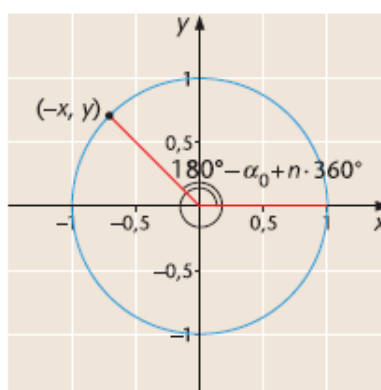
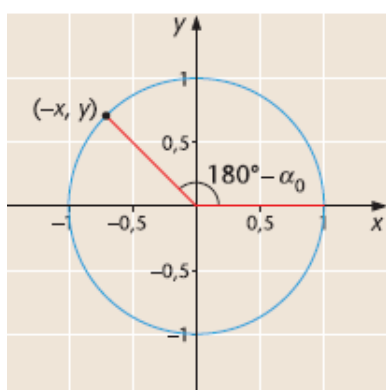
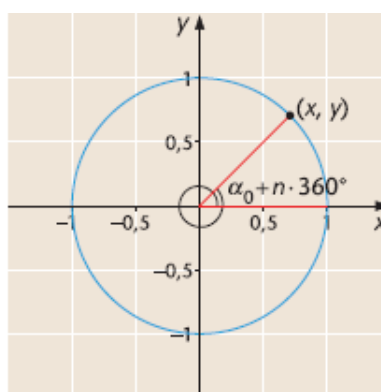
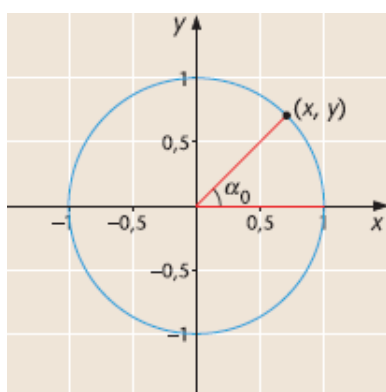




Siniyhtälön ratkaiseminen

- Tarkastellaan sellaista alle 90° kulmaa α_0 , jonka sinin arvo on y eli $\sin \alpha_0 = y$.
- Sama sinin arvo y on myös kulmilla $\alpha_0 + 360^\circ$, $\alpha_0 + 2 \cdot 360^\circ$ jne. sekä kulmilla $180^\circ - \alpha_0$, $180^\circ - \alpha_0 + 360^\circ$, $180^\circ - \alpha_0 + 2 \cdot 360^\circ$ jne.



Siniyhtälön $\sin \alpha = y$ ratkaisu:

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360^\circ \text{ tai } \alpha = 180^\circ - \alpha_0 + n \cdot 360^\circ,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



Esimerkki 1

Ratkaise yhtälö $\sin x = 0,15$ asteen tarkkuudella.

Ratkaisu:

Esimerkki 2

Ratkaise yhtälö $\sin x = 0,15$ radiaaneina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu:

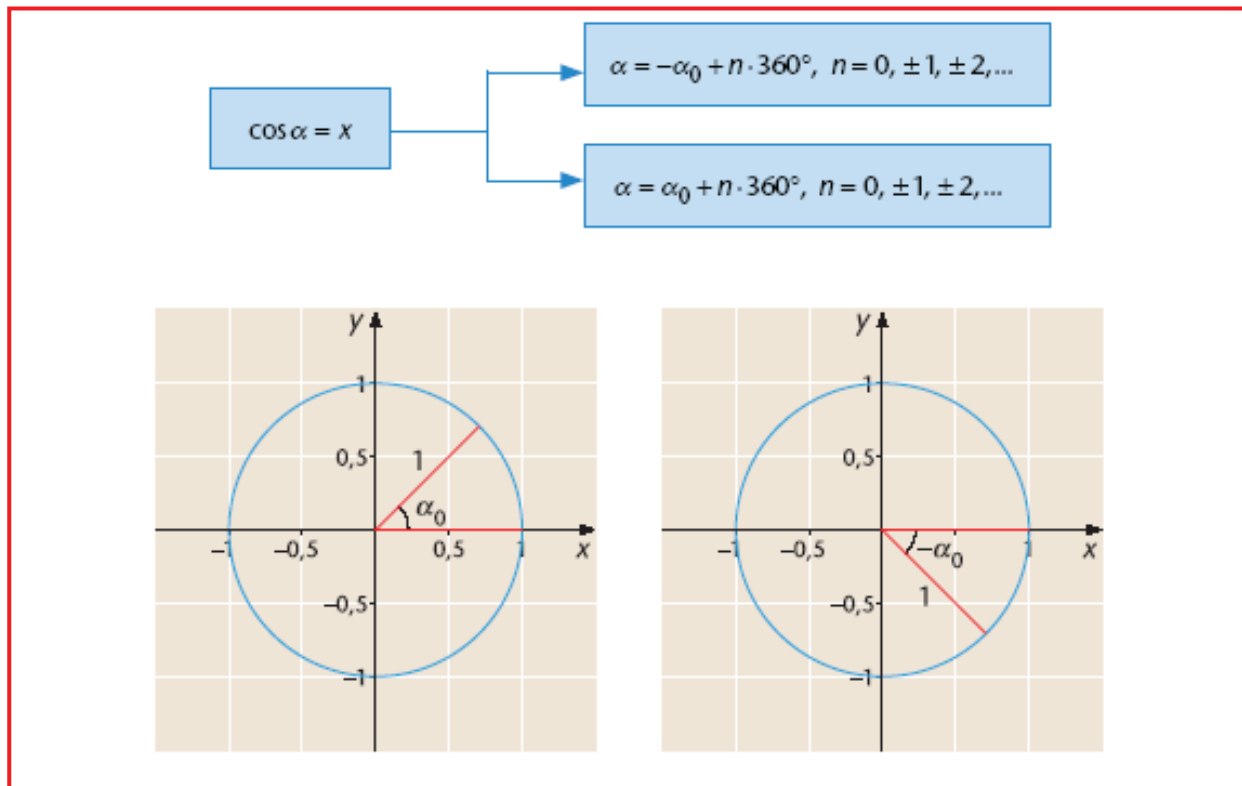
Esimerkki 3

Ratkaise yhtälön $\sin 2x = 0,761$ juurista ne, jotka ovat välillä $[0, \pi]$.

Ratkaisu:



Kosiniyhtälön ratkaiseminen



Esimerkki

Ratkaise yhtälö $\cos \alpha = 0,25$ asteina ja radiaaneina. Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

asteina

radiaaneina

Esimerkki

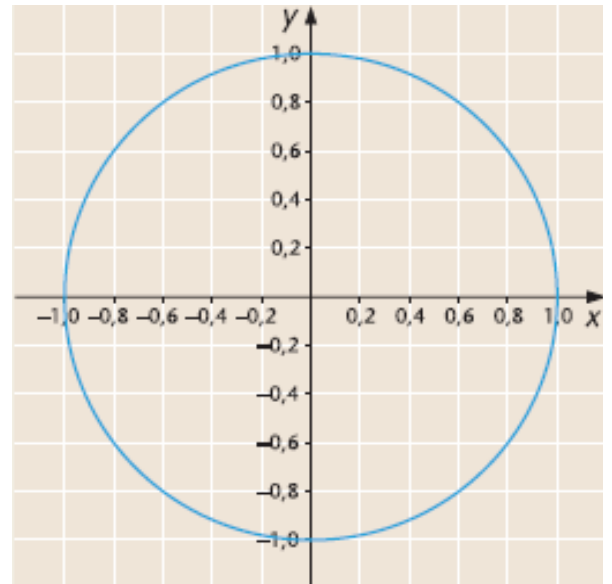
Ratkaise yhtälö $2\cos \alpha + 1 = 0$ taulukkokirjan avulla. Anna vastaus radiaaneina ja tarkkana arvona.



Kulman ratkaiseminen graafisesti

1) Piirrä ensimmäiseen neljännekseen sellainen kulma, jonka tangentin arvo on 0,7. Mittaa kulman suuruus asteina.

2) Myös kolmannelta neljänneksestä löytyy kulma, jonka tangentti on 0,7. Piirrä kulma ja mittaa kulman suuruus asteina.



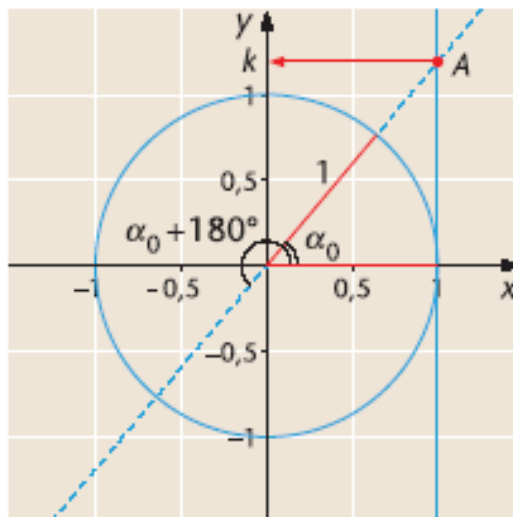
3) Mieti, millä muilla kulmilla tangentin arvo voi olla 0,7. Anna esimerkkejä tällaisista kulmista.

4) Miten kaikki kulmat, joiden tangentti on 0,7, voitaisiin esittää mahdollisimman yksinkertaisella tavalla?



Tangenttisyhtälön ratkaiseminen

Tangentin arvo saadaan tangentsuoran avulla. Sama tangentin arvo toistuu 180 asteen välein.



$$\tan \alpha = k$$

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 180^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esimerkki

Ratkaise yhtälö $\tan \alpha = 1,2$ asteina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Esimerkki

Ratkaise taulukkokirjan avulla radiaaneina yhtälö $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$.



Sini, kosini ja tangentti taulukkokirjan avulla

1. Ratkaise taulukkokirjan avulla

a) $\sin 45^\circ$

b) $\cos 30^\circ$

c) $\tan 210^\circ$

d) $\sin \frac{4}{3}\pi$

e) $\cos \frac{5\pi}{6}$

f) $\tan \frac{5\pi}{3}$.

2. Ratkaise taulukkokirjan avulla ne ratkaisut, jotka kuuluvat välille $[0, 2\pi]$.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\tan \varphi = \sqrt{3}$

d) $\cos \beta - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Vastaukset:

1. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $-\sqrt{3}$

2. a) $x = \frac{\pi}{6}$ tai $x = \frac{5\pi}{6}$ b) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ tai $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

c) $\varphi = \frac{\pi}{3}$ tai $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ d) $\beta = \frac{\pi}{6}$ tai $\beta = \frac{11\pi}{6}$



Yhteenvedo trigonometrinen yhtälöiden ratkaisemisesta

SINIYHTÄLÖ $\sin \alpha = y$

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad \alpha = 180^\circ - \alpha_0 + n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esimerkki: Ratkaise $\sin \alpha = 0,5$

$$\alpha = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad \alpha = \underbrace{180^\circ - 30^\circ}_{150^\circ} + n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

KOSINIYHTÄLÖ $\cos \alpha = x$

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad \alpha = -\alpha_0 + n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esimerkki: Ratkaise $\cos \alpha = 0,5$

$$\alpha = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad \alpha = \underbrace{-60^\circ}_{300^\circ} + n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

TANGENTTIYHTÄLÖ $\tan \alpha = k$

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 180^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esimerkki: Ratkaise $\tan \alpha = 0,5$.

$$\alpha = 26,5\dots^\circ + n \cdot 180^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Sini-, kosini- ja tangenttiyhtälöitä

1. Ratkaise yhtälö. Ilmoita vastaus asteina.

a) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sin 3x = \frac{1}{2}$

c) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\cos(-2x) = 0,6$

e) $\tan \beta = \sqrt{2} + 1$

f) $\tan(-x) = 0,5$

2. Ratkaise yhtälö. Ilmoita vastaus radiaaneina.

a) $4 \sin x = -2$

b) $\sin 2x - 3 = -2,2$

c) $-\frac{1}{3} \cos x = \frac{1}{5}$

d) $\cos(-x) + 2 = 3$

e) $-\tan x = -7$

f) $2 \tan 2\alpha - 3 = 5$

Vastaukset:

1. a) $x = 225^\circ + n \cdot 360^\circ$ tai $x = 315^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in Z$

b) $x = 10^\circ + n \cdot 120^\circ$ tai $x = 50^\circ + n \cdot 120^\circ, n \in Z$

c) $\alpha = \pm 45^\circ + n \cdot 120^\circ, n \in Z$

d) $x = 18,4\dots^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in Z$

e) $\beta = 67,5^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in Z$

f) $x = -26,56\dots^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in Z$

2. a) $x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi, n \in Z$

b) $x = 0,46\dots + n \cdot \pi$ tai $x = 1,107\dots + n \cdot \pi, n \in Z$

c) $x = \pm 2,21\dots + n \cdot 2\pi, n \in Z$

d) $x = n \cdot 2\pi, n \in Z$

e) $x = 1,428\dots + n \cdot \pi, n \in Z$

f) $\alpha = 0,662\dots + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in Z$



Testi: Kosini- ja tangenttiyhtälöt

1. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella.

$$\cos x = 0,24$$

2. Ratkaise yhtälö radiaaneina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

$$3 \tan \beta - 2,1 = 0$$

3. Ratkaise yhtälö ilman likiarvoja taulukkokirjan avulla.

$$\tan 2x = \sqrt{2} - 1$$



Keskeisiä käsitteitä trigonometriasta

