(y)) = y$.



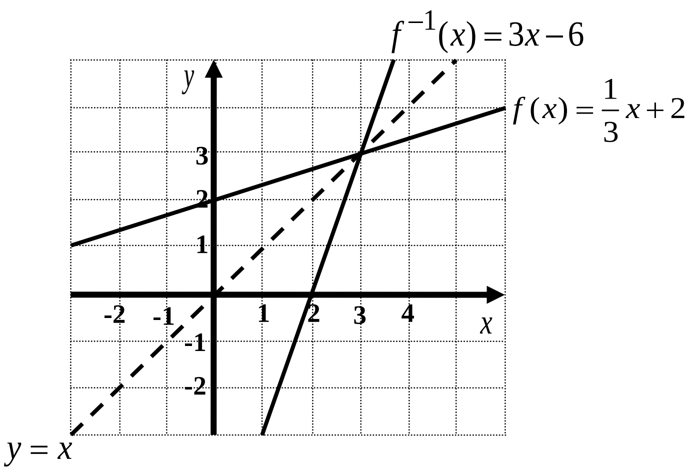
Funktion ja sen käänteisfunktion määrittelyjoukko ja arvojoukko vaihtuvat toisikseen.



Esim. 8.3. Osoita, että funktiot $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ ja $f^{-1}(x) = 3x - 6$ ovat toistensa käänteisfunktioita.

Ratkaisu: Funktiot ovat toistensa käänteisfunktioita, jos $f^{-1}(f(x)) = x$ eli $(f^{-1} \circ f) = x$.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\frac{1}{3}x + 2) = 3(\frac{1}{3}x + 2) - 6 = x + 6 - 6 = x$$



Funktion ja sen käänteisfunktin kuvaajat

Vain aidosti monotonisella funktiolla (aidosti kasvava tai aidosti vähenevä funktio) voi olla käänteisfunktio olemassa, sillä käänteisfunktion määritelmän mukaan muuttujan x kahdella eri arvolla x_1 ja x_2 pitää olla aina erisuuret arvot $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Funktion $f(x)$ ja sen käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajat ovat symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen, jos funktioilla on sama muuttuja, muuten kuvaajat yhtyvät. Kuvaajat näyttävät symmetrisiltä vain, jos $x-$ ja $y-$ akselin yksiköt ovat samanpituiset.

Käänteisfunktion muodostaminen

Muodosta funktion $f(x)$ käänteisfunktio- tyyppinen tehtävä ratkaistaan seuraavasti:

1. Tutki funktion aito monotonisuus (vain aidosti monotonisella funktiolla on käänteisfunktio olemassa).
2. Tutki funktion määrittelyjoukko M_f ja arvojoukko A_f.
3. Ratkaise funktion lauseke x:n suhteen.
4. Vaihda merkinnät (y:n ja x:n paikka).
5. Kirjoita käänteisfunktion lauseke. Muista, että määrittelyjoukko- ja arvojoukko vaihtuvat toisikseen.

Esim. 8.4. Muodosta funktion $f(x)$ käänteisfunktio, kun a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = x^2 - 4$

Ratkaisu: **a)** Funktion $f(x) = x + 2$ on kuvaaja on nouseva suora ja siksi aidosti kasvava funktio ja täten käänteisfunktio on olemassa.

Funktion $f(x) = x + 2$ määrittelyjoukko $M_f = \mathbb{R}$ ja arvojoukko $A_f = \mathbb{R}$.

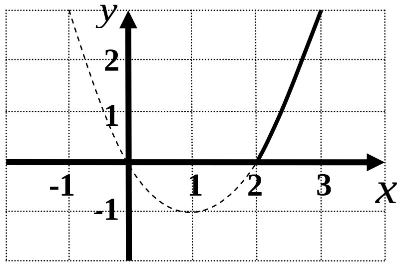
$$
\begin{aligned}
f(x) &= x + 2 && \\
y &= x + 2 && \text{Ratkaistaan } x. \\
x &= y - 2 && \text{Vaihdetaan merkinnät.} \\
y &= x - 2 &&
\end{aligned}
$$

Täten käänteisfunktio $f^{-1}(x) = x - 2$.

Vast. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = x - 2$

Esim. 8.5. Muodosta funktion $f:[2,\infty[\,\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x$ käänteisfunktio $f^{-1}(x)$.

Ratkaisu: **1)** Funktion $f(x)=x^2-2x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huipun $x-$koordinaatti on $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2\cdot 1}=1$



Näin ollen funktio on aidosti kasvava, kun $x\geq 1$.
Koska funktion määrittelyjoukko $M_f=[2,\infty[$, niin funktio on aidosti kasvava ja käänteisfunktio on olemassa.

2) Funktion $f:[2,\infty[\,\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x$ määrittelyjoukko $M_f=[2,\infty[$ ja arvojoukko $A_f=[0,\infty[$. Näin ollen käänteisfunktion $M_{f^{-1}}=A_f=[0,\infty[$ ja arvojoukko $A_{f^{-1}}=M_f=[2,\infty[$.

3) Ratkaistaan x:n suhteen täydentämällä ensin neliöksi

$$x^2-2x=y$$
$$x^2-2x+1=y+1$$
$$(x-1)^2=y+1 \qquad \|\sqrt{\ }$$
$$\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{y+1}$$
$$|x-1|=\sqrt{y+1} \qquad \|x-1\geq 0,\ \text{kun } x\in[2,\infty[\ \text{ja siksi } |x-1|=x-1$$
$$x-1=\sqrt{y+1}$$
$$x=\sqrt{y+1}+1$$

4) Vaihdetaan merkinnät
$$y=\sqrt{x+1}+1$$

5) Käänteisfunktio $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}+1$

Vast. $f^{-1}:[0,\infty[\,\to[2,\infty[,\quad f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}+1$

Esim. 8.6. Muodosta funktion $f(x)=\dfrac{6x}{x+1};x\in[0,2]$ käänteisfunktio.

Ratkaisu: Tutkitaan derivaatan avulla funktion monotonisuutta.

$$f'(x)=\frac{6(x+1)-6x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{6x+6-6x}{(x+1)^2}=\frac{6}{(x+1)^2}>0\text{, kun } x\in[0,2]$$

Funktio on aidosti kasvava, kun $x\in[0,2]$ ja siksi sillä on käänteisfunktio olemassa.

Funktion pienin arvo $f(0)=\dfrac{6\cdot 0}{0+1}=0$ ja suurin arvo $f(2)=\dfrac{6\cdot 2}{2+1}=4$.

Näin saadaan $M_f=A_{f^{-1}}=[0,2]$ ja $A_f=M_{f^{-1}}=[0,4]$

$$y=\frac{6x}{x+1} \qquad \| \cdot(x+1)$$

$$y(x+1)=6x$$

$$yx+y=6x$$

$$6x-yx=y$$

$$(6-y)x=y \qquad \| :(6-y)$$

$$x=\frac{y}{6-y} \qquad \| \text{ Vaihdetaan merkinnät}$$

$$y=\frac{x}{6-x}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{6-x}$$

Vast. $f^{-1}:[0,4]\to[0,2],\ f^{-1}(x)=\dfrac{x}{6-x}$

Tarkistus: Käänteisfunktion määritelmän mukaan funktiot $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ ovat toistensa käänteisfunktioita, kun $f^{-1}(f(x))=x$ eli $(f^{-1}\circ f)=x$.

$$f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{6x}{x+1}\right)=\frac{\frac{6x}{x+1}}{6-\frac{6x}{x+1}}=x$$

8.3. Käänteisfunktion derivaatta

Käänteisfunktiota ei tarvitse muodostaa, kun lasketaan käänteisfunktion derivaatan arvoa.
Jos funktio $f(x)$ on aidosti monotoninen, se on derivoituva kohdassa x ja sen derivaatta $f'(x) \neq 0$, niin silloin käänteisfunktion derivaatta saadaan kaavasta $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $y_0 = f(x_0)$.

Esimerkiksi funktio $f(x) = x^3 + x$ on kaikkialla aidosti kasvava, koska $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ ja siksi sillä on käänteisfunktio olemassa. Käänteisfunktion lauseke on kuitenkin mahdoton muodostaa lukion oppikurssien perusteella.

Esim. 8.7. Olkoon $f(x) = x^3 + x$. Laske $(f^{-1})'(2)$.

Ratkaisu: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ ja siksi $f(x) = x^3 + x$ on aidosti kasvava ja käänteisfunktio on olemassa.

Ratkaistaan ensin x kaavasta $(f^{-1})(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, missä $y = f(x)$.

$$y = f(x) \qquad \| \; y = 2 \text{ ja } f(x) = x^3 + x$$

$$2 = x^3 + x$$

$$x^3 + x - 2 = 0 \qquad \| \text{ Ratkaistaan yhtälö laskimella}$$

$$x = 1$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} \qquad \| \; f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{10}$$

Vast. $(f^{-1})(2) = \dfrac{1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \dfrac{1}{10}$

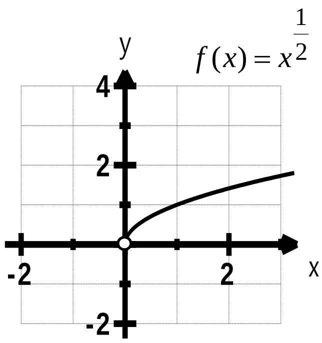
8.4. Yleinen potenssifunktio

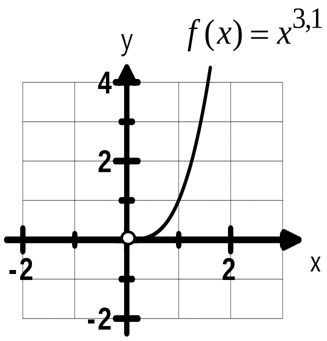
- Yleinen potenssifunktio $f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}, x > 0$.
- Rajoitusehto $x > 0$ on välttämätön, sillä esimerkiksi funktiossa $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$.

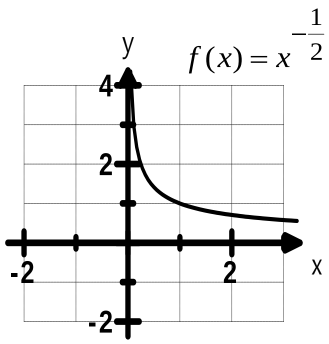
$$f(0) = 0^{\frac{0}{2}} = \sqrt{0^0} \qquad 0^0 \text{ ei ole määritelty}$$

$$f(-4) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \qquad \text{ei ole määritelty}$$

- Yleisen potenssifunktion määrittelyjoukko ja arvojoukko on $\mathbb{R}_+$ eli $M_f = A_f = \mathbb{R}_+$.
- Yleisen potenssifunktion kuvaajan kohtaan $x = 0$ piirretään avoin ympyrä, koska $M_f = \mathbb{R}_+$.







Potenssifunktiot	**Määrittely-joukko**	**Arvo-joukko**	**Jatkuvuus ja derivoituvuus**
$f(x) = x^n, n = 2, 4, \ldots$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty[$	Jatkuva ja derivoituva kaikkialla.
$f(x) = x^n, n = -2, -4, \ldots$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$]0, \infty[$	Jatkuva ja derivoituva, kun $x \neq 0$
$f(x) = x^n, n = 3, 5, \ldots$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Jatkuva ja derivoituva kaikkialla.
$f(x) = x^n, n = -1 -3, \ldots$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Jatkuva ja derivoituva, kun $x \neq 0$
$f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \frac{m}{n} > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Jatkuva ja derivoituva välillä $]0, \infty[$.
$f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \frac{m}{n} > 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Jatkuva ja derivoituva välillä $]0, \infty[$.

8.5. Potenssiyhtälöt $x^n = a$

Yhtälön ratkaiseminen, kun eksponentti on kokonaisluku $x^n = a, x \in \mathbb{R}$

Jos eksponentti $n = 2, 3, 4, \ldots$

1. Kirjoita yhtälö muotoon $x^n = a$

2. Ota yhtälön molemmista puolista n:s juuri. Muista $\pm$, kun otat parillisen juuren.

Esim.

a)

$$3x^4 = 48 \quad |:3$$
$$x^4 = 16 \quad |\sqrt[4]{\ }$$
$$x = \pm 2$$

b)

$$2x^3 = -250 \quad |:2$$
$$x^3 = -125 \quad |\sqrt[3]{\ }$$
$$x = -5$$

c)

$$10x^6 = -100 \quad |:10$$
$$x^6 = -10$$

Ei reaalista ratkaisua, koska $x^6 \geq 0$

Jos eksponentti $n = 2, 3, 4, \ldots$

1. Kirjoita yhtälö muotoon $x^n = a$.

Käytä sääntöä $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

2. Ota yhtälön molemmista puolista n:s juuri. Muista $\pm$, kun otat parillisen juuren.

$$2x^{-3} = 54 \quad |:2$$
$$x^{-3} = 27$$
$$\frac{1}{x^3} = \frac{27}{1}$$
$$27x^3 = 1 \quad |:27$$
$$x^3 = \frac{1}{27} \quad |\sqrt[3]{\ }$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$$
$$x = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$$

Huomautus: Potenssiyhtälöllä $x^n = a, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ on enintään kaksi ratkaisua.

Ratkaisujen lukumäärä riippuu eksponentin n ja a:n arvosta seuraavasti:

	$n = 2, 4, 6, 8. \ldots$	$n = -2, -4, -6, -8, \ldots$
$a > 0$	kaksi ratkaisua $x = \pm\sqrt[n]{a}$	kaksi ratkaisua $x = \pm\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$
$a = 0$	yksi ratkaisu $x = 0$	ei yhtään ratkaisua
$a < 0$	ei yhtään ratkaisua	ei yhtään ratkaisua
	$n = 1, 3, 5, 7, \ldots$	$n = -1, -3, -5, -7, \ldots$
$a > 0$	yksi ratkaisu $x = \sqrt[n]{a}$	yksi ratkaisu $x = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$
$a = 0$	yksi ratkaisu $x = 0$	ei yhtään ratkaisua
$a < 0$	yksi ratkaisu $x = \sqrt[n]{a}$	yksi ratkaisu $x = -\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

Murtopotenssin kertaus

Murtopotenssin määritelmä $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Kantaluku $a > 0$, sillä muuten tulee seuraavanlaisia ongelmia

1. $0^{\frac{0}{5}} = \sqrt[5]{0^0}$ ei ole mahdollinen, koska 0^0 ei ole määritelty

2. $(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8}$ ei ole mikään reaaliluku, koska parillista juurta ei voi ottaa negatiivisesta luvusta

Yhtälön ratkaiseminen, kun eksponentti on murtopotenssi

***n* on positiivinen murtopotenssi**

1. Saata yhtälö muotoon $x^{\frac{m}{n}} = a$

2. Tutki määrittelyehto
3. Korota yhtälön molemmat puolet potenssiin $\frac{n}{m}$ (eksponentin $\frac{m}{n}$ käänteisluku)

Esim.

$$(x-1)^{\frac{3}{2}} = 8 \qquad \Big|\,(\ )^{\frac{2}{3}},\ x-1>0,\ \text{josta } x>1$$

$$x-1 = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$x-1 = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = 4$$

$$x-1 = 4$$

$$x = 5$$

***n* on negatiivinen murtopotenssi**

1. Saata yhtälö muotoon $x^{-\frac{m}{n}} = a$

2. Tutki määrittelyehto
3. Korota yhtälön molemmat puolet potenssiin $-\frac{n}{m}$ (eksponentin $-\frac{m}{n}$ käänteisluku)

$$3x^{-\frac{5}{2}} = 96 \qquad \|:3, \quad x>0$$

$$x^{-\frac{5}{2}} = 32 \,\|\, (\ )^{-\frac{2}{5}}$$

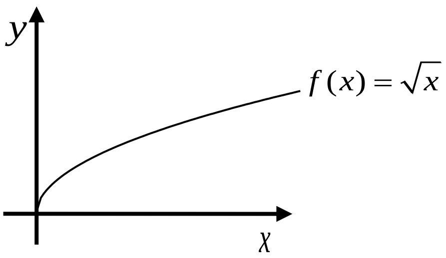
$$\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(2^5\right)^{-\frac{2}{5}}$$

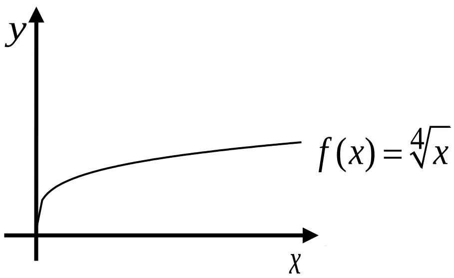
$$x = 2^{-2}$$

$$x = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

8.6. Juurifunktio

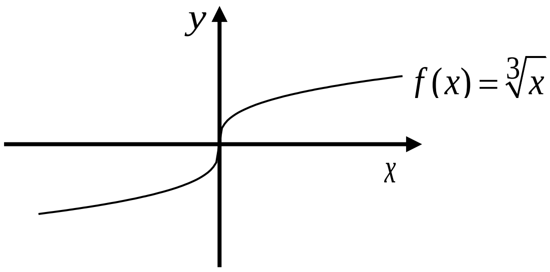
Parillinen juurifunktio $f(x)=\sqrt[n]{x}$ **, n = 2, 4, 6,** ...

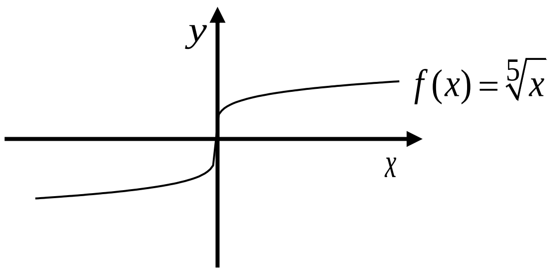




- Määrittelyjoukko $M_f=[0,\infty[$
- Arvojoukko $A_f=[0,\infty[$
- Jatkuva välillä $[0,\infty[$. Jatkuva toispuolisesti kohdassa $x=0$.
- Derivoituva välillä $]0,\infty[$
- Aidosti kasvava
- Käänteisfunktio $f^{-1}(x)=x^n$, $x\geq 0$

Pariton juurifunktio $f(x)=\sqrt[n]{x}$ **, n = 3, 5, 7** ...





- Määrittelyjoukko $M_f=\mathbb{R}$
- Arvojoukko $A_f=\mathbb{R}$
- Jatkuva kaikkialla
- Derivoituva, kun $x\neq 0$
- Pariton funktio
- Aidosti kasvava
- Käänteisfunktio $f^{-1}(x)=x^n$

8.7. Neliöjuuriyhtälöt

Neliöjuuriyhtälöt voidaan ratkaista kahdella eri tavalla.

Tapa 1:	Tapa 2:
1. Muokkaa yhtälöä siten, että toisella puolella on neliöjuurilauseke ja toisella puolella muut termit.	**1.** Muokkaa yhtälöä siten, että toisella puolella on neliöjuurilauseke ja toisella puolella muut termit.
2. Korota neliöön.	**2.** Tutki milloin molemmat puolet ovat ei-negatiivisia.
3. Tarkista ja anna vastaus.	**3.** Korota neliöön, ratkaise yhtälö ja anna vastaus.

Esim.

Tapa 1:

$$\sqrt{2-x}-x=0$$

$$\sqrt{2-x}=x \quad \Big|\,(\ )^2$$

$$2-x=x^2$$

$$x^2+x-2=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{-1\pm3}{2}$$

$$x=-2 \text{ tai } x=1$$

Tarkistetaan saadut vastaukset

Jos $x=-2$, niin $\sqrt{2-(-2)}-(-2)=0$

$$\sqrt{4}+2=0$$

$$4=0 \text{ Epätosi}$$

Jos $x=1$, niin $\sqrt{2-1}-1=0$

$$\sqrt{1}-1=0$$

$$0=0 \text{ Tosi}$$

Vast. $x=1$

Tapa 2:

$$\sqrt{x-3}+x=5$$

$$\sqrt{x-3}=-x+5$$

$x-3\ge0$ ja $-x+5\ge0$

$x\ge3$ $\quad$ $x\le5$

Täten $3\le x\le5$

$$\sqrt{x-3}=-x+5 \quad \Big|\,(\ )^2$$

$$x-3=x^2-10x+25$$

$$x^2-11x+28=0$$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot1\cdot28}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{11\pm3}{2}$$

$x=4$ tai $x=7$ (ei käy, koska $3\le x\le5$)

$x=4$

8.8. Juurifunktion derivointi

Ennen derivointia funktion $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ lauseke kirjoitetaan murtopotenssimuotoon $f(x)=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ ja derivoinnin jälkeen lauseke kirjoitetaan takaisin juurimuotoon.

$$\textbf{esim.}\quad D\sqrt[3]{x^2}=Dx^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Esim. 8.8. Johda yhtälö käyrän $f(x)=\sqrt{2x+1}$ tangentille, joka kulkee pisteen (4,3) kautta.

Ratkaisu: Piste (4,3) on funktiolla $f(x)=\sqrt{2x+1}$, koska $f(4)=\sqrt{2\cdot4+1}=\sqrt{9}=3$.

Tangentin yhtälö $y-y_0=k_t(x-x_0)$, jossa $x_0=4$ ja $y_0=3$ ja $k_t=f\,'(x)=f\,'(4)$.

Derivoidaan funktio $f(x)=\sqrt{2x+1}=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$ ja lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x=4$, jolloin saamme tangentin kulmakerroin ratkaistua.

$$f\,'(x)=\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot2=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Tangentin kulmakerroin kohdassa $x=4$

$$k_t=f\,'(4)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot4+1}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

Tangentin yhtälöksi saadaan

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y-3=\frac{1}{3}(x-4)$$

$$y-3=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$$

$$y=\frac{1}{3}x+1\frac{2}{3}$$

Vast. Tangentin yhtälö $y = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$

Esim. 8.9. Mikä on funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ suurin arvo?

Ratkaisu: Funktio on määritelty kaikkialla, sillä $x^2 + 4 > 0$, ja siksi se on jatkuva kaikkialla.

Derivoidaan funktio $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{2}}$

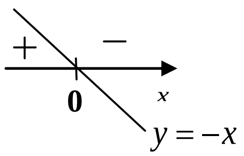
$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2+4\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

Funktio on derivoituva kaikkialla.

Derivaatta on nolla, kun osoittaja on eli kun $x = 0$

Derivaattafunktion nimittäjä $(x^2+4)\sqrt{x^2+4} > 0$ ja siksi derivaatan merkki riippuu kokonaan derivaatan osoittajan $-x$ merkistä. Näin derivaatan merkkikaavioksi eli funktion kulkukaavioksi saadaan

		0 x
$-x$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘



Kulkukaaviosta huomataan, että funktio saa suurimman arvon, kun $x = 0$, jolloin

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{0^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Vast. Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ suurin arvo on $\frac{1}{2}$, kun $x = 0$

8.9. Logaritmifunktio

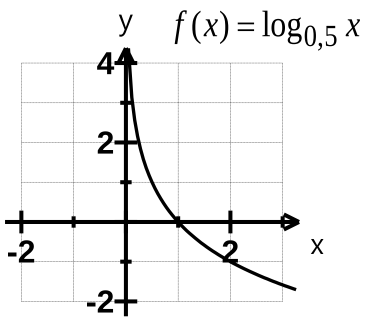
Logaritmifunktio $f(x) = \log_a x, a, x > 0, a \neq 1$

- Logaritmifunktio on eksponenttifunktion $y = a^x$ käänteisfunktio
- Logaritmifunktio $f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$, jossa

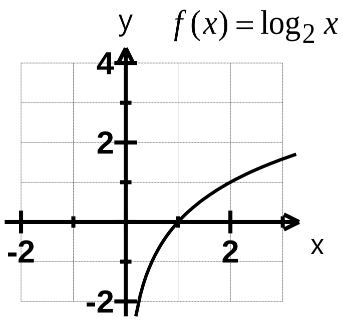
  a on kantaluku

  x on numerus

- Jos kantaluku $0 < a < 1$, niin logaritmifunktion kuvaaja on aidosti vähenevä.
- Jos kantaluku $a > 1$, niin logaritmifunktion kuvaaja on aidosti kasvava.



Aidosti vähenevä



Aidosti kasvava

- Määrittelyjoukko $M_f = \mathbb{R}_+$
- Arvojoukko $A_f = \mathbb{R}$

- Jatkuva ja derivoituva, kun $x > 0$
- Kuvaaja kulkee pisteen $(1,0)$ kautta
- Aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$
- Aidosti kasvava, kun $a > 1$
- Käänteisfunktio $f^{-1}(x) = a^x$ kun $a \neq 1$

8.10. Logaritmin määritelmä

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, ($a =$ kantaluku, $x =$ numerus) ($a, x > 0$ ja $a \neq 1$)

Esim. 8.10. **a)** $\log_2 8 = 3$, koska $2^3 = 8$

b) $\log_5 25 = 2$, koska $5^2 = 25$

c) $\log_3(-9)$, ei määritelty, koska numerus $-9 < 0$

d) $\log_{-4} 16$, ei määritelty, koska kantaluku $-4 < 0$

Huomautus:

- Logaritmin kantalukuina esiintyy useimmiten luku 10 ja Neperin luku e ($e \approx 2,71828$). Neperin luku on irrationaaliluku (päättymätön, jaksoton desimaaliluku).
- 10-kantaista logaritmia $\log_{10} x$ kutsutaan Briggsin logaritmiksi ja se merkitään lyhyesti $\lg x$ (laskimissa se on merkitty kuitenkin log).

  $\log_{10} 100 = \lg 100 = 2$, koska $10^2 = 100$

- e-kantaista logaritmia $\log_e x$ kutsutaan luonnolliseksi logaritmiksi ja se merkitään lyhyesti $\ln x$ (laskimessa myös).

  $\log_e 1 = \ln 1 = \ln e^0 = 0$, koska $e^0 = 1$

Esim. 8.11. Määritä **a)** $\log_5 5^{-4}$ **b)** $\log_2 \frac{1}{8}$ **c)** $\log_2 16\sqrt{32}$ **d)** $\log_3 27$

Ratkaisu: **a)** $\log_5 5^{-4} = -4$

b) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 \frac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} = -3$

c) $\log_2 16\sqrt{32} = \log_2 2^4 \cdot \sqrt{2^5} = \log_2 2^4 \cdot 2^{\frac{5}{2}} = \log_2 2^{4+\frac{5}{2}} = \log_2 2^{\frac{13}{2}} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$

d) $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

8.11. Logaritmin laskukaavat

Laskukaava	Esimerkki
$\log xy = \log x + \log y$	$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$
$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$	$\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
$\log x^a = a \log x$	$4 \log_5 5 = \log_5 5^4 = 4$
$k^{\log_k x} = x$	$3 = 10^{\log_{10} 3} = 10^{\lg 3}$
$\log_k 1 = 0$	$\log_7 1 = 0$, koska $7^0 = 1$
$\log_k k = 1$	$\log_{0,5} 0,5 = 1$, koska $0,5^1 = 0,5$
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_2 7 = \frac{\log_e 7}{\log_e 2} = \frac{\ln 7}{\ln 2}$

Esim. 8.12. Kumpi luvuista 2008^{2009} vai 2009^{2008} on suurempi?

Ratkaisu: Käytetään kaavaa $x = k^{\log_k x}$ käänteisesti ja ilmoitetaan kantaluvut 2008 ja 2009 saman kantaluvun (esimerkiksi luvun 10) avulla, jolloin saadaan

$$2008 = 10^{\log_{10} 2008} = 10^{\lg 2008}$$

$$2009 = 10^{\log_{10} 2009} = 10^{\lg 2009}$$

Lausutaan luvut 2008^{2009} ja 2009^{2008} kantaluvun 10 avulla, jolloin suuruus saadaan selville vertailemalla eksponentteja keskenään, sillä esimerkiksi $10^2 < 10^3$.

$$2008^{2009} = (10^{\lg 2008})^{2009} = 10^{2009 \cdot \lg 2008} = 10^{6635,25229}$$

$$2009^{2008} = (10^{\lg 2009})^{2008} = 10^{2008 \cdot \lg 2009} = 10^{6632,383713}$$

Koska 6635,25229 > 632,383713, niin siksi myös $10^{6635,25229} > 10^{6632,383713}$

Vast. 2008^{2009} on suurempi kuin 2009^{2008}

8.12. Logaritmiyhtälöt

Yhtälön ratkaiseminen

1. Tutki määrittelyjoukko
2. Saata yhtälö joko muotoon $\log x_1 = \log x_2$ tai $\log_a x = y$.
3. Ratkaise yhtälö seuraavasti

Tapaus $\log x_1 = \log x_2$ merkitse $x_1 = x_2$ ja ratkaise yhtälö

Tapaus $\log_a x = y$ käytä hyväksesi logaritmin määritelmää

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Esim. 8.13. Ratkaise yhtälöt **a)** $\log_2 x = -1$ **b)** $\log_3 x^2 - \log_3(x+2) = 0$

Ratkaisu: **a)** Yhtälö on määritelty, kun $x > 0$

$\log_2 x = -1$ Käytetään logaritmien määritelmää $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

$2^{-1} = x$

$x = \frac{1}{2}$ Vastaus voidaan hyväksyä, sillä $\frac{1}{2} > 0$

b) Yhtälö on määritelty, kun $x \neq 0$ ja $x+2>0$, josta saadaan $x > -2,\ x \neq 0$

$\log_3 x^2 - \log_3(x+2) = 0$ Siirretään $-\log_3(x+2)$ oikealle

$\log_3 x^2 = \log_3(x+2)$ Yhtälö toteutuu, kun numerukset ovat yhtä suuria.

$x^2 = x+2$ Ratkaistaan saatu toisen asteen yhtälö

$x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$x = 2$ tai $x = -1$ Molemmat vastaukset voidaan hyväksyä.

Vast. **a)** $x = \frac{1}{2}$ **b)** $x = -1$ tai $x = 2$

8.13. Logaritmiepäyhtälöt

Logaritmifunktio $f(x)=\log_a x$ on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä riippuen kantaluvun a arvosta seuraavasti:

- jos 0 < a < 1, niin funktio on aidosti vähenevä
- jos a > 1, niin funktio on aidosti kasvava

Logaritmifunktion monotonisuutta voidaan käyttää logaritmiepäyhtälöissä hyväksi samaan tapaan kuin eksponenttiepäyhtälöissäkin käytetään.

Logaritmiepäyhtälöt ratkaistaan seuraavasti:

1. Tutki määrittelyehdot. ($\log_a x$, jossa $a, x>0, a\neq 1$).

2. Kirjoita epäyhtälön molemmat puolet samankantaisen logaritmin avulla.

3. Mieti onko kyseessä aidosti kasvava vai aidosti vähenevä funktio (muista laskin).

- aidosti kasvavassa epäyhtälömerkki säilyttää suuntansa
- aidosti vähenevässä epäyhtälömerkki kääntää suuntansa

4. Anna vastaus

Esim.8.14. Ratkaise epäyhtälöt $\lg x<2$

Ratkaisu: Merkintä $\lg x=\log_{10} x$ ja siksi luku 2 ilmoitetaan kymmenkantaisen logaritmin avulla, jolloin saadaan $2=2\cdot 1=2\cdot\log_{10}10=\log_{10}10^2=\log_{10}100$. Näin saadaan

$\lg x<2$	‖ määritelty, kun $x>0$
$\lg x<\lg 100$	‖ $f(x)=\lg x$ on aidosti kasvava funktio ja siksi suunta säilyy
$x<100$	‖ otetaan huomioon alkuehto $x>0$
$0<x<100$	

Vast. $\lg x<2$, kun $0<x<100$

Esim. 8.15. Ratkaise epäyhtälöt $\log_5(x^2-4x)\le 1$

Ratkaisu: Ilmoitetaan luku 1 viisikantaisen logaritmin avulla, jolloin saadaan $1=\log_5 5$

Määritelty, kun $x^2-4x>0$ — Merkitään yhtäsuureksi.

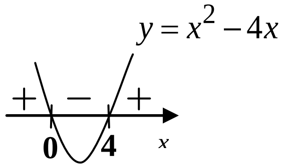
$x^2-4x=0$ — Ratk. nollakohdat erottamalla yht. tekijä x.

$x(x-4)=0$ — Käytetään tulon nollasääntöä.

$x=0 \quad \text{tai} \quad x-4=0$

$x=4$

Hahmotellaan lausekkeen x^2-4x kuvaaja, josta nähdään määrittelyehdoksi $x<0$ tai $x>4$.



Näin saadaan

$\log_5(x^2-4x)\le 1$

$\log_5(x^2-4x)\le \log_5 5$ — Funktio $f(x)=\log_5(x^2-4)$ on aidosti kasvava funktio ja siksi epäyhtälömerkin suunta säilyy

$x^2-4x\le 5$

Ratkaistaan epäyhtälö $x^2-4x\le 5$.

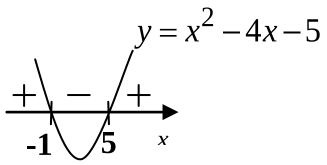
$x^2-4x\le 5$ — Siirretään kaikki termit samalle puolelle.

$x^2-4x-5\le 0$ — Merkitään yhtäsuureksi ja ratkaistaan nollakohdat.

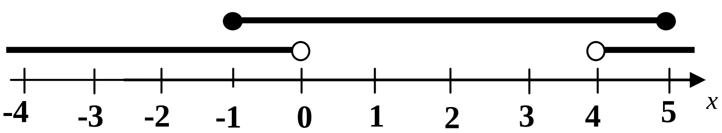
$x^2-4x-5=0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\dfrac{4\pm 6}{2}$, josta saadaan $x=-1$ tai $x=5$

Hahmotellaan kuvaaja josta nähdään milloin $x^2-4x-5\le 0$. Viereisestä kuvaajasta nähdään, että epäyhtälö toteutuu, kun $-1\le x\le 5$.



Ottamalla huomioon myös määrittelyehto $x<0$ tai $x>4$ saadaan vastaukseksi $-1\le x<0$ tai $4<x\le 5$



Vast. $-1\le x<0$ tai $4<x\le 5$

8.14. Logaritmifunktion derivointi

$$D\ln x = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$D\ln|x| = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$D\ln f = \frac{1}{f}\cdot f'$$ **esim.** $$D\ln(3x^2+5x) = \frac{1}{3x^2+5x}\cdot(6x+5) = \frac{6x+5}{3x^2+5x}$$

$$D\log_a x = \frac{1}{x\ln a}, x > 0$$

$$D\log_a|x| = \frac{1}{x\ln a}, x \neq 0$$

$$D\log_a f = \frac{1}{f\ln a}\cdot f'$$ **esim.** $$D\log_5(2x-3) = \frac{1}{(2x-3)\cdot\ln 5}\cdot 2 = \frac{2}{(2x-3)\cdot\ln 5}$$

Esim. 8.16. Mikä on pisteen $(1,2)$ lyhin etäisyys funktiosta $f(x)=\ln x$? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu: Olkoon funktion piste (x,y) se piste, joka on lähinnä pistettä $(1,2)$. Koska $y = f(x) = \ln x$, niin funktion piste on $(x,\ln x)$.

Kahden pisteen välinen etäisyys $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Täten pisteiden $(1,2)$ ja $(x,\ln x)$ välinen etäisyys $d=\sqrt{(1-x)^2+(2-\ln x)^2}$. Tämä etäisyys on lyhin, kun funktio $g(x)=(1-x)^2+(2-\ln x)^2$ saa pienimmän arvonsa.

Derivoidaan $g'(x)=\dfrac{2x^2+2\ln x-2x-4}{x}$

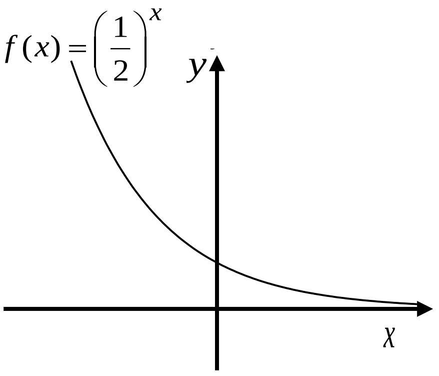
Derivaatan nollakohdat $g'(x)=0$, kun $x=1,7911735$

Koska $g'(1)=-4<0$ ja $g'(2)=\ln 2\approx 0,69>0$, niin funktio $g(x)=(1-x)^2+(2-\ln x)^2$ saa pienimmän arvonsa kohdassa $x=1,7911735$ ja täten myös kysytty etäisyys $d=\sqrt{(1-x)^2+(2-\ln x)^2}$ on pienimmillään, kun $x=1,7911735$. Tällöin etäisyys $d=\sqrt{(1-1,791...)^2+(2-\ln 1,791...)^2}=0,8944...$

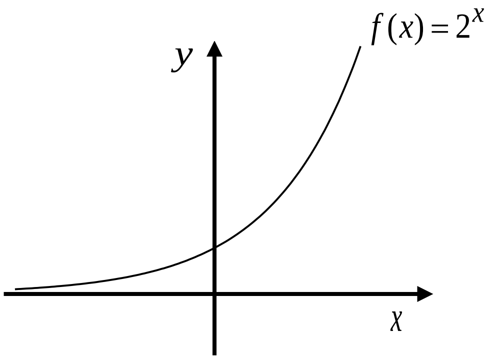
Vast. Lyhin etäisyys on 0,9 pituusyksikköä.

8.15. Eksponenttifunktio

Eksponenttifunktio $f(x)=a^x, a>0, a\neq 1$



$\boxed{\mathbf{0 < a < 1}}$

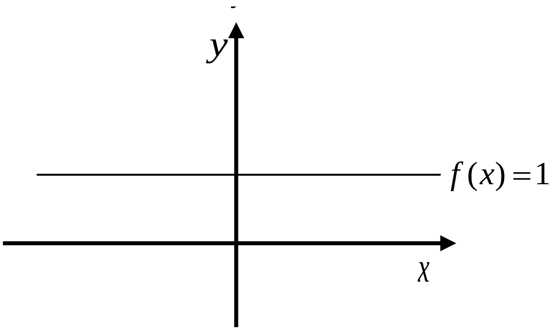


$\boxed{\mathbf{a > 1}}$

- Määrittelyjoukko $M_f=\mathbb{R}$
- Arvojoukko $A_f=\left]0,\infty\right[$
- Jatkuva ja derivoituva kaikkialla
- Kuvaaja kulkee pisteen $(0,1)$ kautta
- Aidosti kasvava, kun $a>1$
- Aidosti vähenevä, kun $0<a<1$
- Käänteisfunktio $f^{-1}(x)=\log_a x$ kun $a\neq 1$

Huomautus: Jos $a=1$, niin kyseessä on vakiofunktio.

Katso viereinen kuva.



Esim. 8.17. Milloin funktio $f(x)=3e^{2x}-6x$ on vähenevä?

Ratkaisu: Jatkuva ja derivoituva kaikkialla, sillä funktiot $a(x)=3e^{2x}$ ja $b(x)=6x$ ovat määriteltyjä kaikkialla ja näin ollen alkeisfunktioina $a(x)$ ja $b(x)$ jatkuvia ja derivoituvia kaikkialla ja näin ollen myös funktio $f(x)=3e^{2x}-6x$ on jatkuva ja derivoituva kaikkialla jatkuvien funktioiden erotuksena.

Derivoidaan $f'(x)=3e^{2x}\cdot 2-6=6e^{2x}-6$

Derivaatan nollakohdat

$$6e^{2x}-6=0$$
$$6(e^{2x}-1)=0$$
$$e^{2x}-1=0$$
$$e^{2x}=1$$
$$e^{2x}=e^{0}$$
$$2x=0$$
$$x=0$$

Tehdään derivaatan merkkikaavio eli funktion kulkukaavio.
Tutkitaan derivaatan $f'(x)=6e^{2x}-6$ merkki testipisteiden avulla.

		0		x
$f'(x)$	$-$		$+$	
$f(x)$	↘		↗	

Testipisteet:

$f'(-1)=6e^{2\cdot(-1)}-6\approx -5,2<0$

$f'(1)=6e^{2\cdot 1}-6\approx 38,3>0$

Kulkukaaviosta huomataan, että funktio $f(x)=3e^{2x}-6x$ on vähenevä, kun $x\leq 0$.

Vast. Funktio $f(x)=3e^{2x}-6x$ on vähenevä, kun $x\leq 0$.

8.16. Eksponentiaalinen kasvaminen ja väheneminen

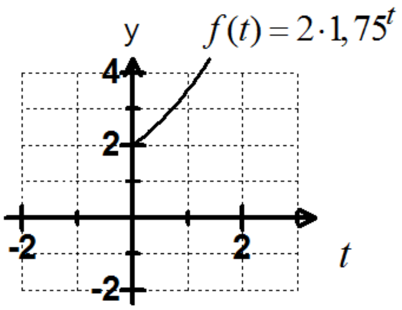
Monet luontoon liittyvät ilmiöt kuten radioaktiivinen hajoaminen voidaan mallintaa eksponenttifunktion avulla, jolloin funktio on muotoa $f(t) = ka^t$, $k \in \mathbb{R}_+, a > 0, a \neq 1$, jossa

k = suureen alkuarvo

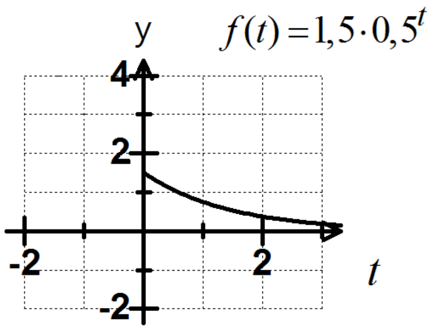
t = aika

a = kasvukerroin

- Jos $a > 1$, puhutaan eksponentiaalisesta kasvamisesta.
- Jos $0 < a < 1$, puhutaan eksponentiaalisesta vähenemisestä.



Eksponentiaalinen kasvaminen ajan funktiona



Eksponentiaalinen väheneminen ajan funktiona

Esim. 8.18. Vuoden alussa talletetaan 5 000 € tilille, jolle maksetaan 2 % korkoa. Kuinka paljon tilillä on rahaan 7 vuoden päästä?

Ratkaisu: Kasvu on eksponentiaalista, jolloin kasvanut pääoma voidaan mallintaa funktiolla

$f(t) = k \cdot a^t$, jossa

$k = 5000$ alkuperäinen pääoma

$a = 1{,}02$ korkotekijä ($1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$)

$t = 7$ aika vuosina

Pääoma 7 vuoden kuluttua $f(7) = 5000 \cdot 1{,}02^7 = 5743{,}428... \approx 5743{,}43$

Vast. 7 vuoden kuluttua tilillä on 5743,43 €

Esim. 8.19. Erästä radioaktiivista ainetta joutui onnettomuudessa luontoon 3,7 kilogrammaa, josta puhdistusoperaation jälkeen luontoon jäi vielä 120 g. Kyseessä olevan radioaktiivisen aineen puoliintumisaika on 90 vuotta. Laske paljonko radioaktiivista ainetta oli luonnossa vielä **a)** 10 vuoden **b)** 60 vuoden jälkeen onnettomuudesta.

Hajoaminen on eksponentiaalista, koska samassa ajassa hajoaa aina sama osuus ainetta. Näin radioaktiivisen aineen määrä N ajan t funktiona saadaan kaavasta

$N(t) = N_0 a^t$, jossa

$N(t) =$	radioaktiivisen aineen määrä t vuoden kuluttua
$N_0 = 120\,g$	radioaktiivisen aineen määrä alussa
$t =$	aika vuosina

Koska puoliintumisaika on 90 vuotta, niin radioaktiivisen aineen määrä 90 vuoden kuluttua on 60 g eli $N(90) = 60g$ (puolet alkuperäisestä määrästä). Näin saadaan yhtälö

$$60g = 120g \cdot a^{90} \qquad \| :120g$$

$$120g \cdot a^{90} = 60g \qquad \| :120g$$

$$a^{90} = \frac{1}{2} \qquad \| \sqrt[90]{}$$

$$a = \sqrt[90]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{90}}$$

Radioaktiivisen aineen määrä N ajan t funktiona

$$N(t) = N_0\, a^t = 120g \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{90}}\right)^t = 120g \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{90}}$$

a) Radioaktiivista ainetta on 10 vuoden kuluttua $N(10) = 120g \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{90}} = 111{,}10497g$

b) Radioaktiivista ainetta on 60 vuoden kuluttua $N(10) = 120g \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{90}} = 75{,}595263g$

Vast. **a)** 110 g **b)** 76 g.

8.17. Eksponenttiyhtälöt

Yhtälöä $k^x = a$, jossa tuntematon on eksponentissa, sanotaan eksponenttiyhtälöksi.

Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen

1. Kirjoita yhtälön molemmat puolet saman kantaluvun potensseina.
2. Merkitse eksponentit yhtä suuriksi.
3. Ratkaise yhtälö ja anna vastaus.

Esim.

$$3\cdot 8^{x-5}=6 \quad \big| :3$$
$$8^{x-5}=2 \quad \big| 8=2^3$$
$$(2^3)^{x-5}=2 \quad \big| (a^m)^n=a^{m\cdot n}$$
$$2^{3x-15}=2^1$$
$$3x-15=1$$
$$x=\frac{16}{3}$$

Vast. $x=\frac{16}{3}$

Joskus tarvitaan logaritmejä, jotta molemmilla puolilla olisi sama kantaluku.

$$4\cdot 10^x=20 \quad \big| :4$$
$$10^x=5 \quad \big| 5=10^{\log_{10}5}=10^{\lg 5}$$
$$10^x=10^{\lg 5}$$
$$x=\lg 5$$
$$x=0,698...$$
$$x\approx 0,7$$

$x\approx 0,7$

8.18. Eksponenttiepäyhtälöt

Eksponenttiepäyhtälön ratkaiseminen

1. Kirjoita yhtälön molemmat puolet saman kantaluvun potensseina.

2. Mieti onko kyseessä aidosti kasvava tai aidosti vähenevä funktio.

Aidosti kasvavassa epäyhtälömerkki säilyttää suuntansa.

Esim.

$$6\cdot 4^x\le 24 \quad \big| :6$$
$$4^x\le 4$$
$$4^x\le 4^1 \quad \big| 4^x \text{ on aid. kasvava}$$
$$x\le 1$$

Vast. $x\le 1$

Aidosti vähenevässä epäyhtälömerkki kääntää suuntansa.

$$3\cdot 0,5^x<\frac{3}{2} \quad \big| :3$$
$$0,5^x<\frac{1}{2}$$
$$0,5^x<0,5^1 \quad \big| 0,5^x \text{ on aid. vähenevä}$$
$$x>1$$

$x>1$

Esim. 8.20. Ratkaise epäyhtälöt **a)** $4\cdot 2^{x-1}>12$ **b)** $7\cdot 0,3^{x+2}\le 14$.

Ratkaisu: **a)**

$$4\cdot 2^{x-1}>12 \quad \big| :4(>0,\ \text{suunta ei käänny})$$

$$4\cdot 2^{x-1}>12 \quad \big| :4$$

$$2^{x-1}>3 \quad \big| \lg$$

$$\lg 2^{x-1}>\lg 3 \quad \big| \log x^r = r\log x$$

$$(x-1)\lg 2>\lg 3 \quad \big| :\lg 2(>0,\ \text{suunta ei käänny})$$

$$x-1>\frac{\lg 3}{\lg 2}$$

$$x>\frac{\lg 3}{\lg 2}+1$$

$$x>2,584...$$

b)

$$7\cdot 0,3^{x+2}\le 14 \quad \big| :7(>0,\ \text{suunta ei käänny})$$

$$0,3^{x+2}\le 2 \quad \big| \ln$$

$$\ln 0,3^{x+2}\le \ln 2 \quad \big| \log x^r = r\log x$$

$$(x+2)\ln 0,3\le \ln 2 \quad \big| \ln 0,3(<0,\ \text{suunta kääntyy})$$

$$x+2\ge \frac{\ln 2}{\ln 0,3}$$

$$x\ge \frac{\ln 2}{\ln 0,3}-2$$

$$x\ge -2,575...$$

Vast. **a)** $x>2,6$ **b)** $x\ge -2,6$ b)

8.19. Eksponenttifunktion derivointi

$De^x = e^x$

$De^f = e^f\cdot f'$ **esim.** $De^{5x}=e^{5x}\cdot 5 = 5e^{5x}$

$Da^x = a^x\ln a$ **esim.** $D3^x = 3^x\ln 3$

Tehtävissä 8.1 – 8.7 ei saa käyttää laskinta.

8.1. Derivoi funktiot

a) $f(x)=\left(x^2-5x\right)^8$ **b)** $f(x)=2^{3x^2+4x}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt[3]{x^7}}{\sqrt[5]{x^2}}$ **d)** $f(x)=\dfrac{5xe^{6x}}{e^{4x}}$

e) $f(x)=\ln(3x+2)$ **f)** $f(x)=x^{3x}$

8.2. Olkoon funktio $f(x)=\sqrt{-x^2+4}-3x$ ja

$g(x)=4x^3-5x$.

a) Muodosta funktio $(g\circ f)(x)$.

b) Mikä on funktion $(g\circ f)(x)$ määrittelyjoukko?

8.3. Sievennä.

a) $e^{2\ln 3}$ **b)** $\log_5\sqrt[3]{25}$

c) $\log_2 0{,}25$ **d)** $\lg 50-\lg 5$

e) $\log_3 4+\log_3 4{,}5-\log_3 2$

f) $\dfrac{\log_a a^3+\log_a \dfrac{1}{a^2}}{3\log_a a}$, kun $a > 0$.

8.4. Ratkaise yhtälöt

a) $3\cdot 4^{\frac{1}{2}x^2+1}=24$

b) $\sqrt{x-4}=-x+10$

c) $\log_3(x^2+x-2)-\log_3(-x^2+3x)=1$

d) $\log_x x=2$

e) $2xe^{2x}=8xe^x-6x$

f) $3\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{|x+5|}=6$

8.5. Ratkaise epäyhtälöt

a) $-2\cdot 3^{x^2-2}<-18$

b) $0{,}2^{2x-1}-0{,}2^5\geq 0$

c) $\log_3(x^2-x-2)-\log_3(-x-4)\leq 3$

d) $\log_{0,5}(x^2-1)-\log_{0,5}(x+1)>2$

e) $xe^{2x}-4xe^x>0$

8.6. a) Millä seuraavista funktioista on käänteisfunktio olemassa

$f(x)=x^2+2x, x\leq 0$

$g(x)=x^5+3x$

$h(x)=(x^2+1)e^{3x}$

Onko väite tosi?

b) Funktion $f(x)=4x-8$ ja sen käänteisfunktion $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}x+2$ kuvaajat yhtyvät.

c) Funktion $f(x)=e^{\frac{1}{2}x-3}$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x)=2\ln x+6$.

8.7. Muodosta funktion

a) $f(x)=\dfrac{4x}{2x+5}, x\geq -1$

b) $f:[-1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+8x$

käänteisfunktio.

Tehtävissä 8.8 – 8.15 saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa. (Katso kaikki ratkaisut)

8.8. a) Määritä lausekkeen $2x-\sqrt{1-x^2}$ suurin ja pienin arvo. (K92/7)
(tiedosto, video)

b) Määritä $(f^{-1})'(0)$, kun
$f(x)=\frac{\ln x}{2x}; x\in]0,e]$.
(tiedosto, video)

8.9. a) Derivoi funktio $f(x)=e^{2x-2}+x^3-1$
(tiedosto, video)

b) Määritä käyrän $y=e^{2x-2}+x^3-1$ pisteeseen (1, 1) piirretyn tangentin yhtälö.
c) Määritä sen janan pituus, jonka koordinaattiakselit erottavat edellisen kohdan tangentista.
(tiedosto, video)

8.10. Olkoon funktio
$f(x)=\frac{1}{2}(x+11)-2\sqrt{x+6}$
a) Milloin funktio on aidosti vähenevä?
b) Mitkä ovat funktion ääriarvopisteet?
(tiedosto, video)

8.11. Kolmion kaksi kärkeä ovat pisteissä (1, 3) ja (2,5). Kolmas kärki on käyrällä $y=\ln(1+x)$ Mitkä ovat kärjen koordinaatit, kun kolmion ala on mahdollisimman pieni? (S99/8b) (tiedosto, video)

8.12. Erästä radioaktiivista ainetta joutui onnettomuudessa luontoon 3,7 kilogrammaa, josta puhdistusoperaation jälkeen luontoon jäi radioaktiivista ainetta vielä 150 g. Kyseessä olevan radioaktiivisen aineen puoliintumisaika on 35 vuotta. Laske paljonko radioaktiivista ainetta oli luonnossa vielä **a)** 10 vuoden **b)** 60 vuoden kuluttua? (tiedosto, video)

8.13. Määritä käyrän $y=\sqrt{1-x}$ pisteeseen $(-1,\sqrt{2})$ piirretyn tangentin yhtälö ja osoita, että käyrä koko määritysjoukossaan (sivuamispistettä lukuun ottamatta) on tämän tangentin alapuolella. (S89/8)
(tiedosto, video)

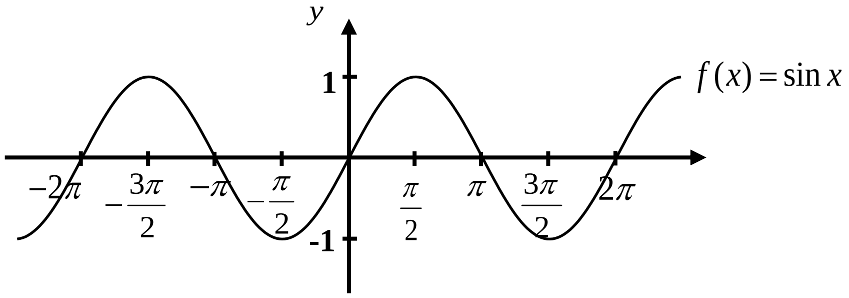
8.14. Funktion $f(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}$ kuvaajalle piirretään normaali kohtaan $x=a\neq 0$. Kun luku a lähestyy nollaa, kyseisen normaalin ja y-akselin leikkauspiste lähestyy tiettyä koordinaatiston pistettä. M'ääritä tämä piste.
(tiedosto, video)

8.15. Maapallon väkiluvun on arvioitu olevan 300 miljoonaa vuonna 1000 ja 460 miljoonaa vuonna 1500. **a)** Ennusta milloin maapallon väkiluku olisi ylittänyt viiden miljardin rajan, jos maapallon väkiluku olisi kasvanut
1^{o} lineaarisesti 2^{o} eksponentiaalisesti.

b) YK:n arvion mukaan maapallon väkiluku ylitti viiden miljardin rajan vuonna 1987. Ennusta a-kohtaa hyväksi käyttäen, mikä olisi ollut maapallon asukasluku vuonna 1987 ja laske kuinka monta prosenttia tulosten perusteella maapallon väkiluku poikkeaisi vuonna 1987 YK:n arviosta.
(tiedosto, video)

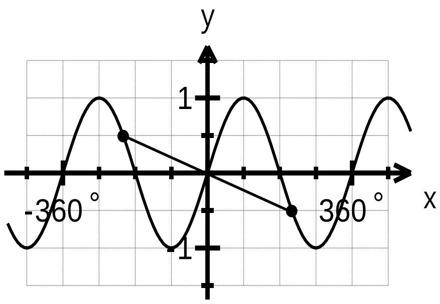
M9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot

9.1. Sinifunktio



- Määrittelyjoukko $M_f = \mathbb{R}$
- Arvojoukko $A_f = [-1,1]$
- Jaksollinen, perusjakso 2π
- Jatkuva ja derivoituva kaikkialla
- Pariton funktio, koska $f(-x) = -f(x)$ eli $\sin(-x) = -\sin x$.

  Näin ollen sinifunktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen.



- Funktio $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$; $f(x) = \sin x$

  on aidosti kasvava ja siksi sillä on käänteisfunktio

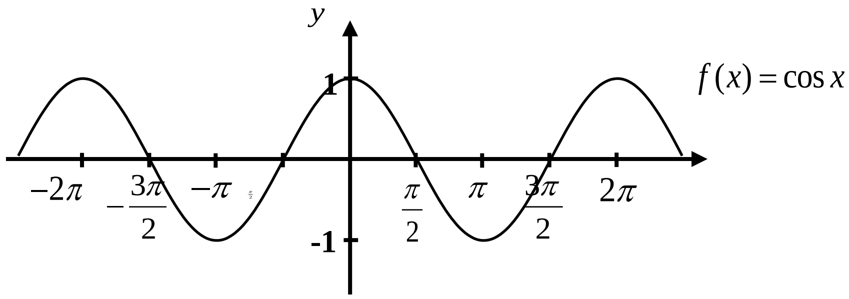
  $f^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $f^{-1}(x) = \arcsin x$ (arkussini, päähaara) olemassa.

- Funktion $f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1,1]$; $f(x) = \sin x$ käänteisfunktiota

  $f^{-1} : [-1,1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; $f^{-1}(x) = \arcsin x$ kutsutaan arkussinin sivuhaaraksi.

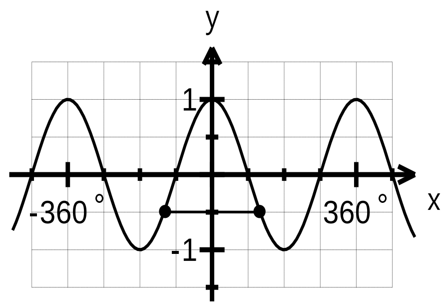
  Aikaisemmin matemaattisessa kirjallisuudessa $f(x) = \arcsin x$ tarkoitti kaikkia haaroja ja $f(x) = \overline{\arcsin x}$ tarkoitti vain päähaaraa.

9.2. Kosinifunktio



- Määrittelyjoukko $M_f = \mathbb{R}$
- Arvojoukko $A_f = [-1,1]$
- Jaksollinen, perusjakso 2π
- Jatkuva ja derivoituva kaikkialla
- Parillinen funktio, koska
  $f(-x) = f(x)$ eli $\cos(-x) = \cos x$.

  Näin ollen kosinifunktion kuvaaja on symmetrinen $y-$akselin suhteen.



- Funktio $f:[0,\pi] \to [-1,1]$; $f(x) = \cos x$

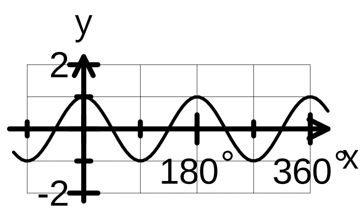
  on aidosti vähenevä ja siksi sillä on käänteisfunktio

  $f^{-1}:[-1,1] \to [0,\pi]$; $f^{-1}(x) = \arccos x$ (arkuskosini, päähaara) olemassa.

Esim. 9.1. Tutki laskimen avulla, mikä on funktion $f(x) = \cos 2x$ perusjakso.

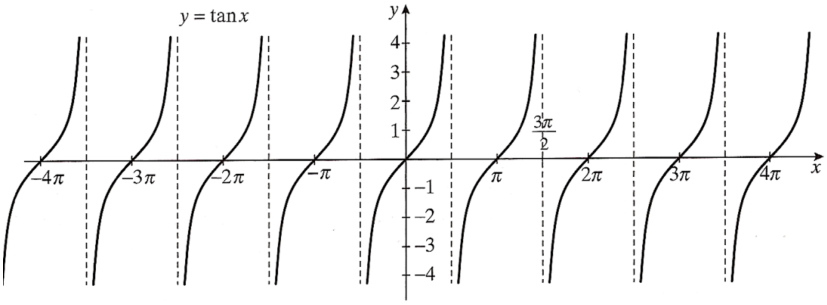
Ratkaisu: Piirretään laskimella funktion $f(x) = \cos 2x$ kuvaaja

Kuvaajasta huomataan, että $f(x) = \cos 2x$ arvot toistuvat aina 180^0 välein.



Vast. Funktion $f(x) = \cos 2x$ perusjakso on 180^0 eli π

9.3. Tangenttifunktio

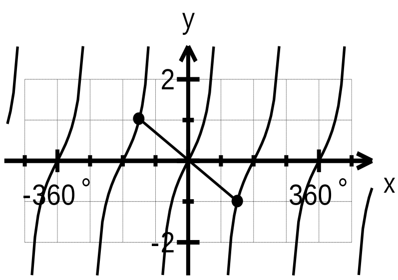


- Määrittelyjoukko $M_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$
- Arvojoukko $A_f = \mathbb{R}$
- Jaksollinen, perusjakso π
- Jatkuva ja derivoituva määrittelyjoukossaan
- Pariton funktio, koska

  $f(-x) = -f(x)$ eli $\tan(-x) = -\tan x$.

  Näin ollen tangenttifunktion kuvaaja on

  symmetrinen origon suhteen.



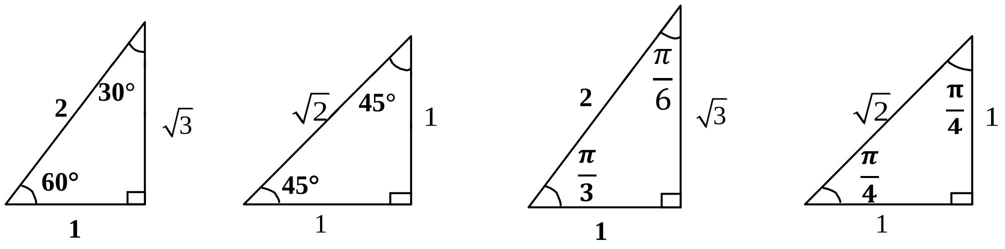
- Funktio $f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R};\ f(x) = \tan x$

  on aidosti kasvava ja siksi sillä on käänteisfunktio

  $f: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[;\ f(x) = \arctan x$ (arkustangentti, päähaara) olemassa.

9.4. Muistikolmiot

asteina **radiaaneina**

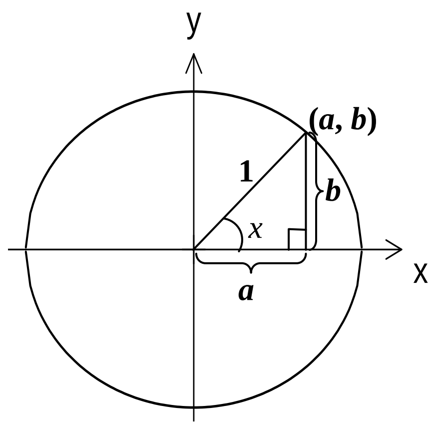


Esim. 9.2. Ratkaise muistikolmioita hyväksi käyttäen lausekkeiden
a) sin 60° **b)** cos 45° **c)** $\tan\frac{\pi}{4}$ **d)** $\cot\frac{\pi}{3}$ tarkka arvo.

Ratkaisu: **a)** $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos 45^\circ = {}^{\sqrt{2})}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} = 1$ **d)** $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

9.5. Peruskaavat



Yksikköympyrän sisällä olevan suorakulmaisen kolmion kateetit ovat *a* ja *b* ja hypotenuusa 1 ja kulma *x*.

Täten saadaan

$\sin x = \frac{b}{1} = b$ (kehäpisteen *y*-koordinaatti)

$\cos x = \frac{a}{1} = a$ (kehäpisteen *x*-koordinaatti)

$$\tan x = \frac{b}{a} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{a}{b} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\tan x}$$

Suorakulmaisessa kolmiossa Pythagoraan lauseen mukaan $b^2 + a^2 = 1$, jolloin saadaan

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, josta edelleen $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ ja $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

Esim. 9.3. Ratkaise **a)** cosα **b)** tanα tarkka arvo, kun $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ja 90° < α < 270°.

Ratkaisu: Koska sinα:n arvo on positiivinen 1. ja 2. neljänneksessä ja koska $90^{\circ} < \alpha < 270^{\circ}$, niin kysytty kulma on 2. neljänneksessä, missä sekä cosα < 0 että tanα < 0.

a) Käytetään taulukkokirjan kaavaa 12

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

| 2. neljännes ($\cos\alpha < 0$), + merkki ei käy
| $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$= -\sqrt{{}^{25)}1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{25-16}{25}}$$

$$= -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = -\frac{3}{5}$$

b) Käytetään taulukkokirjan kaavaa 9

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

| $\sin\alpha = \frac{4}{5}$
| $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

Vast. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ ja $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$

9.6. Palautuskaavat

$$\sin x = -\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(\pi - x) = \sin(x + n \cdot 2\pi) \qquad \textbf{(15)}$$

$$\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos(\pi - x) = \cos(x + n \cdot 2\pi) \qquad \textbf{(16)}$$

$$\tan x = -\tan(-x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\tan(\pi - x) = \tan(x + n \cdot \pi) \qquad \textbf{(17)}$$

$$\cot x = -\cot(-x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cot(\pi - x) = \cot(x + n \cdot \pi) \qquad \textbf{(18)}$$

Esim. 9.4. Sievennä **a)** $\sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x - 4\pi)$ **b)** $\cos(x + 360^{\circ}) + \cos\left(180^{\circ} - x\right)$

Ratkaisu: **a)** Kaavasta 15 saadaan

$\sin(-x) = -\sin x$ — kulma ja vastakulma

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x$ — kosinin ja sinin vaihe-ero on $\frac{\pi}{2}$

$\sin(x - 4\pi) = \sin(x - 2 \cdot 2\pi) = \sin x$ — sinin jakso on 2π :n monikerta

Näin saadaan

$$\sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x - 4\pi) = -\sin x + \sin x + \sin x = \sin x$$

b) Kaavasta 16 saadaan (taulukkokirjan kaavoissa kulmat ovat radiaaneissa)

$\cos(x + 360^{\circ}) = \cos(x + 1 \cdot 360^{\circ}) = \cos x$ — kosinin jakso on 360° :n monikerta

$\cos\left(180^{\circ} - x\right) = -\cos x$ — kulma ja suplementtikulma

Näin saadaan

$$\cos(x + 360^{\circ}) + \cos\left(180^{\circ} - x\right) = \cos x - \cos x = 0$$

Vast. **a)** $\sin x$ **b)** 0

9.7. Trigonometristen funktioiden derivoimiskaavat

$$D\sin x = \cos x \qquad D\cos x = -\sin x$$

$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

Esim. 9.5. Derivoi **a)** $\sin 5x$ **b)** $\cos^3 x$ **c)** $\sin 8x \cos x$ **d)** $\tan 2x$

Ratkaisu: **a)** $D\sin 5x = \cos 5x \cdot 5 = 5\cos 5x$

b) $\cos^3 x = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\sin x \cos^2 x$

c) $\sin 8x \cos x = \cos 8x \cdot 8 \cdot \cos x + \sin 8x \cdot (-\sin x) = 8\cos x \cos 8x - \sin x \sin 8x$

d) $\tan 2x = \dfrac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

Toisin **d)** $\tan 2x = (1 + \tan^2 2x) \cdot 2 = 2(1 + \tan^2 2x)$

9.8. Trigonometriset yhtälöt

Siniyhtälön ratkaiseminen

1. Saata yhtälö muotoon $\sin\alpha = \sin\beta$, jossa α ja β ovat lausekkeita, jotka sisältävät muuttujia.

2. Merkitse kulmat yhtä suureksi $\alpha = \beta$ ja merkitse toiseen (yleensä jälkimmäiseen) jakso n·360° ja ratkaise yhtälö. Muista, että kulman ja suplementtikulman sini ovat yhtä suuria.

3. Tarkista voidaanko vastaukset yhdistää.

4. Anna vastaus.

Esim. 9.6. Ratkaise yhtälöt $\sin(2x + 90^\circ) = \sin(x - 30^\circ)$

Ratkaisu: $\sin(2x + 90^\circ) = \sin(x - 30^\circ)$

$$\begin{aligned}
2x + 90^\circ &= x - 30^\circ + n \cdot 360^\circ && \text{tai} && 2x + 90^\circ = 180^\circ - (x - 30^\circ) + n \cdot 360^\circ \\
2x - x &= -30^\circ - 90^\circ + n \cdot 360^\circ && \text{tai} && 2x + 90^\circ = 180^\circ - x + 30^\circ + n \cdot 360^\circ \\
x &= -120^\circ + n \cdot 360^\circ && \text{tai} && 2x + x = 180^\circ + 30^\circ - 90^\circ + n \cdot 360^\circ \\
& && \text{tai} && 3x = 120^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \Big| :3 \\
& && && x = 40^\circ + n \cdot 120^\circ
\end{aligned}$$

Vastauksia ei voi yhdistää.

Vast. $x = -120^\circ + n \cdot 360^\circ$ tai $x = 40^\circ + n \cdot 120^\circ$

Kosiniyhtälön ratkaiseminen

1. Saata yhtälö muotoon $\cos\alpha = \cos\beta$, jossa α ja β ovat lausekkeita, jotka sisältävät muuttujia.

2. Merkitse kulmat yhtä suureksi $\alpha = \beta$ ja merkitse toiseen (yleensä jälkimmäiseen) jakso n·360° ja ratkaise yhtälö. Muista, että kulman ja vastakulman kosinin arvot ovat yhtä suuria.

3. Tarkista voidaanko vastaukset yhdistää.

4. Anna vastaus.

Esim. 9.10. Ratkaise yhtälö $\cos 3x - \cos(120^o - x) = 0$

Ratkaisu: $\cos 3x - \cos(120^o - x) = 0$

$\cos 3x - \cos(120^\circ - x) = 0$ Siirretään termi $\cos(120^\circ - x)$ oikealle puolelle

$\cos 3x = \cos(120^\circ - x)$

$3x = 120^\circ - x + n \cdot 360^\circ$ tai $3x = -(120^\circ - x) + n \cdot 360^\circ$

$3x + x = 120^\circ + n \cdot 360^\circ$ tai $3x = -120^\circ + x + n \cdot 360^\circ$

$4x = 120^\circ + n \cdot 360^\circ \quad |:4$ tai $3x - x = -120^\circ + n \cdot 360^\circ$

$x = 30^\circ + n \cdot 90^\circ$ tai $2x = -120^\circ + n \cdot 360^\circ \quad |:2$

tai $x = -60^\circ + n \cdot 180^\circ$

Vastaukset voidaan yhdistää, sillä vastaus $x = 30^o + n \cdot 90^o$ sisältää kaikki vastaukset.

Vast. $x = 30^o + n \cdot 90^o$

Tangenttiyhtälön ratkaiseminen

1. Tutki milloin yhtälö on määritelty ($\tan\alpha$ on määritelty, kun $\alpha \neq 90^{o} + n\cdot 180^{o}$).

2. Saata yhtälö muotoon $\tan\alpha = \tan\beta$, jossa α ja β ovat lausekkeita, jotka sisältävät muuttujia.

3. Merkitse kulmat yhtä suureksi ($\alpha = \beta$) ja merkitse toiseen (yleensä jälkimmäiseen) jakso n·180° ja ratkaise yhtälö.

4. Tutki toteuttaako vastaus määrittelyehdon ja anna vastaus.

Esim. 9.11. Ratkaise yhtälö $\tan(x+45^{o})+\tan x = 0$.

Ratkaisu: $\tan(x+45^{o})+\tan x = 0$

$\tan(x+45^{o})+\tan x = 0$ Määritelty, kun $x+45^{o} \neq 90^{o} + n\cdot 180^{o}$

$$x \neq 90^{o} - 45^{o} + n\cdot 180^{o} \quad \text{ja} \quad x \neq 90^{o} + n\cdot 180^{o}$$

$$x \neq 45^{o} + n\cdot 180^{o}$$

$$\tan(x+45^{o})+\tan x = 0$$

$$\tan(x+45^{o}) = -\tan x \qquad \left|\tan x = -\tan(180^{o}-x)\right.$$

$$\tan(x+45^{o}) = -(-\tan(180^{o}-x)) \qquad \left|\tan x = -\tan(180^{o}-x)\right.$$

$$\tan(x+45^{o}) = \tan(180^{o}-x)$$

$$x+45^{o} = 180^{o} - x + n\cdot 180^{o}$$

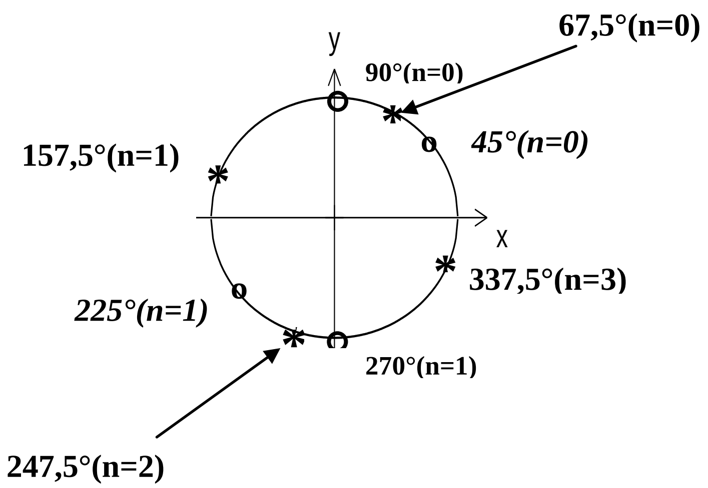
$$x + x = 180^{o} - 45^{o} + n\cdot 180^{o}$$

$$2x = 135^{o} + n\cdot 180^{o} \qquad |:2$$

$$x = 67{,}5^{o} + n\cdot 90^{o}$$

Tutkitaan toteuttaako vastaus määrittelyehdot.

Kaikki vastaukset voidaan hyväksyä.



Vast. $x = 67{,}5^{o} + n\cdot 90^{o}$

Esim. 9.12. Mikä on funktion $f(x)=\sin x+\cos x$ suurin ja pienin arvo?

Ratkaisu: Funktion $f(x)=\sin x+\cos x$ perusjakso on 2π jolloin se saa kaikki arvonsa esim. välillä $[0,2\pi]$ ja siksi tarkastelu voidaan rajata ko. välille. Funktio on jatkuva välillä $[0,2\pi]$ ja derivoituva välillä $]0,2\pi[$. Voidaan käyttää Fermat'n lausetta.

Derivoidaan $f'(x)=\cos x-\sin x$

Derivaatan nollakohdat $\cos x-\sin x=0$, josta saadaan $\sin x=\cos x$

$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ Koska $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, maol s. 37 kaava 16

$x=\frac{\pi}{2}-x+n\cdot 2\pi$ tai $x=\pi-(\frac{\pi}{2}-x)+n\cdot 2\pi$

$2x=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi \quad \|:2$ $\qquad \cancel{x}=\pi-\frac{\pi}{2}+\cancel{x}+n\cdot 2\pi$

(ei ratkaisua)

$x=\frac{\pi}{4}+n\cdot\pi$ Tutkitaan funktioiden leikkauskohdat eri n:n arvoilla

jos $n=-1$, niin $x=\frac{\pi}{4}+(-1)\cdot\pi=\frac{\pi}{4}-^{4)}\pi=\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{4}=\frac{\pi-4\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}\notin[0,2\pi]$

jos $n=0$, niin $x=\frac{\pi}{4}+0\cdot\pi=\frac{\pi}{4}\in[0,2\pi]$

jos $n=1$, niin $x=\frac{\pi}{4}+1\cdot\pi=\frac{\pi}{4}+^{4)}\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{4}=\frac{\pi+4\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}\in[0,2\pi]$

jos $n=2$, niin $x=\frac{\pi}{4}+2\cdot\pi=\frac{\pi}{4}+^{4)}2\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=\frac{\pi+8\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}\notin[0,2\pi]$

Tutkitulla välillä $[0,2\pi]$ derivaatalla on leikkauspisteet $\frac{\pi}{4}$ ja $\frac{5\pi}{4}$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja niissä derivaatan nollakohdissa, jotka ovat annetulla välillä

$f(0)=\sin 0+\cos 0=0+1=1$

$f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ (max)

$f(\frac{5\pi}{4})=\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$ (min)

$f(2\pi)=\sin 2\pi+\cos 2\pi=0+1=1$

Vast. Funktion $f(x)=\sin x+\cos x$ suurin arvo on $\sqrt{2}$, kun $\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi, n\in\mathbb{Z}$

Funktion $f(x)=\sin x+\cos x$ pienin arvo on $-\sqrt{2}$, kun $\frac{5\pi}{4}+n\cdot 2\pi, n\in\mathbb{Z}$

9.9. Lukujono

Lukujonossa $(a_n) = a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

$a_2 =$ lukujonon (a_n) toinen jäsen

$a_n =$ lukujonon (a_n) yleinen jäsen

Lukujonon sääntö voidaan antaa

rekursiivisesti $a_1 = 3, a_2 = -5$ ja $a_n = 2a_{n-2} - a_{n-1}, a_n = 3, 4, 5, ...$

esim. **3. jäsen** $a_3 = 2a_{3-2} - a_{3-1} = 2a_1 - a_2 = 2 \cdot 3 - (-5) = 6 + 5 = 11$

analyyttisesti $a_n = 2n - 1$

esim. **3. jäsen** $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

Esim.9.13 Kirjoita lukujonon **a)** $a_1 = -5$ ja $a_{n+1} = 3a_n - 2, n = 1, 2, 3, ...$ kolmas jäsen

b) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n$ 10. ja 15. jäsen.

Ratkaisu: **a)** Lasketaan ensin toinen jäsen (n = 1) $a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \cdot (-5) - 2 = -15 - 2 = -17$

Kolmas jäsen (n = 2) $a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \cdot (-17) - 2 = -51 - 2 = -53$

b) Kymmenes jäsen $(n = 10)$ $a_{10} = (-1)^9 \cdot 10 = -1 \cdot 10 = -10$

Viidestoista jäsen $(n = 15)$ $a_{15} = (-1)^{14} \cdot 15 = 1 \cdot 15 = 15$

Vast. **a)** $a_3 = -53$ **b)** $a_{10} = -10$ ja $a_{15} = 15$

Lukujonon täsmällinen määritelmä

Lukujono a_n on funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}, f(n) = a_n$

Lukujonon monotonisuus

Lukujono a_n on	kasvava, jos	$a_n \leq a_{n+1}$
	aidosti kasvava, jos	$a_n < a_{n+1}$
	vähenevä, jos	$a_n \geq a_{n+1}$
	aidosti vähenevä, jos	$a_n > a_{n+1}$

Lukujono on aidosti monotoninen, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Esim. 9.14. Osoita, että lukujono $a_n = n^2 + 2n$ on aidosti kasvava.

Ratkaisu: Lukujono on aidosti kasvava, jos $a_n < a_{n+1}$, josta saadaan $a_n - a_{n+1} < 0$.

Täten saadaan

$$a_n - a_{n+1} < 0 \qquad \Big|\, a_n = n^2 + 2n$$

$$(n^2 + 2n) - \left((n+1)^2 + 2(n+1)\right) < 0$$

$$(n^2 + 2n) - \left(n^2 + 2n + 1 + 2n + 2\right) < 0$$

$$n^2 + 2n - n^2 - 4n - 3 < 0$$

$$-2n - 3 < 0$$

Koska $n \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, ...\}$, niin $-2n < 0$ ja täten myös $-2n - 3 < 0$.

Koska erotus $a_n - a_{n+1} < 0$, niin myös $a_n < a_{n+1}$ ja siksi lukujono on aidosti kasvava.

Toisin: Tutkitaan lukujonon $a_n = n^2 + 2n$ asemasta vastaavaa funktiota $f(x) = x^2 + 2x, x \geq 1$.

Polynomifunktiona jatkuva, kun $x \geq 1$ ja derivoituva, kun $x > 1$.

Derivoidaan funktio $\qquad f'(x) = 2x + 2$

Koska $f'(x) > 0$, kun $x \geq 1$, niin silloin funktio $f(x) = x^2 + 2x, x \geq 1$ on aidosti kasvava. Täten myös vastaava lukujono $a_n = n^2 + 2n$ on aidosti kasvava.

9.10. Aritmeettinen lukujono

Peräkkäisen jäsenten a_n ja a_{n-1} erotus d pysyy vakiona eli $d = a_n - a_{n-1} = \text{vakio}$.

esim. lukujono $5, 7, 9, 11, \ldots$ on aritmeettinen lukujono, jossa $a_1 = 5$ ja $d = 2$.

Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n-1)d$

Esim. 9.15. Kirjoita lukujonon 2, 5, 8, 11,… **a)** yleinen jäsen **b)** 50. jäsen **c)** Onko luku 68 lukujonon jäsen?

Ratkaisu: **a)** $d = a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$ ja $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$. Koska peräkkäisten jäsenten erotus pysyy vakiona, niin kyseessä on aritmeettinen lukujono.

Yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)\cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$

Tarkistus: $a_1 = 3\cdot 1 - 1 = 2$ (oikein) ja $a_3 = 3\cdot 3 - 1 = 8$ (oikein))

b) Viideskymmenes jäsen $a_{50} = 3\cdot 50 - 1 = 150 - 1 = 149$

c) Luku 68 on lukujonon jäsen, jos yhtälön $3n - 1 = 68$ ratkaisu on positiivinen kokonaisluku.

$$\begin{aligned} 3n - 1 &= 68 \\ 3n &= 69 \quad \big| :3 \\ n &= 23 \end{aligned}$$

On, 23. jäsen.

Vast. **a)** $a_n = 3n - 1$ **b)** $a_{50} = 149$ **c)** On, 23. jäsen.

Esim. 9.16. Aritmeettisen lukujonon 10. jäsen on 46 ja 25. jäsen on 121. Muodosta lukujonon yleinen jäsen.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} a_{25} &= a_{10} + 15d \quad \big| \; a_{25} = 121 \text{ ja } a_{10} = 46 \\ 121 &= 46 + 15d \\ 15d &= 75 \quad \big| :15 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + 9d \quad \big| \; a_{10} = 46 \text{ ja } d = 5 \\ 46 &= a_1 + 9\cdot 5 \\ a_1 &= 46 - 45 = 1 \end{aligned}$$

Yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)\cdot 5 = 1 + 5n - 5 = 5n - 4$

Vast. Yleinen jäsen $a_n = 5n - 4$.

9.11. Aritmeettinen summa

Summaa $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ kutsutaan aritmeettiseksi summaksi, jos $d = a_n - a_{n-1} = \text{vakio}$.

Tällöin summa $S_n = n\dfrac{a_1 + a_n}{2}$

Esim. 9.17. **a)** Laske summa $5 + 11 + 17 + ... + 107$.
b) Montako ko. lukujonon jäsentä on laskettava, jotta summa ylittäisi 10 000?

Ratkaisu: **a)** Muodostetaan ensin yleinen jäsen a_n, jonka avulla ratkaistaan yhteenlaskettavien määrä.

Koska $d = a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6$ ja $d = a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$, niin kyseessä on aritmeettinen summa.

Yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)\cdot 6 = 6n - 1$

Yhteenlaskettavien lukumäärä

$$
\begin{aligned}
6n - 1 &= 107 \\
6n &= 108 \qquad |:6 \\
n &= 18
\end{aligned}
$$

Summa $S_{18} = 18 \cdot \dfrac{5 + 107}{2} = 18 \cdot \dfrac{112}{2} = 18 \cdot 66 = 1188$

b)

$$
\begin{aligned}
S_n &= n\frac{a_1 + a_n}{2} \qquad | \, a_1 = 5 \text{ ja } a_n = 6n - 1 \\
&= \frac{n}{1} \cdot \frac{5 + 6n - 1}{2} \\
&= \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n
\end{aligned}
$$

Saadaan epäyhtälö

$$
\begin{aligned}
3n^2 - 2n &> 10000 \\
3n^2 - 2n - 10000 &> 0 \\
3n^2 - 2n - 10000 &= 0 \\
n = -57{,}40... \text{ tai } n &= 58{,}06...
\end{aligned}
$$

Koska $n \in \mathbb{Z}_+$, niin $n \geq 59$.

Vast. **a)** Summa on 1188. **b)** Pitää laskea vähintään 59 ensimmäistä jäsentä yhteen.

9.12. Geometrinen lukujono

Peräkkäisen jäsenten a_n ja a_{n-1} osamäärä q pysyy vakiona eli $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \text{vakio}$.

esim. lukujono $2, 6, 18, 54, \ldots$ on geometrinen lukujono, jossa $a_1 = 2$ ja $q = 3$.

Yleinen jäsen $a_n = a_1 q^{n-1}$

Esim. 9.18. Muodosta lukujonon $\dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{10}, 1, 10\ldots$ **a)** yleinen jäsen **b)** 10. jäsen. **c)** Onko luku 1000 lukujonon jäsen?

Ratkaisu: **a)** Koska $q = \dfrac{a_4}{a_3} = \dfrac{10}{1} = 10$ ja $q = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{1}{\frac{1}{10}} = 10$, niin lukujono on geometrinen.

Yleinen jäsen $a_n = a_1 q^{n-1} = \dfrac{1}{100} \cdot 10^{n-1} = \dfrac{1}{10^2} \cdot 10^{n-1} = 10^{-2} \cdot 10^{n-1} = 10^{-2+n-1} = 10^{n-3}$

b) Kymmenes jäsen $a_{10} = 10^{10-3} = 10^7 = 10\,000\,000$

c) Luku 1 000 on lukujonon jäsen, jos yhtälön $10^{n-3} = 1000$ ratkaisu on positiivinen kokonaisluku.

$$
\begin{aligned}
10^{n-3} &= 1000 \\
10^{n-3} &= 10^3 \\
n - 3 &= 3 \\
n &= 6
\end{aligned}
$$

Luku 1000 on lukujonon kuudes jäsen.

Vast. **a)** $a_n = 10^{n-3}$ **b)** $10^7 = 10\,000\,000$ **c)** On, kuudes jäsen.

9.13. Geometrinen summa

Summaa $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ kutsutaan geometriseksi summaksi, jos $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \text{vakio}$.

Tällöin summa $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q^n}$

Esim. 9.19. Lääkettä piti ottaa ensimmäisenä päivänä 67,5 ml, toisena päivänä 45 ml, kolmantena päivänä 30 ml jne. Kuinka monta millilitraa lääkettä piti ottaa yhteensä kymmenen päivän kuurin aikana?

Ratkaisu: Päivittäisistä lääkeannoksista muodostuu summa $67,7 + 45 + 30 + ...$

Summa on geometrinen, koska $q = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{30}{45} = \dfrac{2}{3}$ ja $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{45}{67,5} = \dfrac{2}{3}$.

Lääkettä pitää ottaa yhteensä $S_{10} = \dfrac{67,5 \cdot \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}\right)}{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}} = 198,9883402 \approx 199$

Vast. Lääkettä piti ottaa yhteensä 199 ml.

Tehtävissä 9.1 – 9.8 ei saa käyttää laskinta.

9.1. Laske tarkka arvo

a) $\cos 450^{\circ}$ $\cos 450^{\circ}$ **b)** $\sin(-585^{\circ})$

c) $\tan\frac{13\pi}{3}$ **d)** $\cos\frac{20\pi}{3}$

9.2. Derivoi funktiot

a) $f(x) = \cos 4x$ **b)** $f(x) = 14\sin 7x$

c) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ **d)** $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

e) $f(x) = e^{3x+1}\cos 8x$ **f)** $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$

9.3. Ratkaise yhtälöt

a) $\sin(x+60^{\circ}) + \cos(2x-240^{\circ}) = 0$

b) $2\cos^2 x = 2 - 3\cos x$ (ratkaise radiaaneissa)

c) $\tan(x+45^{\circ}) + \tan(2x-90^{\circ}) = 0$

9.4. Sievennä

a) $2\sin(2x+\pi) - 2\sin x\cos x$

b) $4\cos(x-\pi) + 2\sin(x+\frac{3\pi}{2}) - \dfrac{\tan x \cdot \cos^2 x}{\sin x}$

9.5. Kirjoita lukujonon

a) $a_1 = 3,\ a_n = 2a_{n-1} + 10;\ n \geq 2$

b) $a_n = \dfrac{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(-1)^{n-1}\cdot(n+3)}{2^{n+1}\cdot\frac{1}{4}}$

viisi ensimmäistä jäsentä.

9.6. Mikä on aritmeettisen lukujonon (b_n)= 2, 6, 10, …

a) yleinen jäsen?

b) 1000. jäsen?

c) Määritä summa, kun lukujonon 100 ensimmäistä jäsentä lasketaan yhteen?

9.7. Laske lausekkeiden $\sin 2x$ ja $\sin 3x$ tarkka arvo, kun $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

9.8. Olkoon annettuna trigonometrian kaavat

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ja $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Osoita pelkästään näiden perusteella oikeiksi seuraavat kaavat:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

Ilmoita, mitä kaavaa olet missäkin laskun vaiheessa käyttänyt. (S04/8)

Tehtävissä 9.9 – 9.15 saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa. (Katso kaikki ratkaisut)

9.9. a) Osoita, että yhtälöllä $5\tan x-3=10x$ on välillä $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ täsmälleen yksi juuri. Määritä tämän juuren arvo yhden desimaalin tarkkuudella. (S98/8a)
(tiedosto, video)

b) Ratkaise yhtälö $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin 2x$. Välivaiheet näkyviin.
(tiedosto, video)

9.10. Geometrisen lukujonon kolmas jäsen on 18 ja kahdeksas jäsen on 4374. Mikä on lukujonon **a)** yleinen termi **b)** 10. jäsen?
c) Laske summa, kun 15 ensimmäistä jonon jäsentä lasketaan yhteen. Välivaiheet näkyviin.
(tiedosto, video)

9.11. Olkoon lukujono
$a_n=\frac{1}{4}n^4-3n^3+3n^2+56n-\frac{1}{4}, n=1,2,3,\ldots$
a) Milloin lukujono on aidosti kasvava ja milloin aidosti vähenevä?
b) Mikä on lukujonon suurin ja pienin arvo?
(tiedosto, video)

9.12. Kuinka monta jonon 3, 12, 48, 192, ... alkupään jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa ylittäisi 2 900 000?
(tiedosto, video)

9.13. Määritä funktion $f(x)=\cos^2 x+\sin x$ suurin ja pienin arvo. (S06/6).
(tiedosto, video)

9.14. On käytössä 5000 identtisen kokoista palloa, joista tehdään pyramidi niin, että ylimpään kerrokseen tulee 1 pallo, toiseksi ylimpään tulee 4 palloa, kolmanneksi ylimpään tulee 9 palloa jne… Kuinka monta kerrosta pallopyramidissa kaikkiaan on? Kuinka monta palloa on alimmassa kerroksessa? Montako palloa jää yli?
(tiedosto, video)

9.15. Kolmion kulmille α,β ja γ pätee $\sin\alpha\sin\beta=\cos\gamma$. Osoita, että kolmio on suorakulmainen. (K03/6)
(tiedosto, video)

M10 Integraalilaskenta

Olkoon funktio $f(x)$ määritelty tietyllä välillä. Jos on olemassa sellainen funktio $F(x)$, että välin kaikissa pisteissä $F'(x) = f(x)$, niin funktiota $F(x)$ sanotaan $f(x)$:n integraalifunktioksi. Tällöin

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ jossa } F'(x) = f(x)$$

10.1. Integroimiskaavoja

Laskukaava	Esimerkki
$\int 0dx = C$	
$\int kdx = kx + C$	$\int 3dx = 3x + C$ ja $\int (-7)dx = -7x + C$
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx = 5\cdot\frac{1}{4}x^4 + C = \frac{5}{4}x^4 + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{4}{x}dx = 4\int \frac{1}{x}dx = 4\ln\lvert x\rvert + C$
$\int f' f^n dx = \frac{1}{n+1}f^{n+1} + C$	$\int 7x^3(x^4+2)^{-6}dx = 7\cdot\frac{1}{4}\int \underbrace{4x^3}_{f'}(\underbrace{x^4+2}_{f})^{-6}dx = -\frac{1}{4}(x^4+2)^{-7} + C$
$\int \frac{f'}{f}dx = \ln\lvert f\rvert + C$	$\int \frac{3x}{x^2-1}dx = 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{3}{2}\ln\lvert x^2-1\rvert + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(3x)dx = \frac{1}{3}\int 3\sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(5x)dx = 5\int 5\cos(5x)dx = 5\sin(5x) + C$
$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int f' e^f dx = e^f + C$	$\int 2x^2 e^{x^3+1}dx = 2\cdot\frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3+1}dx = \frac{2}{3}e^{x^3+1} + C$

Esim. 10.1. **a)** $\int\left(4x^6 - 3x + 6\right)dx = 4\cdot\frac{1}{7}x^7 - 3\cdot\frac{1}{2}x^2 + 6x + C = \frac{4}{7}x^7 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + C$

b) $\int\left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{x^4}\right)dx = \int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + 2x^{-4}\right)dx = \frac{1}{3}\ln\lvert x\rvert + 2\cdot\frac{1}{-3}\cdot x^{-3} + C = \frac{1}{3}\ln\lvert x\rvert - \frac{2}{3x^3}\cdot + C$

c) $\int 2x^{-4}dx = 2\cdot\frac{1}{-3}x^{-3} + C = -\frac{2}{3}x^{-3} + C$

d) $\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\, x^{\frac{3}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{5}x\,\sqrt[3]{x^2} + C$

Esim. 10.2. Ratkaise yhtälö $g'(x)-2x^3=F(x)$, kun funktio $f(x)=3x^2+12x+31$ ja $g(x)=x^4-15x^2+200x$. Lisäksi tiedämme, että $F(0)=-10$.

Ratkaisu: Muodostetaan integraalifunktio $F(x)$

$$F(x)=x^3+6x^2+31x+C$$

Koska $F(0)=-10$, niin $C=-10$ ja näin ollen $F(x)=x^3+6x^2+31x-10$

Derivoidaan funktio $g(x)=x^4-15x^2+200x$

$$g'(x)=4x^3-30x+200$$

Täten saadaan yhtälö $g'(x)-2x^3=F(x)$

$$4x^3-30x+200-2x^3=x^3+6x^2+31x-10, \text{ josta}$$
$$x=-7, x=3 \text{ tai } x=10$$

Vast. $x=-7, x=3$ tai $x=10$

Esim. 10.3. Muodosta funktion $f(x)=20x^4-6x-6$ se integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(1,-3)$ kautta.

Ratkaisu: Muodostetaan integraalifunktio $F(x)$

$$F(x)=20\cdot\frac{1}{5}x^5-6\cdot\frac{1}{2}x^2-6x+C=4x^5-3x^2-6x+C$$

Funktio $F(x)$ kulkee pisteen $(1,-3)$ kautta, kun $F(1)=-3$. Tällöin saadaan

$$4\cdot1^5-3\cdot1^2-6\cdot1+C=-3$$
$$C=2$$

Vast. $F(x)=4x^5-3x^2-6x+2$

10.2. Murtofunktion integrointi

Murtofunktion lauseketta pitää yleensä ensin muokata ennen integrointia käyttämällä seuraavia ”konsteja”.

1. yhteisen tekijän erottamista

$$\int \frac{3x^3-6x^2}{x-2}\,dx = \int \frac{3x^2\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}\,dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

2. binomikaavoja käänteisesti

$$\int \frac{x^2-4x+4}{x-2}dx = \int \frac{(x-2)\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}\,dx = \int (x-2)dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

$$\int \frac{100x^2-1}{10x+1}\,dx = \int \frac{(10x+1)(10x-1)}{10x+1}\,dx = \int (10x-1)dx = 5x^2 - x + C$$

3. termien ryhmittelemistä

$$\int \frac{8x^3+6x^2-8x-6}{2x^2-2}\,dx = \int \frac{(4x+3)\,\cancel{(2x^2-2)}}{\cancel{2x^2-2}}dx = \int (4x+3)\,dx = 2x^2+3x+C$$

4. polynomien jaollisuutta

$$\int \frac{3x^2+3x-6}{x+2}\,dx = \int \frac{3(x+2)(x-1)}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{3\,\cancel{(x+2)}\,(x-1)}{\cancel{x+2}}\,dx = \int 3(x-1)dx$$

$$= \int (3x-3)dx = \frac{3}{2}x^2 - 3x + C$$

$$3x^2+3x-6=0 \quad \Big|:3$$

$$x^2+x-2=0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2}$$

$x=-2$ (jaollinen binomilla $x+2$)

$x=1$ (jaollinen binomilla $x-1$)

5. termien lisääminen

$$\int \frac{x-1}{x+7}\,dx = \int \frac{x+7-8}{x+7}dx = \int \left(\frac{x+7}{x+7} - \frac{8}{x+7}\right) dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{8}{x+7}\right)dx = x - 8\ln|x+7| + C$$

10.3. Pinta-alan laskeminen

Alasumma

Ei negatiivisen jatkuvan funktion $f(x)$ pinta-alan alarajaa voidaan arvioida jakamalla väli *n*:ään yhtä pitkään osaväliin Δx ja laskeamalla summa $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, jossa x_i on se *x*:n arvo, jossa funktio saa pienimmän arvonsa ko. välissä.

Yläsumma

Ei negatiivisen jatkuvan funktion $f(x)$ pinta-alan ylärajaa voidaan arvioida jakamalla väli *n*:ään yhtä pitkään osaväliin Δx ja laskemalla summa $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, jossa x_i on se *x*:n arvo, jossa funktio saa suurimman arvonsa ko. välissä.

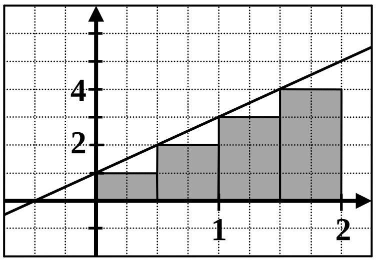
Välisumma

Ei negatiivisen jatkuvan funktion $f(x)$ pinta-alaa voidaan arvioida jakamalla väli *n*:ään yhtä pitkään osaväliin Δx ja laskemalla summa $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, jossa x_i on ko. välin yksi *x*:n arvo.

Esim. 10.4 Arvioi jatkuvan funktion $f(x)=2x+1$ kuvaajan, x-akselin sekä suorien $x=0$ ja $x=2$ rajaaman alueen pinta-alaa jakamalla väli neljään osaan ja laskemalla **a)** alasumma **b)** yläsumma **c)** välisumma, kun laskentakohtana pidetään jokaisen osavälin keskikohtaa.

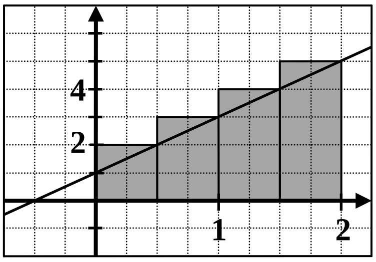
Ratkaisu: Välin leveys $\Delta x=\dfrac{x_{\max}-x_{\min}}{n}=\dfrac{2-0}{4}=\dfrac{1}{2}$

a) Funktio on nouseva suora ja siksi laskentakohtana on kunkin välin vasen päätepiste.



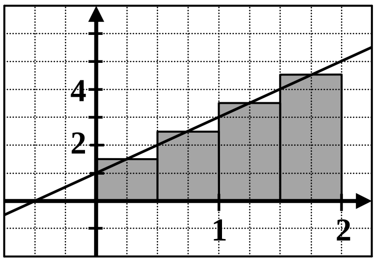
$$s_4=f(0)\cdot\frac{1}{2}+f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+f(1)\cdot\frac{1}{2}+f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=5$$

b) Funktio on nouseva suora ja siksi laskentakohtana on kunkin välin oikea päätepiste.



$$S_4=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+f(1)\cdot\frac{1}{2}+f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+f(2)\cdot\frac{1}{2}=7$$

c) Välisumma



$$S=f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}+f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}+f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}+f\left(\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=6$$

Analyysin peruslause

Olkoon jatkuvan funktion $f(x)$ eräs integraalifunktio $F(x)$, niin tällöin

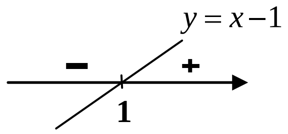
$$\int_a^b f(x)dx=\Big/_a^b F(x)=F(b)-f(a)$$

Määrätyn integraalin ominaisuuksia

- $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (vakion k siirtosääntö)
- $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ $a < c < b$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Esim. 10.5. Laske $\int_{-2}^{2} |x-1|\,dx$.

Ratkaisu: Poistetaan ensin itseisarvomerkit. Itseisarvomerkit voi jättää pois suoraan, kun itseisarvomerkin sisällä olevan lausekkeen arvo on ei-negatiivinen. Jos itseisarvomerkin sisällä olevan lausekkeen arvo on negatiivinen, niin kirjoitetaan vastalauseke.



Lausekkeen $x-1$ arvo on nolla, kun $x=1$. Koska kyseessä on nouseva suora, niin $x-1 \geq 0$, kun $x \geq 1$.

Näin ollen $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$

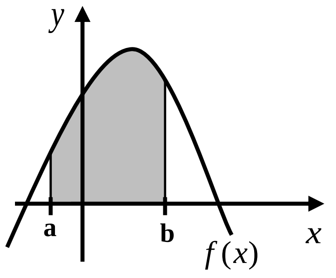
$$\int_{-2}^{2} |x-1|\,dx = \int_{-2}^{1} (-x+1)\,dx + \int_{1}^{2} (x-1)\,dx = \Big/_{-2}^{1} (-\frac{1}{2}x^2 + x) + \Big/_{1}^{2} (\frac{1}{2}x^2 - x)$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}\cdot(1)^2 + 1\right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + (-2)\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{2}\cdot(2)^2 - 2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot(1)^2 - 1\right)\right] = 5$$

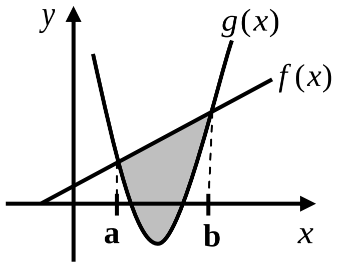
Vast. $\int_{-2}^{2} |x-1|\,dx = 5$.

Pinta-alan laskeminen määrätyn integraalin avulla

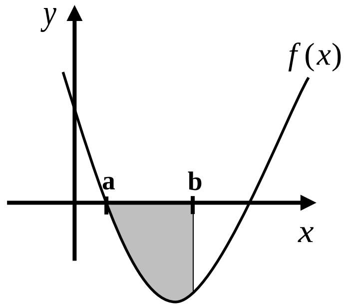
Funktion $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaaman alueen pinta-ala tai funktioiden $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ rajaaman äärellisen alueen pinta-ala.



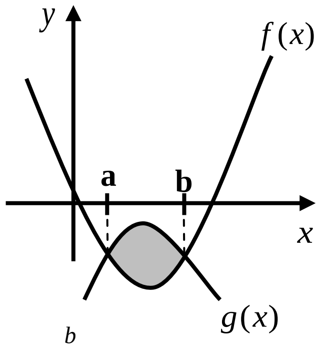
$$A = \int_a^b f(x)dx$$



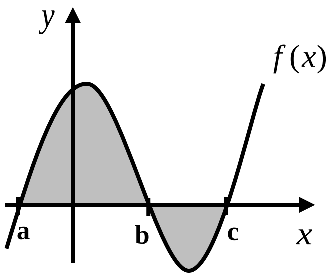
$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$



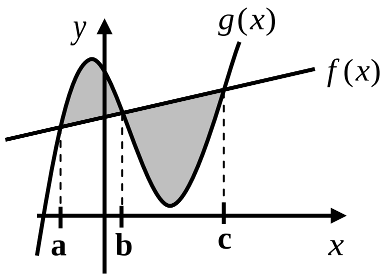
$$A = -\int_a^b f(x)dx$$



$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x) \right) dx$$



$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$



$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x) \right) dx + \int_b^c \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

Esim. 10.6. Laske suljettu pinta ala, jonka $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$ rajaavat väliltä $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ratkaisu: Ratkaistaan ensin funktioiden leikkauspisteet yhtälöstä $\sin x = \cos x$

$\sin x = \cos x$ | maol s. 37 kaava 16 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, josta saadaan $x = \frac{\pi}{2} - x + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{2} - x + n \cdot 2\pi$ | siirretään x $\qquad$ $x = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + n \cdot 2\pi$

$2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ $\quad \| :2$ $\qquad$ $\cancel{x} = \pi - \frac{\pi}{2} + \cancel{x} + n \cdot 2\pi$

(ei ratkaisua)

$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$ $\qquad$ Tutkitaan funktioiden leikkauskohdat eri n:n arvoilla

jos $n = -1$, niin $x = \frac{\pi}{4} + (-1) \cdot \pi = \frac{\pi}{4} -^{4)} \pi = \frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{4} = \frac{\pi - 4\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \notin [0, \frac{3\pi}{2}]$

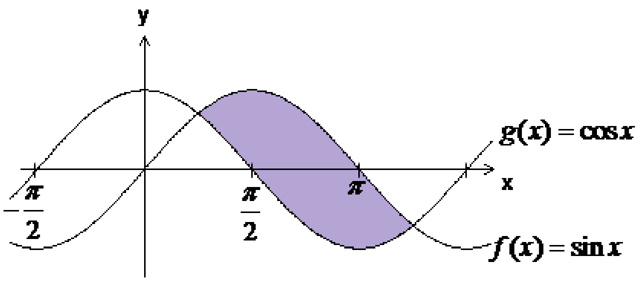
jos $n = 0$, niin $x = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

jos $n = 1$, niin $x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} +^{4)} \pi = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{\pi + 4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

jos $n = 2$, niin $x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} +^{4)} 2\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 8\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \notin [0, \frac{3\pi}{2}]$

Annetulla välillä $[0, \frac{3\pi}{2}]$ funktioiden leikkauspisteet ovat $\frac{\pi}{4}$ ja $\frac{5\pi}{4}$.

Viereisestä kuvasta nähdään, että funktio $f(x) = \sin x$ on ylempänä.

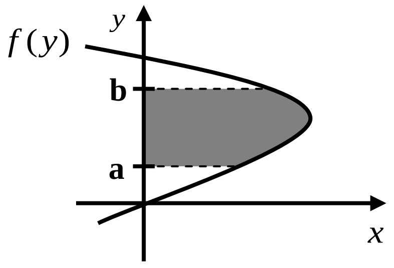


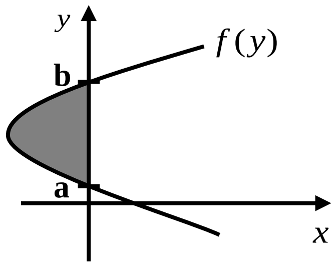
$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx = \Big/_{\pi/4}^{5\pi/4} (-\cos x - \sin x)$$

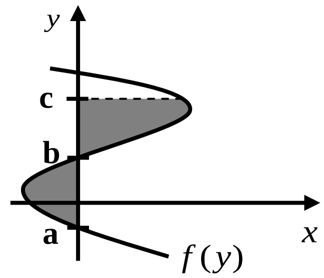
$$= (-\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4}) - (-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}) = (\frac{2}{\sqrt{2}}) - (-\frac{2}{\sqrt{2}}) =^{\sqrt{2})} \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Vast. $A = 2\sqrt{2}$

Funktion $x = f(y)$, y-akselin ja suorien $y = a$ ja $y = b$ rajaaman alueen pinta-ala tai funktioiden $x = f(y)$ ja $x = g(y)$ rajaaman äärellisen alueen pinta-ala.





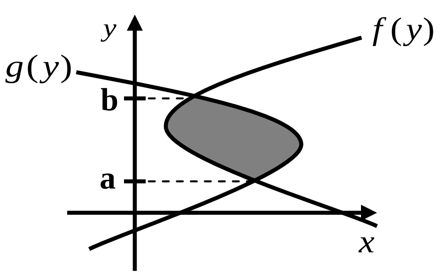


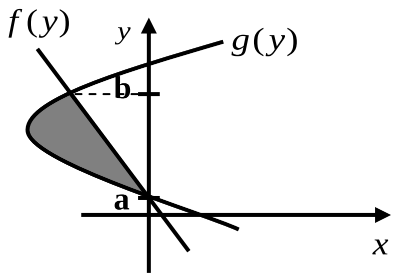
$$A = \int_a^b f(y)\,dy$$

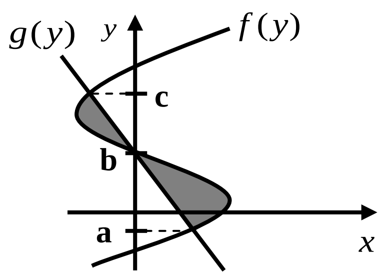
$$A = -\int_a^b f(y)\,dy$$

$$A = -\int_a^b f(y)\,dy + \int_b^c f(y)\,dy$$

$$A = \int_a^b (f(y) - g(y))\,dy + \int_b^c (f(y) - g(y))\,dy$$





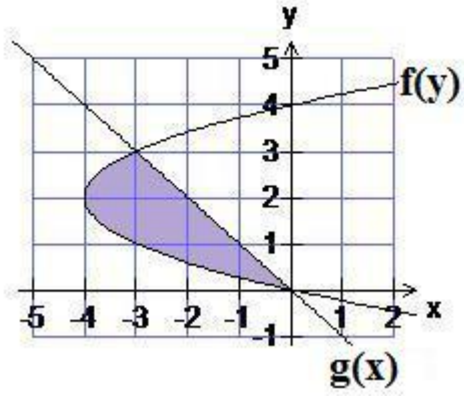


$$A = \int_a^b (g(y) - f(y))\,dy$$

$$A = \int_a^b (f(y) - g(y))\,dy$$

Esim. 10.7. Laske funktioiden $x = f(y) = y^2 - 4y$ ja $y = g(x) = -x$ rajaama alue.

Ratkaisu: Hahmotellaan funktioiden kuvaajat.



Kuvaajasta huomataan, että integrointi kannattaa tehdä y:n suhteen.

Ilmoitetaan funktio $y = g(x) = -x$ x:n suhteen, jolloin saadaan $x = g(y) = -y$

Ratkaistaan seuraavaksi funktioiden leikkauspisteiden y-koordinaatit yhtälöstä $y^2 - 4y = -y$, josta saadaan yhtälö $y^2 - 3y = 0$.

$$y^2 - 3y = 0$$

$y(y-3) = 0$. Ratkaisuna ovat $y = 0$ tai $y = 3$.

$$y = 0 \text{ tai } y = 3$$

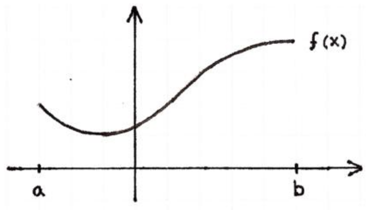
$$A = \int_0^3 (g(y) - f(y))\,dy = \int_0^3 (-y - (y^2 - 4y))\,dy = \int_0^3 (-y^2 + 3y)\,dy$$

$$= \Big/_0^3 \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2\right) = \left[-\frac{1}{3}\cdot 3^3 + \frac{3}{2}\cdot 3^2\right] - \left[-\frac{1}{3}\cdot 0^3 + \frac{3}{2}\cdot 0^2\right] = \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

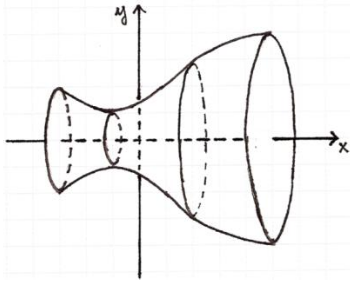
Vast. Funktioiden $x = f(y) = y^2 - 4y$ ja $y = g(x) = -x$ rajaama alue on $4\frac{1}{2}$ pay.

10.4. Tilavuuden laskeminen

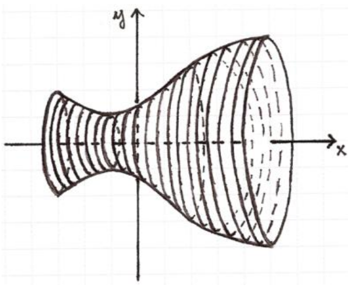
Olkoon funktio $y = f(x)$ jatkuva välillä$[a, b]$.



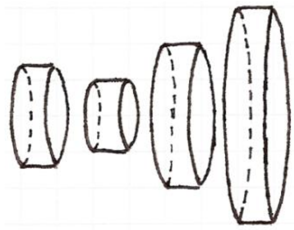
Kun funktion $y = f(x)$ kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri, niin syntyy pyörähdyskappale.



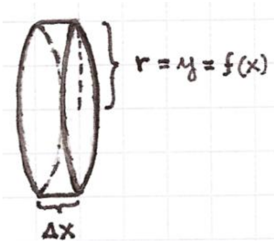
Leikataan syntynyt pyörähdyskappale x-akselia vastaan kohtisuorasti (kuva 3).



Tällöin syntyy ohuita ympyrälieriön muotoisia viipaleita



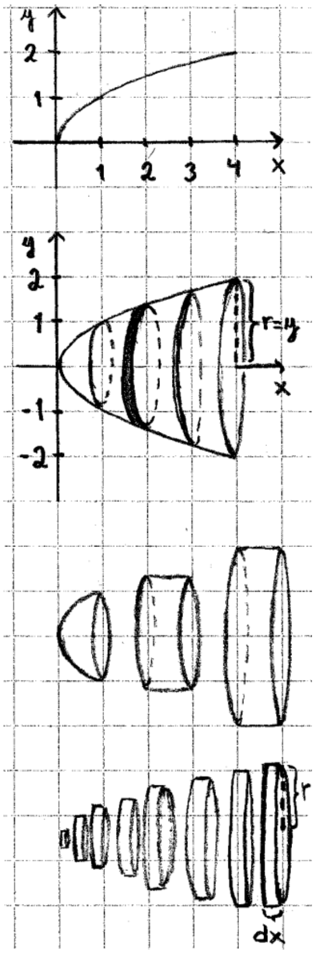
Yhden viipaleen paksuus (ympyrälieriön korkeus) on Δx ja ympyrämuotoisen pohjan pinta-ala $A(x) = \pi\, r^2$, jossa $r = y = f(x)$



Ajatellaan, että pyörähdyskappale on leikattu äärettömän moneen viipaleeseen, jolloin yhden viipaleen paksuutta voidaan merkitä dx:llä. Syntyneen kappaleen tilavuus saadaan näiden tilavuusalkioiden $dV = A(x)dx$ äärettömänä summana eli määrättynä integraalina.

Suljetulla välillä [a, b] jatkuvan funktion $y = f(x)$ pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus V saadaan

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi\, r^2 dx = \int_a^b \pi\, y^2 dx = \int_a^b \pi\, f(x)^2 dx$$



Esim. 10.8. Funktio $f(x) = \sqrt{x}$; $x \in [0,4]$ kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

Ratkaisu: Koska kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri,niin syntyneen kappaleen "siivuttamisessa" syntyy äärettömän ohuita viipaleita (suoria ympyräpohjaisia lieriöitä), joiden tilavuus saadaan laskemalla **pohjan ala · korkeus**.

Kunkin viipaleen ympyrämuotoisen **pohjan pinta-ala** $A(x) = \pi\, r^2$, jossa $r = y = f(x)$

Yhden viipaleen korkeus on sama kuin sen paksuus eli Δx. Koska syntynyt kappale siivutettiin äärettömään moneen siivuun, niin yhden siivun korkeus (paksuus) on äärettömän pieni dx.

Kun summataan yhteen kaikki äärettömän ohuet viipaleet (tilavuusalkiot dV) 0:sta 4:ään, niin saadaan laskettua syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\mathrm{V} = \int_0^4 dV = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 \pi\, r^2 dx \;\; = \int_0^4 \pi\, y^2 dx = \int_0^4 \pi\, f(x)^2 dx$$

$$= \int_0^4 \pi\,(\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \,/\, \frac{1}{2}x^2 = \pi[(\frac{1}{2}\cdot 4^2) - (\frac{1}{2}\cdot 0^2)] = 8\pi$$

Vast. Tilavuus on 8π

Suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuvan funktion $x = f(y)$ pyörähtäessä *y*-akselin ympäri syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus *V* saadaan

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(y)\,dy = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_a^b \pi\, f(y)^2 dy$$

Esim. 10.9. Funktion $f(x) = x^2 + 2x, x \in [0,2]$ kuvaaja pyörähtää y -akselin ympäri. Laske näin syntyneen kappaleen tilavuus.

Ratkaisu: Lasketaan funktion saama arvo eli y:n arvo kohdassa $x = 2$ on $f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$.

Koska funktio pyörähtää *y*-akselin ympäri, niin ratkaistaan *x* lausekkeesta $y = x^2 + 2x$

$$y = x^2 + 2x$$

$$y + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$y + 1 = (x+1)^2$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{y+1}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{y+1}$$

$$x = -1 + \sqrt{y+1} \qquad \text{Koska } x \in [0,2]$$

$$f(y) = -1 + \sqrt{y+1}$$

Tällöin tilavuus *V*

$$V = \int_0^8 \pi\big(f(y)\big)^2 dy = \int_0^8 \pi\left(-1 + \sqrt{y+1}\right)^2 dy = \frac{40\pi}{3}$$

Vast. Kappaleen tilavuus $V = \dfrac{40\pi}{3}$

Tehtävissä 10.1 – 10.5 ei saa käyttää laskinta.

10.1. Määritä

a) $\int 3x^4 dx$ **b)** $\int \cos 5x dx$

c) $\int \frac{5x}{x^2+3} dx$ **d)** $\int \frac{5x^2}{(2x^3+5)^4} dx$

e) $\int x\sqrt[3]{x^2} dx$ **f)** $\int (2x+1)e^{2x-3} dx$

10.2. Laske **a)** $\int_0^2 (\frac{3}{4}x^2 - x)dx$ **b)** $\int_{-1}^2 \left|-x^2+x\right| dx$

10.3. Laske millä x:n arvoilla

a) $\int_{-3}^{x} (2t+5)dt \geq 2, x > -3$

b) $\int_0^x (24t^2+12t-8)dt = 6$

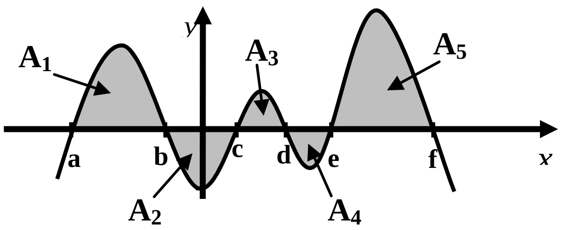
10.4. Muodosta funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 1, & x \leq 1 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}, & x > 1 \end{cases}$$ integraalifunktio.

10.5. Vastaa alla oleviin kysymyksiin **a – f** funktion $y = f(x)$ kuvaajan avulla, kun tiedämme, että

$A_2 = 70$ ja $A_3 = 50$ sekä $\int_a^c f(x)dx = 30$,

$\int_c^f f(x)dx = 70$ ja $\int_e^c f(x)dx = -20$



a) $\int_c^d f(x)dx$

b) $\int_b^d f(x)dx$

c) $\int_c^b f(x)dx$

d) $\int_e^e f(x)dx$

e) $\int_c^e f(x)dx$

f) Laske pinta-alat A_1, A_4 ja A_5

Tehtävissä 10.6 – 10.15 saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa. (Katso kaikki ratkaisut)

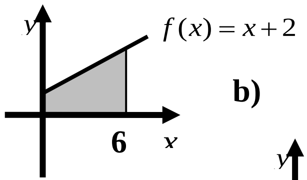
10.6. a) Laske funktion $f(x)=x^2-4x$ ja $x-$ akselin rajaaman alueen pinta-ala.
(tiedosto, video)

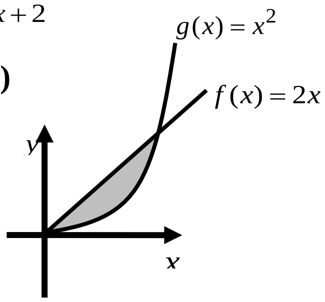
b) Laske funktioiden $f(x)=x^3-2x+1$ ja $g(x)=2x+1$ rajaaman äärellisen alueen pinta-ala. (tiedosto, video)

10.7. Oikealle aukeavan paraabelin huippu on pisteessä $(-4,2)$ ja se kulkee pisteen $(0,4)$ kautta. Ylöspäin aukeava paraabeli kulkee pisteiden $(-4,5),(4,3)$ ja $(8,14)$ kautta. Nämä paraabelit rajaavat kaksi äärellistä aluetta. Laske näistä alueista suuremman pinta-ala.
(tiedosto, video)

10.8. Laske määrätyn integraalin avulla kolmion ABC tarkka pinta-ala, kun $A=(-1,0)$, $B=(3,5)$ ja $C=(4,1)$
(tiedosto, video)

10.9. Laske määrättyä integraalia käyttäen syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus, kun alla oleva alue pyörähtää
a) $x-$ akselin ympäri (kuva a)
b) $y-$ akselin ympäri (kuva b)

a)


b)


a) (tiedosto, video)
b) (tiedosto, video)

10.10. Olkoon $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+5$.

Muodosta väliin $[-2,2]$ liittyvä
a) alasumma
b) yläsumma, kun väli on jaettu kahdeksaan yhtä leveään osaan.
c) Kumpi edellä asketuista arvoista antaa paremman arvion pinta-alasta?
(tiedosto, video)

10.11. Laske funktioiden $f(x)=\sin(2x)$ ja $g(x)=\cos(x+\pi)$ rajaaman äärellisen alueen tarkka pinta-ala välillä $[0,2\pi]$.
(tiedosto, video)

10.12. Käyrä $y=|\sin 2x|$ ja suora $y=1$ rajoittavat tasoalueen, kun $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$.
Määritä sen pinta-alan likiarvo.
(tiedosto, video)

10.13. Funktiosta $f(x)$ tiedetään, että $f''(x)=x^2-2$ ja käyrälle $y=f(x)$ pisteeseen $(1,1)$ piirretyn tangentin yhtälö on $y=-x+2$. Määritä $f(x)$.
(tiedosto, video)

10.14. Käyrän $y^2=x(x+1)(x-1)(2-x)$ pyörähtäessä $x-$ akselin ympäri syntyy kaksi äärellistä kappaletta. Kumpi niistä on suurempi? (K96/7a)
(tiedosto, video)

10.15. Välillä $[-1,1]$ jatkuvien funktioiden f ja g skalaaritulo $f*g$ määritellään kaavalla

$$f*g=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Funktiot ovat ortogonaaliset, jos $f*g=0$.

a) Määritellään
$f_0(x)=1,\ f_1(x)=x$ ja $f_2(x)=x^2$, kun
$x\in[-1,1]$. Niiden avulla määritellään funktiot
$g_k:[-1,1]\to\mathbb{R},\ k=0,1,2$, käyttämällä
kaavoja
$g_0 = f_0(x),\ g_1(x) = f_1(x)-\dfrac{g_0 * f_1}{g_0 * g_0}g_0(x)$ ja
$g_2 = f_2(x)-\dfrac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0}g_0(x)-\dfrac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1}g_1(x)$.
Sievennä funktioiden g_1 ja g_2 lausekkeet. **(4p)**

b) Osoita, että funktiot g_j ja g_k ovat
ortogonaaliset kaikilla eri indekseillä
$0\le j<k\le 2$. (2p)

c) Olkoon $h(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Määritä
vakioille a,b ja c sellaiset arvot, että funktiot
h ja g_k ovat ortogonaaliset jokaisella
$k=0,1,2$ (3p) (K14/15)
(tiedosto, video)

Vastaukset

M1 Funktiot ja yhtälöt

1.1.a) $\frac{5}{2}$ **b)** 3 **c)** $\frac{5}{2}$

d) $\frac{1}{10}$ **e)** 32 **f)** $\frac{\sqrt{2}}{6}$

1.2.a) a^2 **b)** $-a$ **c)** $25x^6y^{-2}$

d) 81 **e)** -1 **f)** 62500

1.3.a) 6 **b)** $40\sqrt{5}$ **c)** $-2\sqrt{2}$

d) 2 **e)** $\sqrt{3}$ **f)** $\sqrt{2}$

1.4. a) $\pi-3$ **b)** $10+3\sqrt{2}$ **c)** $\frac{3}{2}\frac{|a|}{|b|}$

d) $a^2|a|$ **e)** $x\sqrt[8]{x}$ **f)** x^5

1.5. a) 1,55 € **b)** 25% **c)** 38,5€

1.6. a) On **b)** $\sqrt[5]{9}$, $\sqrt{3}$ ja $\sqrt[3]{27}$ **c)** $\frac{17}{4}$

1.7. a) Kaikki x:n arvot toteuttavat yhtälön.
b) Ei ratkaisua.
c) Possuja on 150.

1.8.a) $[-3,4]$
b) $]-2,5]$
c) 0
d) $x=-1, x=2, x=4$
e) $x\approx 0,3;\ x\approx 1,4;\ x=3$
f) Ei ole määritelty.

1.9. Ei riitä.

1.10. a) Laski 16% **b)** Pitää lisätä $\frac{8}{7}$ osaa 20-prosenttisen liuoksen määrästä.

1.11. Putoaminen kestää n. 6,0 sekuntia.

1.12. Kuukausipalkka on 2100 €.

1.13. Lyhenee 6,7%.

1.14. Poikkeaa 1%.

1.15. a) 8,9 g **b)** 0,6 g

M2 Polynomifunktiot

2.1.a) $16x^2-1$ **b)** $2x^2-5x-3$

c) $-3x^7+6x^5$ **d)** x^2-4x+4

e) $3\sqrt{2}-3$ **f)** $-4\sqrt{6}+12$

2.2.a) $x(x+2)(x-2)$
b) $(2x-3)^2$
c) $x(x+2)(x-3)$
d) $(x+2)(x-2)(x+1)$
e) $\frac{2x}{y}(3x-\frac{4z}{y})$
f) $x^3(x+5)^2$

2.3.a) $2x$ **b)** $x-6$

c) $x-3$ **d)** $\frac{2}{x^2-2x}$

e) x **f)** $\sqrt{2}-2$

2.4.a) $x=0$ tai $x=7$
b) $x=\pm1$ tai $x=\pm\sqrt{2}$
c) $x=-1, x=0$ tai $x=2$
d) $x=\pm3$ tai $x=\pm1$

2.5.a) $x\neq 2$
b) $-1<x<0$ tai $x>2$
c) $x<-2$ tai $1<x<2$

2.6. a) $f(-2)=3$ **b)** $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{19}{8}$

c) $x=-2$ tai $x=\frac{1}{2}$

2.7. a) $[-3,\infty[$ **b)** On

c) $a=2$ ja $b=-6$

2.8. a) $\frac{b}{a}$ **b)** **c)** 2

2.9. Tontin ala on 480 m^2.

2.10. Toinen juurista kasvaa kahdella.

2.11. Kun $a=2$ ja $b=16$. Tällöin sievenee muotoon $2x$.

2.12. $a^2+\frac{1}{2}b^2>ab$

2.13. Kun $t=-1$, niin $x=1$.
Kun $t=3$, niin $x=-1$.

2.14. Kun $a\neq 1$, $a\neq 2$.

2.15. Pinta-ala on suurimmillaaan 651 m^2.

M3 Geometria

3.1.a) $\alpha=40^{\text{o}}$

b) $\alpha=10^{\text{o}}$

c) $\alpha=63^{\text{o}}$ ja $\beta=130^{\text{o}}$

d) $\alpha=39^{\text{o}}$ ja $\beta=78^{\text{o}}$

e) $\alpha=252^{\text{o}}$, $\beta=126^{\text{o}}\gamma=36^{\text{o}}$

3.2. a) x=2 **b)** $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $x=\sqrt{2}+1$ **d)** $x\approx 129{,}8°$

e) $x\approx 7{,}2$ **f)** $x\approx 6{,}1$

3.3. a) 3 **b)** $\frac{25}{4}$

3.4. a) 4,3 litraa **b)** 0,2 litraa **c)** $\frac{32000}{3}\pi$ litraa

3.5. Lieriön tilavuus on n. 45,9 cm^3.

3.6. a) 1080$^{\text{o}}$ **b)** 135$^{\text{o}}$ **c)** $2\sqrt{2}-2$

3.7. Kolmas sivu on n. 163m tai n. 207m, jolloin lyhimmän sivun vastainen kulma on 41$^{\text{o}}$ tai 31$^{\text{o}}$ vastaavasti.

3.8. a) n. 203 m **b)** n. 94 m **c)** n. 34,7 km.

3.9. $\frac{a^2}{3}$ pay.

3.10. n. 45,4%.

3.11. Sademäärä oli n. 5 mm.

3.12. n. 122 cm.

3.13. Ks. eActivity-sovelluksessa tiedosto.

3.14. Välimatka pitkin leveyspiiriä on n. 2770 km. Lyhin välimatka on n. 2740 km.

3.15. $\frac{4\sqrt{6}r}{9}+2r$

M4 Analyyttinen geometria

4.1.a) -5 **b)** kulkee **c)** (-5,2)

d) vasen **e)** $kp(-2,4), r=\sqrt{5}$

f) 30$^{\text{o}}$ **g)** 90$^{\text{o}}$ **h)** (3,0)

Vastaukset

4.2.a) 3 **b)** - **c)** -
d) 2 **e)** - **f)** 5

4.3.a) $x=-1 \vee x=\dfrac{5}{2}$ **b)** $-6 \le x \le 2$

c) $x=-1$

4.4.a) $kp(2,-1), r=2$ **b)** $kp(-3{,}5), r=3$

c) $y=(x+6)^2+4,\ huippu(-6,4)$

d) $x=4(y-2)^2-21,\ huippu(-21,2)$

4.5. $(x-2)^2+(y-3)^2=\dfrac{9}{5}$

4.6. $a \le -\sqrt{6}\ tai\ a \ge \sqrt{6}$

4.7. a) $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{2}$ **b)** $y=2x+7$

4.8. a) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ **b)** $\left(\dfrac{19}{7},\dfrac{6}{7}\right)$

4.9. a) Yhtyeessä on 6 jäsentä. **b)** 40 snt.

4.10. 26,6°.

4.11. $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{21}{2}$

4.12. 74,80 m.

4.13. Kaaren pituus on n. 8,70.

4.14. $(x-8)^2+(y-4)^2=4^2$ tai

$(x-3)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

4.15. a) Ks. eActivity-sovelluksessa tiedosto.
b) Ks. eAcitivity-sovelluksessa tiedosto.

M5 Vektorit

5.1.a) $4\bar{i}-3\bar{j}$ **b)** 5

c) $2\bar{i}-\bar{j}-5\bar{k}$ **d)** $8\bar{j}+6\bar{k}$

5.2.a) $-5\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ **b)** esim. $\bar{n}=2\bar{i}-\bar{j}$

c) Ei kulje. **d)** $\bar{n}=5\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$

e) On. **f)** Ovat.

5.3.a) $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ **b)** $t=1 \vee t=\dfrac{1}{2}$ **c)** Ei kulje.

5.4. $2(3\bar{a}+\bar{b})-3(\bar{a}-2\bar{b})$

5.5. $\overline{ED}=-\dfrac{5}{7}\bar{a}-\dfrac{1}{4}\bar{b}$

5.6. $kp(3,-1{,}5), r=2\sqrt{10}$

5.7. a) $\dfrac{19\sqrt{35}}{35}$ **b)** $\dfrac{20\sqrt{13}}{13}$

5.8. $-3\bar{i}+4\bar{j}$

5.9. P jakaa janan AB suhteessa 5:4.

5.10. a) $\dfrac{6\sqrt{42}}{7}$ **b)** Eivät.

5.11. Painopiste on $\left(\dfrac{8}{3},3,3\right)$.

5.12. a) 6 ty. **b)** $3\sqrt{14}$ pay.

5.13. $-\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$ tai $\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$

5.14. Ks. eActivity-sovelluksessa tiedosto.

5.15. Suorat leikkaavat pisteessä $(-1{,}0{,}6)$.

M6 Todennäköisyys ja tilastot

6.1.a) 5, 6 ja 9 **b)** 7 **c)** 5
d) 8 **e)** 6 **f)** 90

6.2.a) $\frac{10}{36} \approx 0{,}28$ **b)** $\frac{1}{15} \approx 0{,}07$ **c)** $\frac{2}{9} \approx 0{,}22$

6.3.a) 6,9 **b)** 7 **c)** 7 **d)** 10

6.4. Keskiarvo on n. 7,40.

6.5. a) n. 0,96 **b)** n. 0,21 **c)** n. 0,07 **d)** n. 0,76

6.6. $\frac{11}{30} \approx 0{,}37$

6.7. $\frac{1}{15} \approx 0{,}067$ ja $\frac{6}{11} \approx 0{,}55$. Tilastojen mukaisesti 0,062 ja 0,56.

6.8.a) n. 0,93 **b)** n. 180 cm **c)** n. 164 cm

6.9.a) n. 0,9997 **b)** n. 0,7752 **c)** n. 0,7648

6.10. Odotusarvo on n. -3,54€, keskihajonta n. 1,66€ ja varianssi n. 2,75€^{2}.

6.11. Keskihajonta on n. 1,13.

6.12.a) n. 0,91 **b)** n. 0,66 **c)** n. 0,65

6.13. Vähintään 7 sipulia.

6.14. a) n. 0,20 ja 0,60 **b)** n. 50,3 grammaa.

6.15. $\frac{7}{16} \approx 0{,}44$

M7 Derivaatta

7.1.a) $6x^2 - 8x + 6$

b) $-4x^{-5} - 6x^{-\frac{1}{4}} - 6x^{-2} + 2$

c) $-\frac{5}{8x^2 - 8x + 2}$

d) $24x^5 - 16x^3 + 2x$

e) $24x^5 - 10x^4 + 16x - 8$

f) $\frac{5}{4}x^4 + x^{-3} - 12x^{-5} - 3$

7.2.a) 1 **b)** 36
c) 0 **d)** Ei ole olemassa.
e) 1 **f)** 3

7.3.a) $x = -1 \vee x = 0$ **b)** $x = -1$

7.4.a) $0 \le x < 1 \vee x \ge 2$ **b)** $x \le -1 \vee 1 < x \le 4$

7.5.a) $x = 0 \vee x = \frac{3}{4}$ **b)** $a \le 2$

7.6.a) $\frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 18}{4x^2 + 12x + 9}$ **b)** $\frac{1}{x+3}$
c) Ei ole olemassa.

7.7. Kuva 1 ja Kuva 4 pitävät paikkansa.

7.8.a) 1 **b)** Ei ole. **c)** 2
d) Ei ole. **e)** On. **f)** On.

7.9.a) $y = -2x + 2$ ja $y = 6x - 22$

b) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

7.10.a) Pienin arvo on -27 ja suurin 125.

b) Funktio vähenee aidosti, kun $x \le \frac{7}{2}$ ja kasvaa aidosti, kun $x \ge \frac{7}{2}$.

7.11.a) $0{,}0^o$.
b) $f(0{,}333333331)$ on suurempi.

7.12. Heittokulma on n. $74{,}5^o$.

7.13.a) Jos $a=1$, yhtälö ei ratkea.
Jos $a=2$, yhtälö on identtisesti tosi, kunhan $x\neq 1$.
Muilla parametrin a arvoilla yhtälön ratkaisu on $x=a$.

b) $a=-\frac{7}{5}$.

7.14. Korkeus on n. 6,9 cm.

7.15. $P(6)=256$.

M8 Juuri- ja logaritmifunktiot

8.1.a) $8(2x-5)(x^2-5x)^7$

b) $2^{3x^2+4x}\cdot(6x+4)\cdot\ln 2$

c) $\frac{59}{15}x^{\frac{44}{15}}=\frac{59}{15}\sqrt[15]{44}$

d) $(10x+5)e^{2x}$

e) $\frac{3}{3x+2}$

f) $3x^{3x}\cdot(\ln x+1)$

8.2. a) $-72x^3+(104x^2+11)\cdot\sqrt{-x^2+4}-129x$

b) $-2\leq x\leq 2$

8.3. a) 9 **b)** $\frac{2}{3}$

c) -2 **d)** 1

e) 2 **f)** $\frac{1}{3}$

8.4.a) $x=-1\vee x=1$ **b)** $x=8$

c) $\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$ **d)** Ei ratkaisua.

e) $x=0\vee x=\ln 3$ **f)** Ei ratkaisua.

8.5.a) $x<-2\vee x>2$ **b)** $x\leq 3$

c) $-13-3\sqrt{7}\leq x\leq -13+3\sqrt{7}$

d) $1<x<\frac{5}{4}$ **e)** $x<0\vee 2\ln 2<x$

8.6.a) $h(x)$ **b)** On. **c)** On.

8.7.a) $f^{-1}(x)=-\frac{5x}{2x-4}, -\frac{4}{3}\leq x<2$

b) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+16}-4, -7\leq x\leq 33$

8.8.a) Suurin arvo on 2 ja pienin arvo on $-\sqrt{5}$.

b) 2.

8.9.a) $2e^{2x-2}+3x^2$ **b)** $y=5x-4$ **c)** $\frac{4\sqrt{26}}{5}$

8.10. $\left(-6,\frac{5}{2}\right)$ on paikallinen maksimipiste ja $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ on absoluuttinen minimipiste.
Suurinta arvoa ei ole.

8.11. Piste C on $\left(-\frac{1}{2},-\ln 2\right)$.

8.12. 10 vuoden jälkeen ainetta on jäljellä n. 123 g ja 60 vuoden jälkeen n. 46 g.

8.13. Ks. vastaus Pääsovelluksessa tiedostosta.

8.14. $(0,2)$.

8.15.a) Lineaarisen mallin mukaan 5 miljardin raja ylittyisi v. 15687 ja eksponentiaalisen mallin mukaan v. 4290.
b) Lineaarisen mallin mukaan vuonna 1987 väkiluku olisi ollut 616 miljoonaa ja eksponentiaalisen mallin mukaan 698 miljoonaa. Virheiden suuruudet ovat n. 88% ja 86% vastaavasti.

M9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot

9.1.a) 0 **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sqrt{3}$ **d)** $-\frac{1}{2}$

9.2.a) $-4\sin(4x)$ **b)** $98\cos(7x)$

c) 0 **d)** $-\frac{1}{\sin^2(x)}$

e) $\left(3\cos(8x)-8\sin(8x)\right)e^{3x+1}$ **f)** $\frac{2}{\cos^2 2x}$

9.3.a) $x=150^o+n\cdot 120^o, n\in\mathbb{Z}$

b) $x=\pm\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi, n\in\mathbb{Z}$

c) $15^o+n\cdot 60^o, n\in\mathbb{Z}$

9.4.a) $-6\cos x\cdot\sin x$ **b)** $-7\cos(x)$

9.5.a) 16, 42, 94, 198 ja 406
b) 0,5; -0,15625; 0,046875; -0,01367875 ja 0,00390625

9.6.a) $b_n=4n-2$ **b)** 3998 **c)** 2000000

9.7. $\sin(2x)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ja $\sin(3x)=-\frac{\sqrt{6}}{9}$

9.8. Ks. eActivity-sovelluksessa tiedosto.

9.9.a) Katso todistus tiedostosta.

b) $x=\frac{\pi}{8}+n\cdot\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$

9.10.a) $a_n=2\cdot 3^{n-1}, n=1,2,3,\ldots$

b) $a_{10}=39366$

c) 14348906

9.11.a) Lukujono kasvaa aidosti, kun $1\le n\le 4$ tai kun $n\ge 7$. Lukujono vähenee aidosti, kun $4\le n\le 7$.
b) Lukujonolla ei ole suurinta arvoa. Pienin arvo on $a_1=56$.

9.12. Yhteenlaskettavia pitää olla 11.

9.13. Suurin arvo on $\frac{5}{4}$ ja pienin arvo -1.

9.14. Kerroksia on 24, alimmassa kerroksessa on 576 palloa ja yli jää 100 palloa.

9.15. Katso todistus tiedostosta.

M10 Integraalilaskenta

10.1.a) $\frac{3}{5}x^5+C$ **b)** $\frac{1}{5}\sin(5x)+C$

c) $\frac{5}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C$ **d)** $\frac{-5}{18\left(2x^3+5\right)^3}+C$

e) $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C$ **f)** $xe^{2x-3}+C$

10.2.a) 0 **b)** $\frac{11}{6}$

10.3.a) $x\ge -1$ **b)** $x=-1\vee x=-\frac{3}{4}\vee x=1$

10.4. $F(x)=\begin{cases} x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C, & x\le 1 \\ -\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{9}{4}+C, & x>1\end{cases}$

10.5.a) 50 **b)** -20
c) 70 **d)** 0
e) 20 **f)** $A_1=100, A_2=20, A_3=50$

10.6.a) $\frac{32}{3} \approx 10,7$ **b)** 8

10.7. $\frac{68}{3}$

10.8. $\frac{21}{2}$

10.9.a) 168π **b)** $\frac{8}{3}\pi$

10.10.a) $\frac{47}{3}$ **b)** $\frac{113}{6}$ **c)** Yläsumma.

10.11. $2,75$ pay.

10.12. Pinta-ala on n. $0,57$ pay.

10.13. $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$

10.14. Kappaleet ovat yhtä suuria.

10.15.a) $g_1(x) = x,\ g_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

b) Osoitetaan laskemalla, että
$g_j * g_k = 0$ kaikille vaihtoehdoille.

c) $a = c = 0, b = -\frac{3}{5}$