

L U K I O N L Y H Y T M A T E M A T I I K K A

Sanna Hassinen

Katariina Hemmo

Timo Taskinen

SIGMA⁸

Matemaattisia malleja III

Opettajan opas

Kustannusosakeyhtiö TAMMI ≡ Helsinki

1.-2. painos

© Tekijät ja Kustannusosakeyhtiö Tammi, 2007

ISBN 978-951-26-5393-5

Multiprint Oy, Helsinki 2009

Sisällys

Ohjeita kirjan käyttäjälle.....	7
Opetuskertojen käyttöehdotuksia.....	8
Vinkkejä oppikirjan käyttöön.....	9
1.1 Erilaisia kulmia ja kulman yksiköitä	
Erilaisia kulmia ja kulman yksiköitä.....	10
Suunnattu kulma.....	11
Yhdenmuotoiset ympyräsektorit.....	12
Radiaani.....	13
Radiaanit ja asteet.....	14
1.2 Sini, kosini ja tangentti	
Kulman muuntaminen.....	16
Sini, kosini ja tangentti.....	18
Sini.....	19
Sinin arvo eri neljänneksissä.....	21
Kulman sinin arvon laskeminen.....	22
Yksikköympyrä ja sinin arvo.....	23
Esimerkki (oppikirja s. 16).....	25
Kosini.....	26
Kosinin arvo eri neljänneksissä.....	28
Esimerkki (oppikirja s. 29).....	29
Yksikköympyrä ja kosinin arvo.....	30
Tangentti.....	32
Tangenttisuora ja tangenttipiste.....	34
Yksikköympyrä ja tangentin arvo.....	35
Esimerkki (oppikirja s. 54).....	37
Sinin, kosinin ja tangentin arvon laskeminen.....	38
Sini, kosini ja tangentti yksikköympyrässä.....	39
Testi: Sini, kosini ja tangentti.....	40
2.1 Siniyhtälöt	
Siniyhtälö.....	41
Kulman ratkaiseminen graafisesti.....	42
Siniyhtälön ratkaiseminen.....	43
Kulman laskeminen yksikköympyrän avulla.....	45
Siniyhtälö sovellustehtävissä.....	46
Testi: Siniyhtälö.....	47
2.2 Kosini- ja tangenttiyhtälöt	
Kosini- ja tangenttiyhtälöt.....	48
Kulman ratkaiseminen graafisesti.....	49
Kosiniyhtälö.....	50
Kosiniyhtälön ratkaiseminen.....	51
Kulman ratkaiseminen graafisesti.....	52
Tangenttiyhtälön ratkaiseminen.....	53

Sini, kosini ja tangenti taulukkokirjan avulla.....	54
Yhteenvedo trigonometrinen yhtälöiden ratkaisemisesta.....	55
Sini-, kosini- ja tangenti yhtälöitä.....	56
Testi: Kosini- ja tangenti yhtälöt.....	57
Keskeisiä käsitteitä trigonometriasta	58
3.1 Trigonometrinen funktioiden jaksollisuus	
Funktio $f(x) = \sin x$	59
Funktio $f(x) = \cos x$	60
Muita trigonometrisia funktioita	62
Nollakohtien määrittäminen graafisesti ja algebrallisesti.....	63
Joitakin tehtäviä oppikirjasta	64
3.2 Sovelluksia	
Sovelluksia.....	66
Sovellustehtävän ratkaisu.....	67
4.1 Kolmion ja suunnikkaan ala	
Kolmion ja suunnikkaan ala	68
Kolmion ala.....	69
Suunnikkaan ala.....	70
Alojen laskemista	71
Kulman ratkaiseminen.....	72
Oppikirjan esimerkki 2 (s. 79)	73
4.2 Sinilause	
Sinilause	74
Sinilauseen johtaminen.....	75
Sinilause	76
Sinilauseen käyttäminen sivun ratkaisemiseen.....	77
Sinilauseen käyttäminen kulman ratkaisemiseen	78
Testi: Sinilause	79
4.3 Kosinilause	
Kosinilauseen johtaminen.....	80
Kosinilause.....	81
Kosinilauseen käyttäminen sivun ratkaisemiseen.....	82
Kosinilauseen käyttäminen kulman ratkaisemiseen	84
Testi: Kosinilause	85
Keskeisiä käsitteitä geometriasta.....	86

5.1 Peruskäsitteitä

Peruskäsitteitä vektoreista.....	87
Vektoreiden yhtäsuuruus	89
Erlaisia vektoreita.....	90
Yksikkövektori.....	91
Vektorien välinen kulma	92

5.2 Laskutoimitukset

Laskutoimitukset.....	94
Vektorien summa.....	95
Summavektoreita piirtämällä	96
Vektorien erotus.....	97
Vektorin kertominen luvulla.....	98
Vektoreiden erotus piirtämällä	99
Vektorien yhdensuuntaisuus.....	100
Esimerkkejä laskutoimituksista	101
Testi: Laskutoimitukset	102
Yhteenveto vektorien laskutoimituksista.....	103

5.3 Komponentteihin jako

Komponentteihin jako	104
Vektorin jakaminen komponentteihin	105
Komponentit	106
Vektorien yhtäsuuruus.....	107
Esimerkkejä komponentteihin jaosta	108
Vektorien yhdensuuntaisuus.....	110

5.4 Vektorit xy -koordinaatistossa

Vektorit xy -koordinaatistossa.....	111
xy -tason kantavektorit	112
Pisteen paikkavektori.....	113
Vektorin pituus.....	114
Kahden pisteen välisen vektorin määrittäminen	115
Kahden pisteen välinen vektori	116
Kirjan esimerkki 4 (s. 135).....	117
Testi: Vektorit xy -koordinaatistossa	118

5.5 Vektorit xyz -koordinaatistossa

Vektorit xyz -koordinaatistossa.....	119
Paikkavektori avaruuskoordinaatistossa	120
Esimerkkejä paikkavektorin käytöstä.....	121
Vektorin pituus.....	123
Kahden pisteen välinen vektori	124
Testi: Vektorit xyz -koordinaatistossa	126

5.6 Pistetulo

xy -tason vektorien pistetulo.....	127
Vektorien kohtisuoruus.....	129
Kohtisuoruusehdon käyttäminen	130
Pistetulon määritelmä	131
Testi: Pistetulo	133
Keskeisiä käsitteitä vektoreista.....	134

Kertaus

Kertaus	135
Monivalintakysymyksiä kursseista	147

Kokeet

Koe 1	151
Koe 2	152
Koe 3	154

Kokeiden ratkaisut

Koe 1	155
Koe 2	158
Koe 3	163

Ohjeita kirjan käyttäjälle

Sigma-kirjoihin on saatavana laaja opettajan materiaali, joka sisältää

- opettajan oppaan
- kirjan tehtävien lasketut ratkaisut
- CD-ROMin, johon on tallennettu opettajan opas ja kirjan tehtävien lasketut ratkaisut digitaalisessa muodossa.

Tämä opettajan opas on tehty tukemaan lukion lyhyen matematiikan oppikirjaa Sigma 8, Matemaattisia malleja III. Oppaaseen on koottu paljon erilaista lisämateriaalia tuntien suunnittelua, itse opetusta ja kurssikoetta varten.

- Oppaan alussa on yleisiä ohjeita mm. ajankäytöstä.
- Suurin osa oppaan sisällöstä on erilaisia kalvo- ja tehtäväpohjia, jotka on koottu kirjan lukujen mukaiseen järjestykseen.
- Oppaan lopussa on kurssikokeita ratkaisuihin.

Logojen selitykset



KALVOPOHJAT

- kirjan pohdintatehtävät
- kirjan taulukot ja kaaviot
- teoriakalvot
- laskuesimerkit



LASKINPOHJAT

- opastus yleisimpään tapaan käyttää laskinta tietyssä tilanteessa
- lisäksi muutama nopea harjoitus



MONISTEPOHJAT

- erilaisia lisätehtäviä
- tukioetusmateriaalia



TESTIT

- lyhyitä pistareita

Opetuskertojen käyttöehdotuksia

Koska eri oppilaitoksissa oppituntien pituudet voivat poiketa hyvinkin paljon toisistaan, ajankäyttöehdotus on tehty opetuskertojen mukaan. Kurssiin mahtuu opetuskertojen pituudesta riippumatta yleensä 16–19 opetuskertaa (kolme opetuskertaa/viikko).

Tapa 1	Ei käsitellä geometrian ylimääräistä opetuskokonaisuutta	Tapa 2	Painotetaan sovelluksia		
1.1	Erlaisia kulmia ja kulman yksiköitä	1	1.1	Erlaisia kulmia ja kulman yksiköitä	1
1.2	Sini, kosini ja tangenti	2–3	1.2	Sini, kosini ja tangenti	2
2.1	Siniyhtälö	1	2.1	Siniyhtälö	1
2.2	Kosini- ja tangentiyhtälö	2	2.2	Kosini- ja tangentiyhtälö	1–2
3.1	Trigonometrinen funktioiden jaksollisuus	1	3.1	Trigonometrinen funktioiden jaksollisuus	0–1
3.2	Sovelluksia	1	3.2	Sovelluksia	0–1
4.1	Kolmion ja suunnikkaan ala	1	4.1	Kolmion ja suunnikkaan ala	1
4.2	Sinilause	1–2	4.2	Sinilause	1–2
4.3	Kosinilause	1–2	4.3	Kosinilause	1–2
5.1	Peruskäsitteitä	1	5.1	Peruskäsitteitä	1
5.2	Laskutoimitukset	2	5.2	Laskutoimitukset	1–2
5.3	Komponentteihin jako	1–2	5.3	Komponentteihin jako	1–2
5.4	Vektorit xy -koordinaatistossa	1–2	5.4	Vektorit xy -koordinaatistossa	1–2
5.5	Vektorit xyz -koordinaatistossa	1	5.5	Vektorit xyz -koordinaatistossa	1
5.6	Vektorien pistetulo eli skalaaritulo	1–2	5.6	Vektorien pistetulo eli skalaaritulo	1–2
Kertaus			Kertaus		

Vinkkejä oppikirjan käyttöön

POHDINTATEHTÄVÄT

Opiskelijan motivointi, sekä rohkaiseminen tutkivaan ja keksivään oppimiseen, on useimmiten hankalaa. Sigma tarjoaa pohdintatehtävillään yhden ratkaisun näiden tavoitteiden saavuttamiseksi. Moni kirjan luvuista alkaa pohdintatehtävällä, jonka tarkoitus voi olla esimerkiksi

- johdatella aiheeseen
- herättää kiinnostusta
- opettaa uutta asiaa
- kerrata nopeasti jo opittua.

Pohdintatehtävän voi esimerkiksi antaa kotitehtäväksi edellisellä tunnilla tai sen voi käydä tunnin alussa yhdessä läpi. Pohdintatehtävän avulla opiskelija voi myös itse tutustua tai opiskella uutta asiaa.

Kirjan läpikäyminen ei missään vaiheessa vaadi pohdintatehtävien käsittelyä. Näiden käyttö jätetään opettajan päätettäväksi. Oppikirjan pohdintatehtävistä on opettajan oppaassa kalvopohjat.

KAAVIOT JA TAULUKOT

Erilaisten ongelmanratkaisutapojen keksiminen ja tarkasteltavan ongelman tunnistaminen on opiskelijalle vaativa tehtävä. Tästä syystä opiskelijalle tulisi tarjota erilaisia keinoja tilanteiden tarkasteluun. Taulukoiden ja kaavioiden käyttö sekä teorian että esimerkkien kohdalla antaa opiskelijalle erilaisia hahmottamis- ja mallintamiskeinoja. Oppikirjan taulukoihin on useimmiten koottu

- ennestään tuttua asiaa
- juuri opittua uutta asiaa
- laskuesimerkkejä.

Oppikirjan kaaviot ovat teoriaa visuaalisemmassa muodossa. Usein uusi asia on selitetty sanallisesti tekstiosioissa ja havainnollistettu vielä kaavion avulla. Kaavioita voi käyttää teoriaopetuksen apuna tai ohjeena, esimerkiksi yhtälön muodostamiseen, riippuen kaavion luonteesta.

KÄSITEKARTAT

Käsitekartat ovat myös matematiikassa hyvä keino koota yhteen keskeiset asiat sekä niiden hierarkia. Oppikirjan jokainen pääluku loppuu käsitekarttaan.

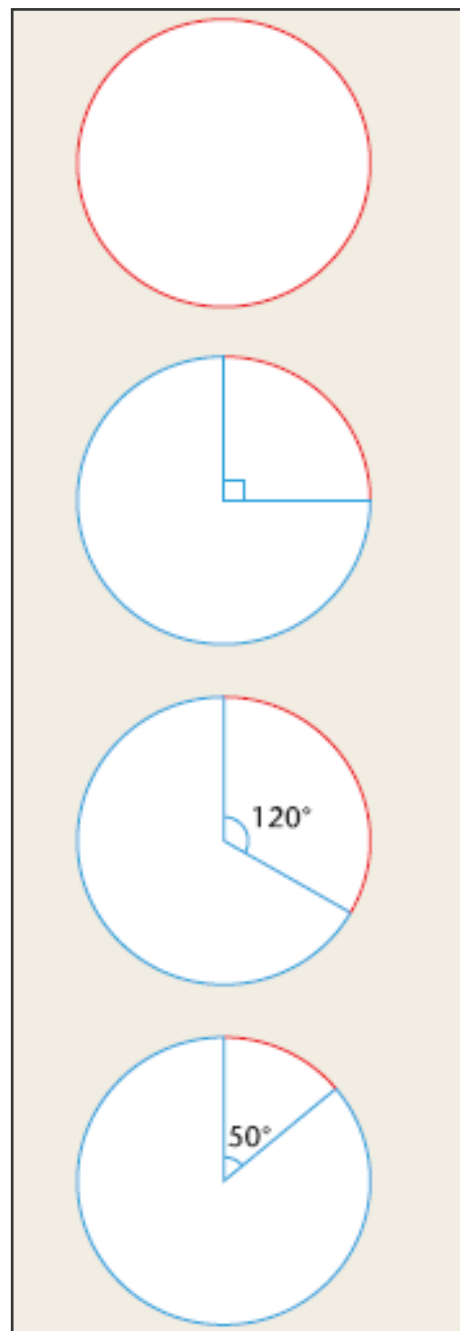
Oppikirjan käsitekarttoja voi käyttää esimerkiksi kurssin kertaamiseen. Niistä voi ottaa myös mallia omiin käsitekarttoihin. Oppikirjan käsitekartoista on kalvopohjat opettajan oppaassa.



Erilaisia kulmia ja kulman yksiköitä

Pohdinta 1

Ympyrän kehän pituus p lasketaan kaavalla $p = 2\pi r$, jossa r on ympyrän säde. Laske punaisella merkityn osan pituus, kun $r = 1$.





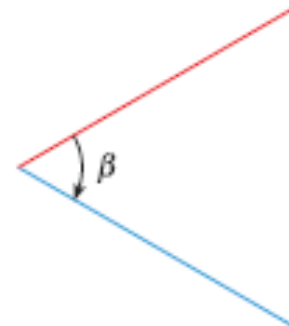
Suunnattu kulma

- Kulma syntyy kahdesta päällekkäin asetetusta puolisuorasta.
- Toinen puolisuora jää paikalleen ja toista kierretään vastapäivään.
- Paikalleen jäävää puolisuoraa kutsutaan **alkukyljeksi** ja kierrettyä puolisuoraa taas **loppukyljeksi**.

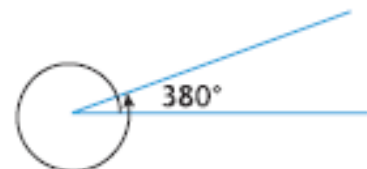
- Jos kiertäminen tehdään **vastapäivään**, syntyy positiivinen kulma (esim. α).



- Jos kiertäminen tehdään **myötäpäivään**, syntyy negatiivinen kulma (esim. β).



- Kiertämistä voidaan jatkaa yli täyden kulman 360° .

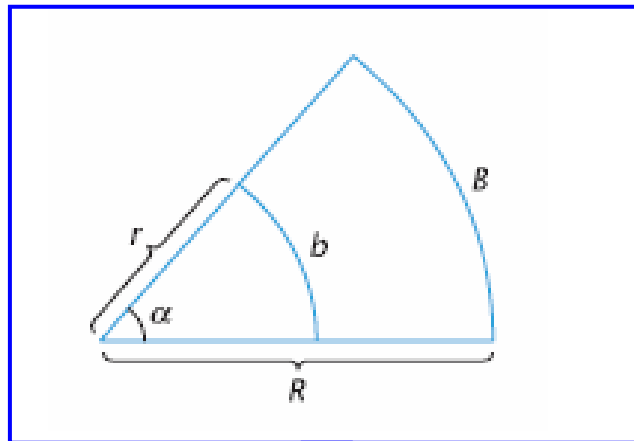


- Kulman suuruudella ei ole ala- eikä ylärajaa.



Yhdenmuotoiset ympyräsektorit

Tarkastellaan kahta ympyräsektoria: isomman säde on R ja pienemmän r .



Sektorit ovat
yhdenmuotoiset
 \Rightarrow vastinosien suhteet
ovat samat.

$$\frac{B}{b} = \frac{R}{r}$$

$$bR = Br$$

$$\frac{b}{r} = \frac{B}{R}$$

Kerrotaan
ristiin.

Jaetaan molemmat puolet
ensin luvulla R ja sitten
luvulla r .

Kaaren ja säteen suhde
on sama
yhdenmuotoisilla
sektoreilla.

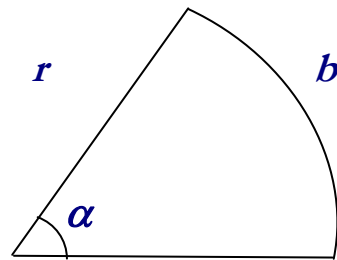


Radiaani

- Kaaren ja säteen suhde on aina sama yhdenmuotoisilla ympyräsektoreilla.
- Kun sektorin kaarta pidennetään, kaaren ja säteen suhde kasvaa (säteen pituus säilyy samana).
- Sektorin kaaren pituus riippuu aina kulmasta.
 - ⇒ Kaaren ja säteen suhde on hyvä kulmanyksikkö.
- Kaaren ja säteen suhdetta sanotaan **radiaaniksi (rad)**.

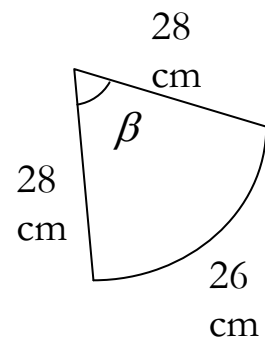
Radiaani

$$\alpha = \frac{b}{r}$$



Esimerkki

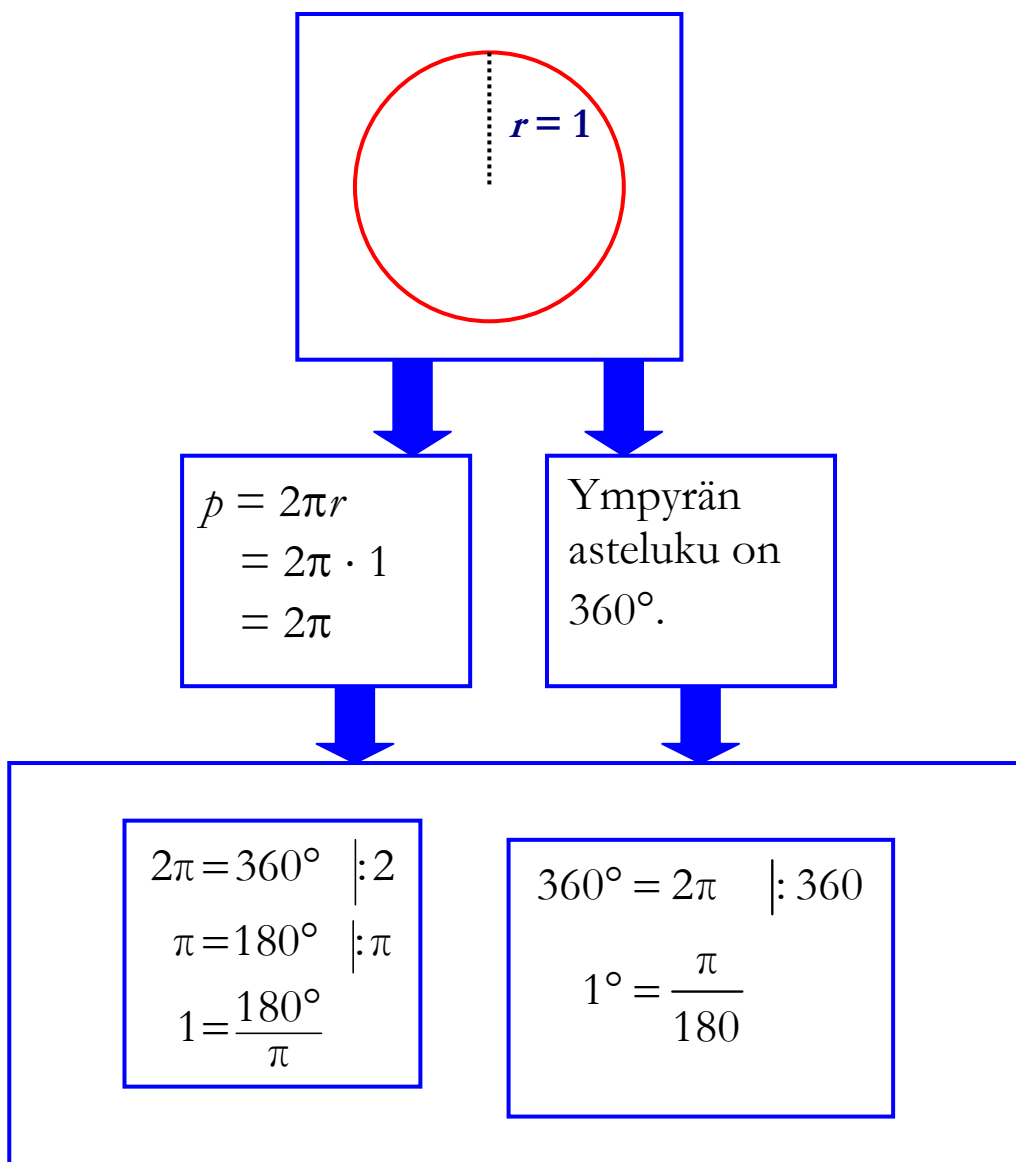
Määritä kulma β radiaaneina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.





Radiaanit ja asteet

- Tutkitaan radiaania **yksikköympyrän** avulla.
 - Yksikköympyrän säteen pituus on 1.



Esimerkki 1

Muunna radiaanit asteiksi. Anna vastaus asteen tarkkuudella.

$$2,4 =$$

$$0,85 =$$

$$\frac{3\pi}{4} =$$

Esimerkki 2

Muunna asteet radiaaneiksi. Anna vastaus sekä tarkkana arvona että likiarvona kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

$$45^\circ =$$

$$300^\circ =$$

$$117^\circ =$$



Kulman muuntaminen

Asteiden muuntaminen radiaaneiksi:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

Muunna asteet radiaaneiksi. Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

1. $3^\circ =$

2. $0,6^\circ =$

3. $35,5^\circ =$

4. $234^\circ =$

Muuta asteet radiaaneiksi. Anna vastaus tarkkana arvona.

5. $3^\circ =$

6. $10^\circ =$

7. $200^\circ =$

8. $270^\circ =$

Radiaanien muuntaminen asteiksi:

$$1 = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Muuta radiaanit asteiksi. Anna vastaus asteen tarkkuudella.

9. $3 =$

10. $10 =$

11. $50,7 =$

12. $7,3 =$

Muuta radiaanit asteiksi. Anna vastaus tarkkana arvona.

13. $\pi =$

14. $\frac{4\pi}{3} =$

15. $\frac{5\pi}{6} =$

16. $\frac{\pi}{9} =$

Vastaukset:

1. 0,05

2. 0,01

3. 0,62

4. $4,085; \frac{\pi}{60}$

6. $\frac{\pi}{18}$

7. $\frac{10\pi}{9}$

8. $\frac{3\pi}{2}$

9. 172°

10. 573°

11. 2905°

12. 418°

13. 180°

14. 240°

15. 150°

16. 20°



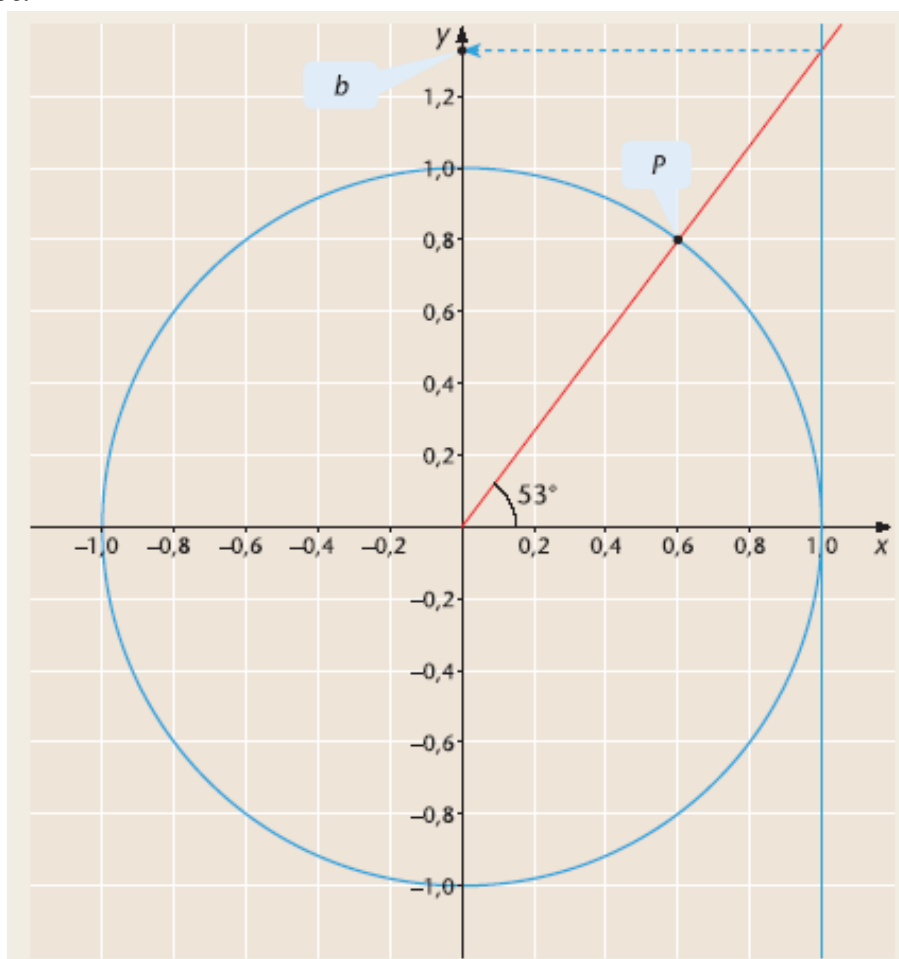
Sini, kosini ja tangentti

Pohdinta 1

Kuvaan on piirretty 53° kulma. Laske laskimella yhden desimaalin tarkkuudella

- a) $\sin 53^\circ$
- b) $\cos 53^\circ$
- c) $\tan 53^\circ$.

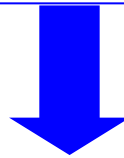
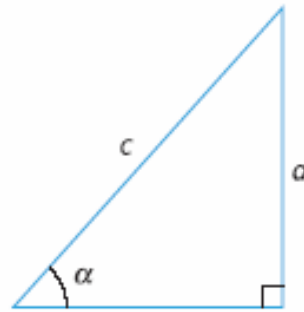
Määritä kuvasta pisteen P koordinaatit sekä y -akselin arvo b yhden desimaalin tarkkuudella. Vertaa näitä edellä laskettuihin tuloksiin. Mitä havaitset?



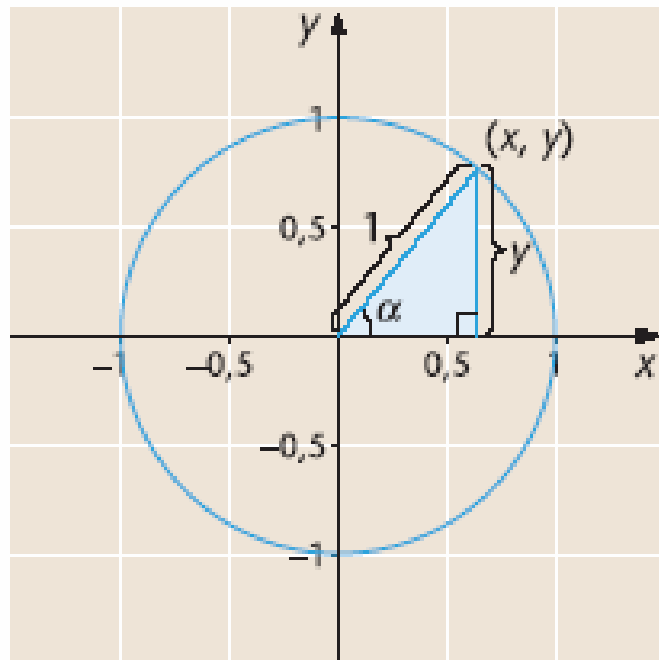


Sini

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

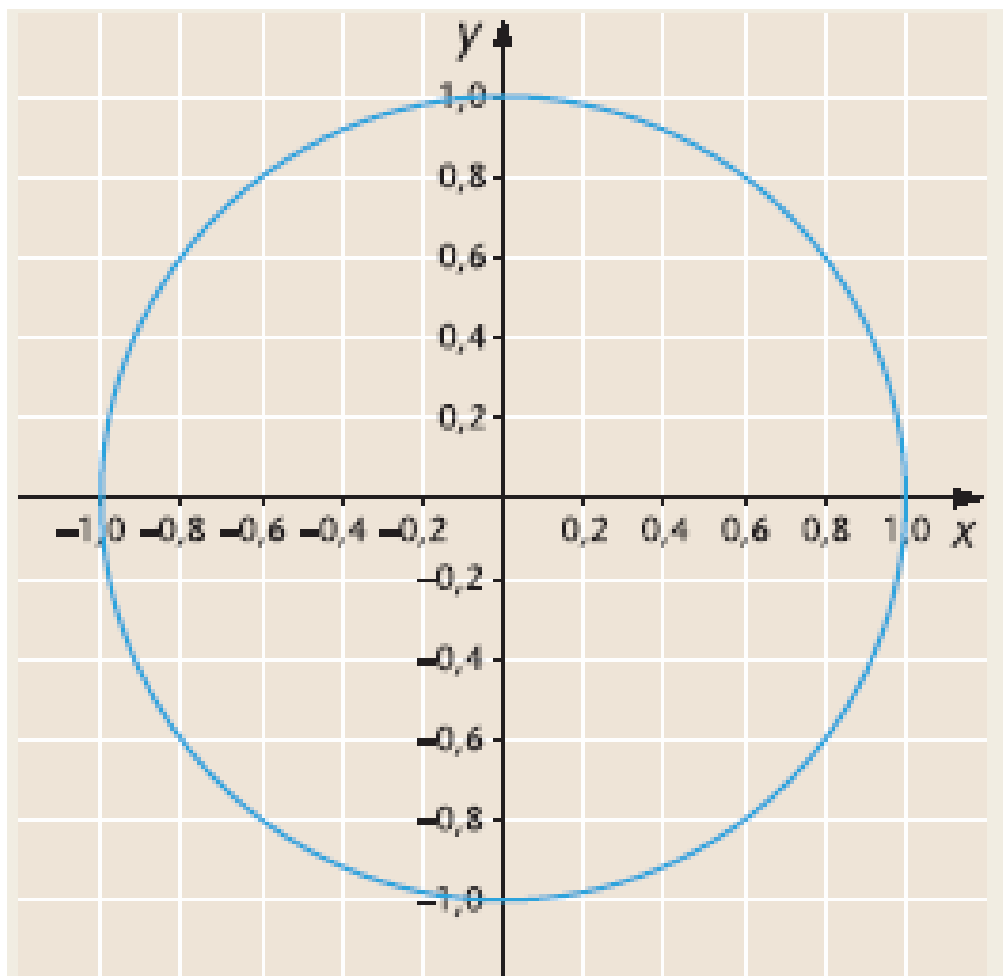


$\sin \alpha =$



**Esimerkki**

Piirrä yksikköympyrään seuraavat kulmat ja päättele kuvan perusteella kulmien sinin arvo yhden desimaalin tarkkuudella.

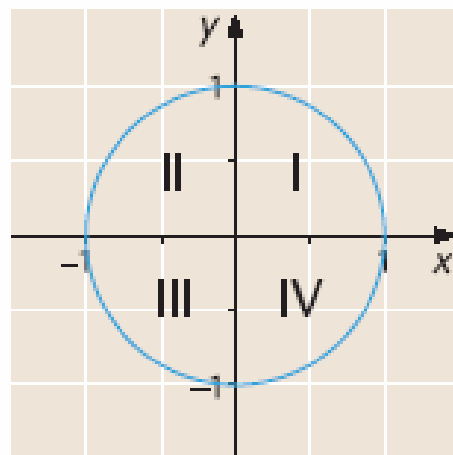


Kulma	Sini
45°	
90°	
120°	
180°	
200°	
300°	

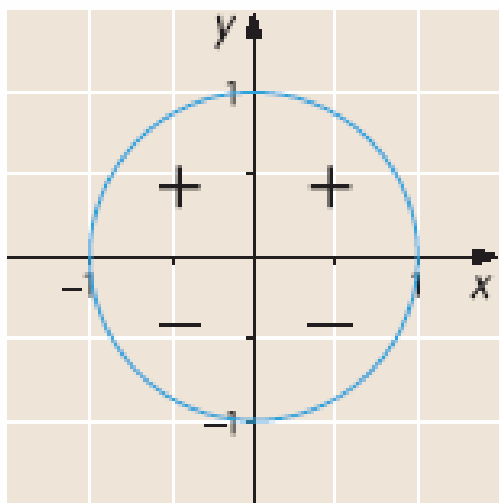


Sinin arvo eri neljänneksissä

Koordinaattiakselit jakavat yksikköympyrän neljään osaan. Näitä kutsutaan neljänneksiksi.

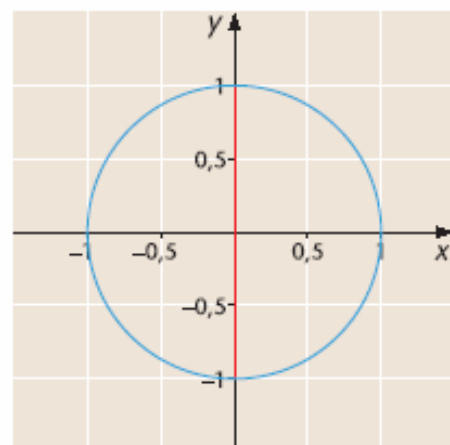


Sinin arvo = kehäpisteen y -koordinaatti



Neljännes	Kulma	Sinin arvo
I	25°	$\sin 25^\circ \approx 0,42$
II	100°	$\sin 100^\circ \approx 0,98$
III	190°	$\sin 190^\circ \approx -0,17$
IV	280°	$\sin 280^\circ \approx -0,98$

Sinin arvo vaihtelee välillä $[-1, 1]$.





Kulman sinin arvon laskeminen

Tarkista, että laskimesi asetukset ovat asteina eli laskimesi on DEG-tilassa.

Lasku	Näppäilyohje								Vastaus
	funktio-laskin				graafinen laskin				
$\sin 40^\circ$	4	0	sin		sin	4	0		0,642...
$\sin 60^\circ$	6	0	sin		sin	6	0		0,866...
$\sin(-40^\circ)$	sin	+/-	4	0	sin	(-)	4	0	-0,642...

Muuta asetukset radiaaneiksi eli RAD-tilaan.

Lasku	Näppäilyohje								Vastaus				
	funktio-laskin				graafinen laskin								
$\sin 40$	4	0	sin		sin	4	0		0,745...				
$\sin \pi$		π	sin		sin	π			0				
$\sin(-5)$	sin	+/-	5		sin	(-)	5		0,958...				
$\sin \frac{3\pi}{4}$	3	\times	π	\div	4	=	sin	sin	3	π	$a^{b/c}$	4	0,707...

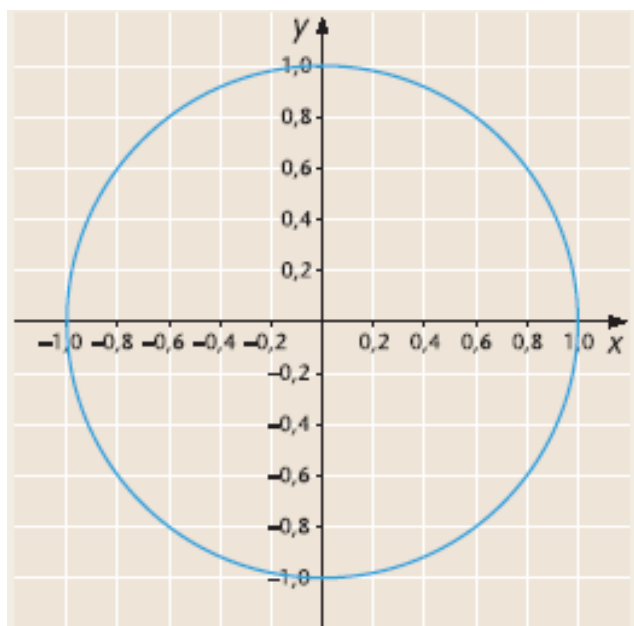


Yksikköympyrä ja sinin arvo

Laske laskimella, mitä on $\sin 30^\circ$.

$$\sin 30^\circ =$$

Piirrä tämän tiedon perusteella yksikköympyrään 30° kulma.



Piirrä yksikköympyrään 150° kulma, kun $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Määritä yksikköympyrän avulla $\sin 150^\circ$.

Piirrä yksikköympyrään 210° kulma, kun $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$.

Määritä yksikköympyrän avulla $\sin 210^\circ$.

Piirrä yksikköympyrään 330° kulma, kun $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$.

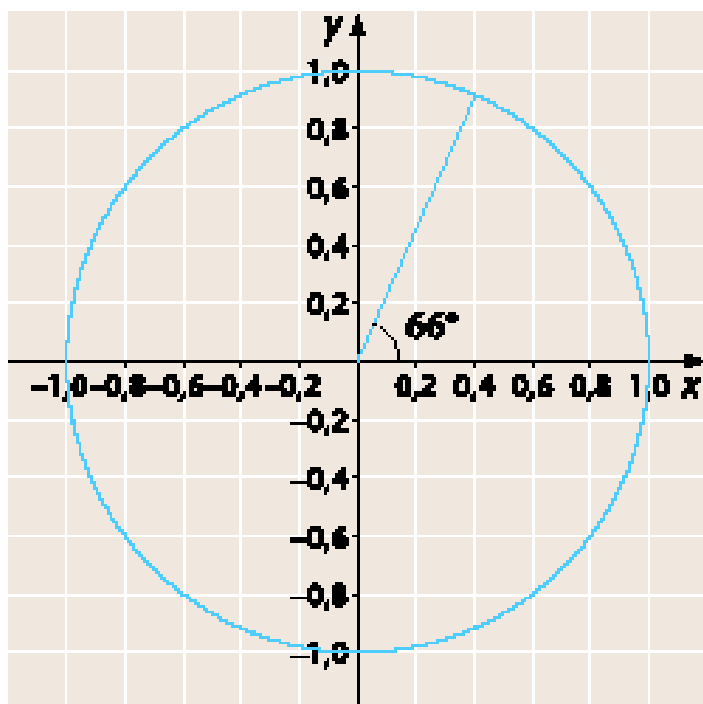
Määritä yksikköympyrän avulla $\sin 330^\circ$.

Esimerkki

Määritä yksikköympyrän avulla

- a) $\sin 66^\circ$
- b) $\sin(-66^\circ)$
- c) $\sin 294^\circ$
- d) $\sin 246^\circ$.

Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



Taulukkokirjasta löytyy joidenkin kulmien trigonometristen funktioiden tarkkoja arvoja. Täydennä taulukko.

Kulma	Sinin tarkka arvo
π	
45°	
150°	
$4\pi/3$	
330°	
2π	



Esimerkki (oppikirja s. 16)

ESIMERKKI 1

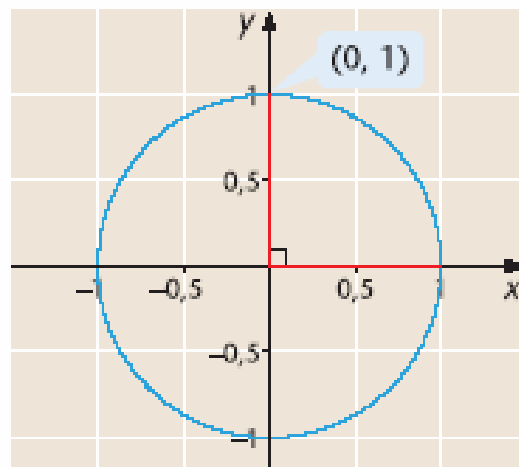
Määritä yksikköympyrän avulla

a) $\sin \frac{\pi}{2}$

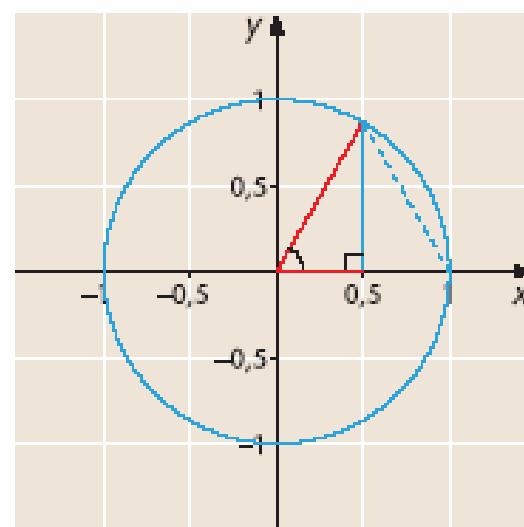
b) $\sin \frac{\pi}{3}$

c) $\sin \frac{2\pi}{3}$.

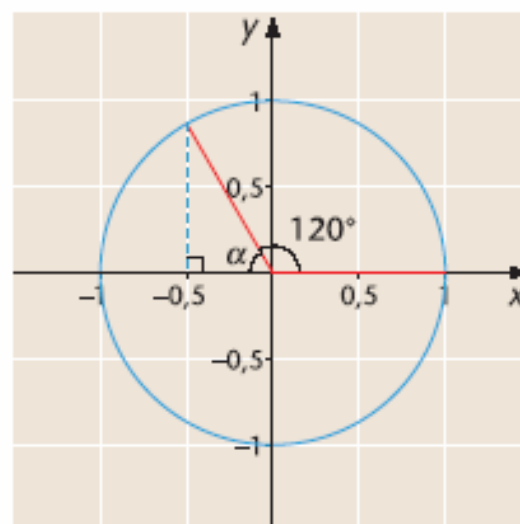
a) Muutetaan ensin kulma asteiksi:



b) Muutetaan ensin kulma asteiksi:



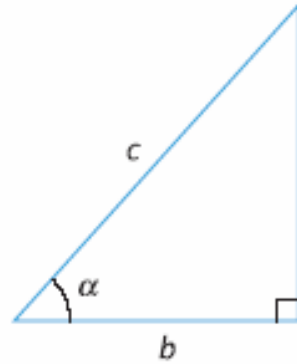
c) Muutetaan ensin kulma asteiksi:



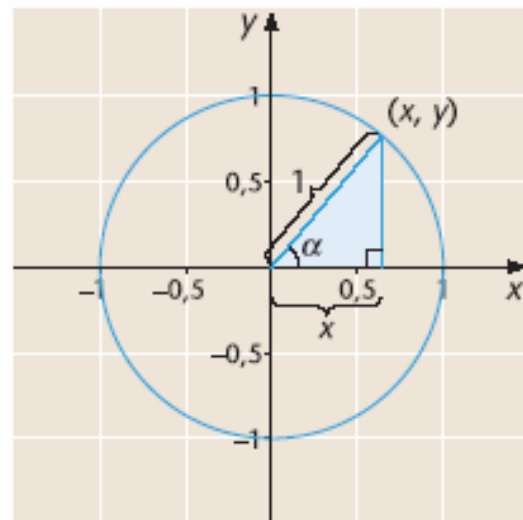


Kosini

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$



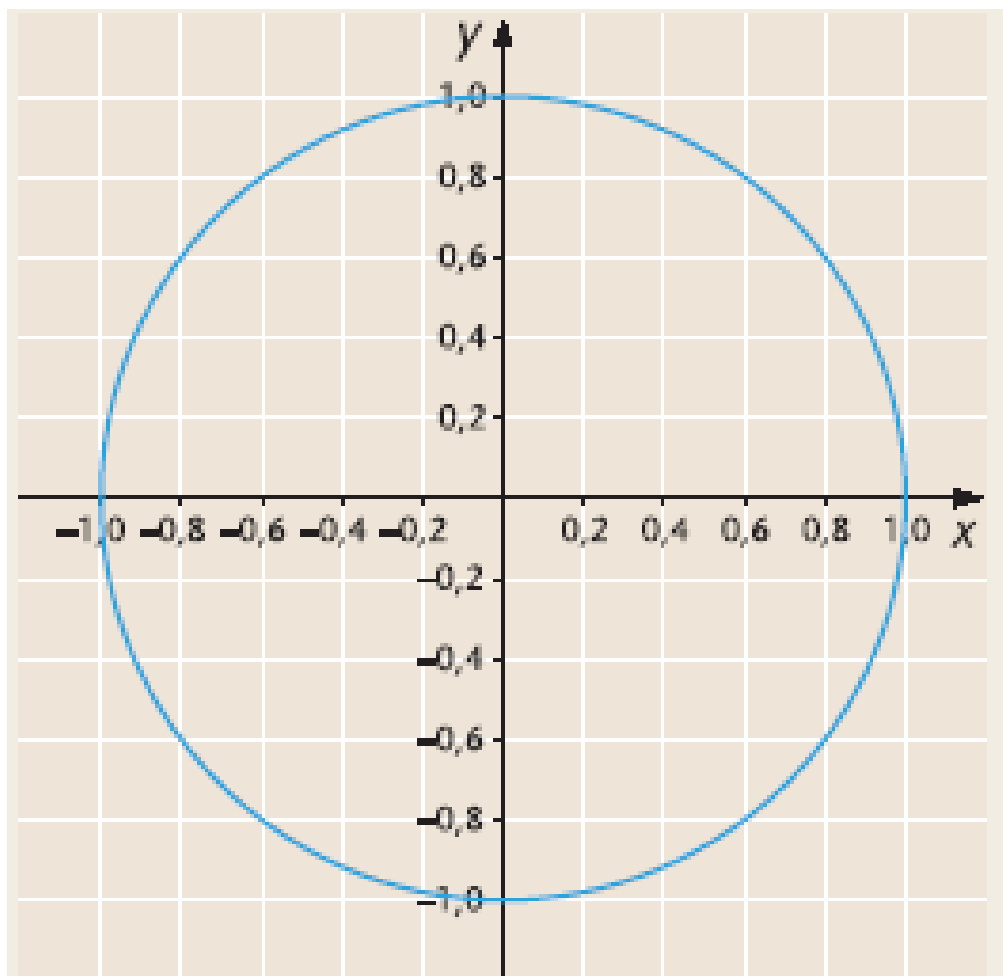
$$\cos \alpha =$$





Esimerkki

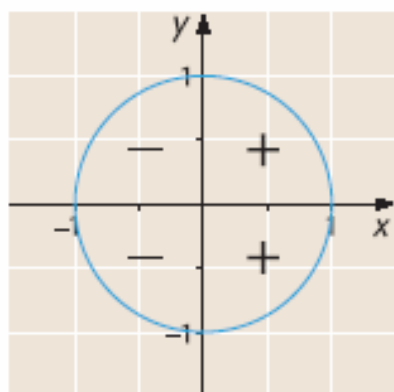
Piirrä yksikköympyrään seuraavat kulmat ja päättele kuvan perusteella kulmien kosinin arvo yhden desimaalin tarkkuudella.



Kulma	Kosini
45°	
90°	
120°	
180°	
200°	
300°	

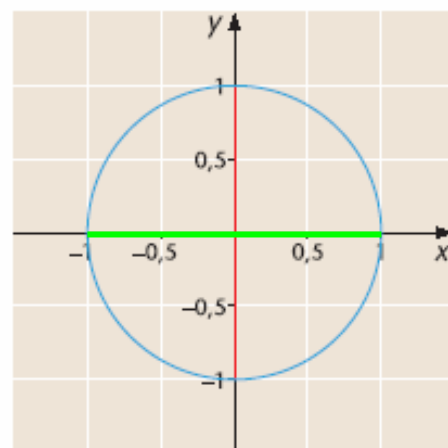
Kosinin arvo eri neljänneksissä

Kosinin arvo = kehäpisteen x-koordinaatti



Neljännes	Kulma	Kosinin arvo
I	25°	$\cos 25^\circ \approx 0,91$
II	100°	$\cos 100^\circ \approx -0,17$
III	190°	$\cos 190^\circ \approx -0,98$
IV	280°	$\cos 280^\circ \approx 0,17$

Kosinin arvo vaihtelee välillä $[-1, 1]$.

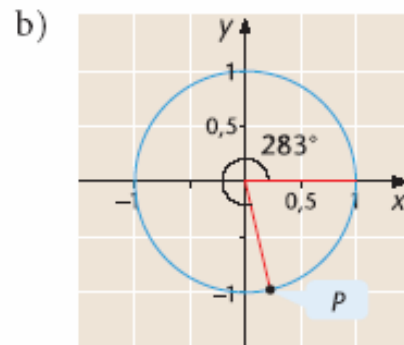
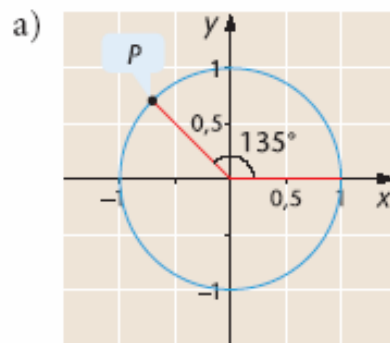




Esimerkki (oppikirja s. 20)

ESIMERKKI 2

Laske pisteen P koordinaatit kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.



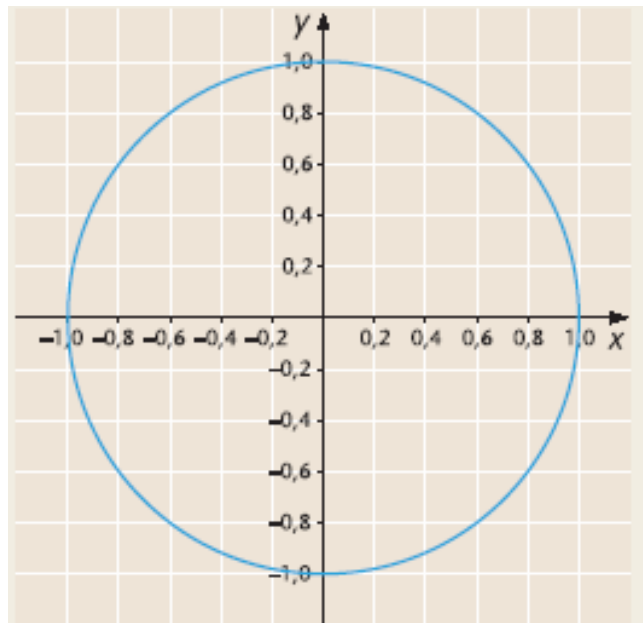


Yksikköympyrä ja kosinin arvo

Laske laskimella $\cos 60^\circ$.

$$\cos 60^\circ =$$

Piirrä tämän tiedon perusteella yksikköympyrään 60° kulma.



Peilataan 60° kulma x -akselin suhteen. Muodostunut kulma on -60° , koska kiertosuunta on myötäpäivään. Piirrä yksikköympyrään kulma -60° .

Huom! Kulma -60° tarkoittaa kulmaa $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$, kun kiertosuunta on vastapäivään.

Määritä yksikköympyrän avulla $\cos(-60^\circ)$.

Mitä siis on $\cos 300^\circ$?

Piirrä yksikköympyrään 120° kulma, kun $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Määritä yksikköympyrän avulla $\cos 120^\circ$.

Piirrä yksikköympyrään 240° kulma, kun $180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$.

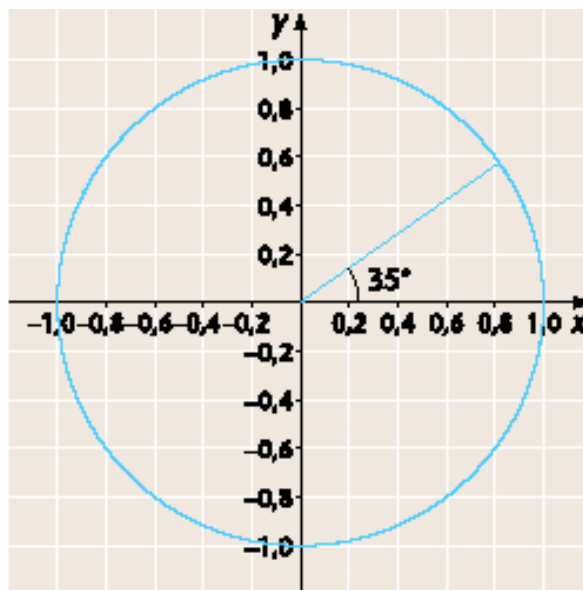
Määritä yksikköympyrän avulla $\cos 240^\circ$.

Esimerkki

Määritä yksikköympyrän avulla

- a) $\cos 35^\circ$
- b) $\cos (-35^\circ)$
- c) $\cos 145^\circ$
- d) $\cos 325^\circ$.

Anna vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella.



Taulukkokirjasta löytyy joidenkin kulmien trigonometrinen funktioiden tarkkoja arvoja. Täydennä taulukko.

Kulma	Kosinin tarkka arvo
π	
45°	
150°	
$4\pi/3$	
330°	
2π	



Tangentti

Suorakulmainen kolmio

Tangentti on vastaisen kateetin suhde viereiseen.

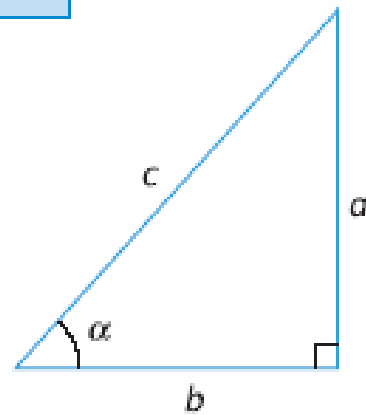
$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{b}{c} & | \cdot c \\ b &= c \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} & | \cdot c \\ a &= c \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{a}{b} \\ \tan \alpha &= \frac{c \cdot \sin \alpha}{c \cdot \cos \alpha} \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned}$$





Tangentti

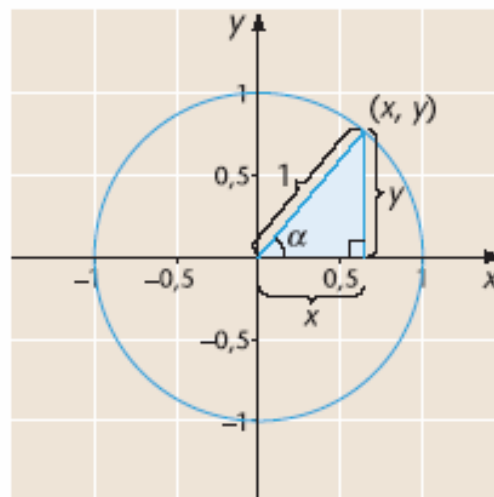
Tangentti voidaan määritellä samalla tavalla myös yksikköympyrässä:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\sin \alpha = y$$

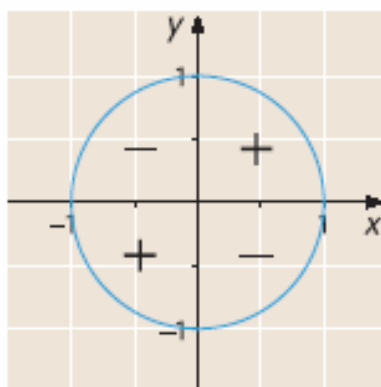
$$\cos \alpha = x$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



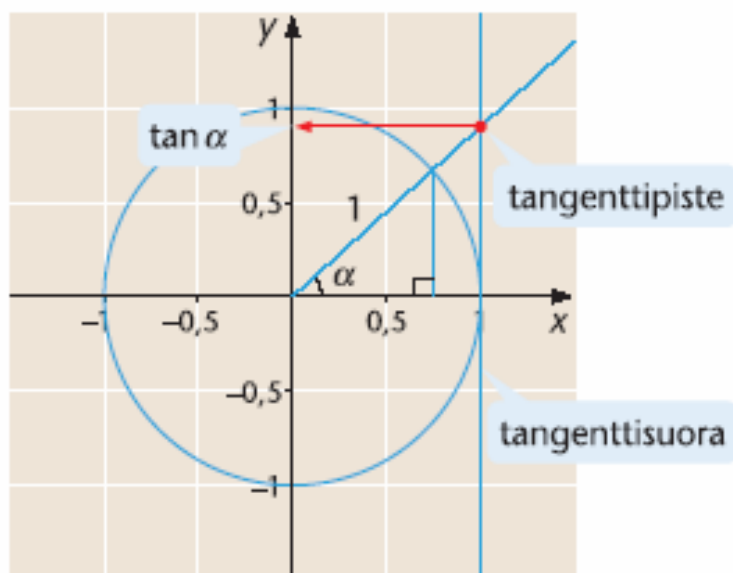
Tangentin arvo eri neljänneksissä

Neljännes	Sini	Kosini	$\frac{\sin}{\cosini} = \text{tangenti}$
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-





Tangenttisuora ja tangenttipiste



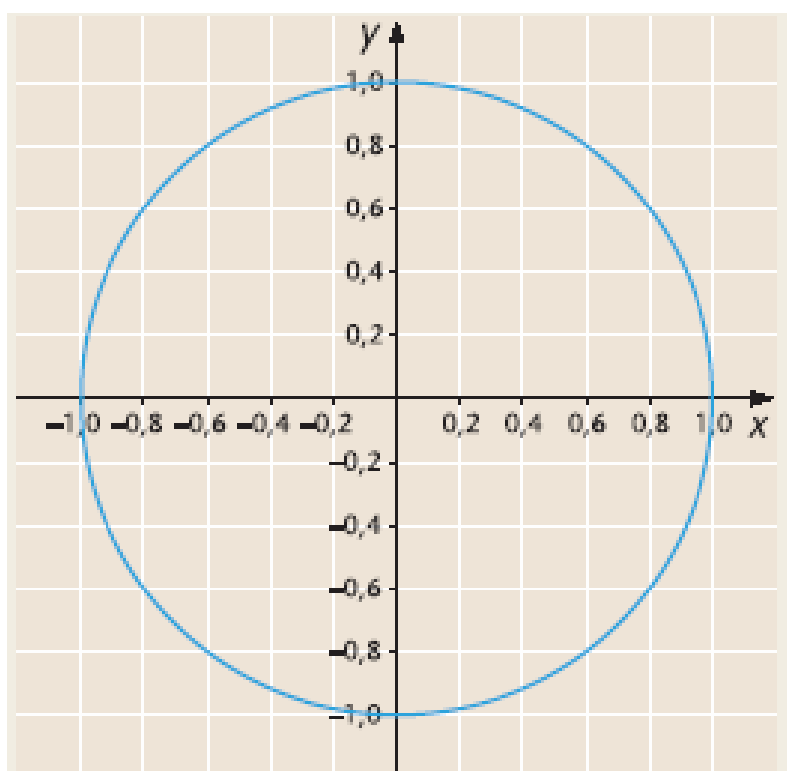
Esimerkki

Piirrä yksikköympyrään 30 asteen kulma.

Määritä tangenttisuoran avulla kahden desimaalin tarkkuudella

$$\tan 30^\circ$$

$$\tan 210^\circ$$



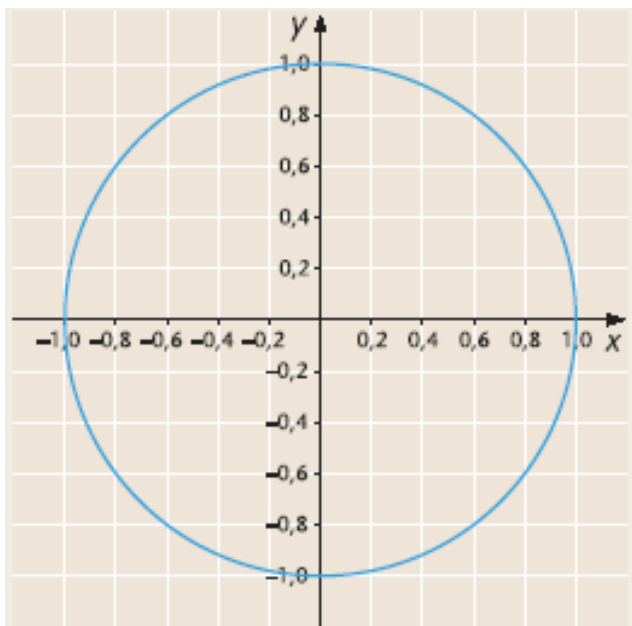


Yksikköympyrä ja tangentin arvo

Laske laskimella, mitä on $\tan 30^\circ$.

$$\tan 30^\circ =$$

Piirrä tämän tiedon perusteella yksikköympyrään 30° kulma.



$$30^\circ + 180^\circ = 210^\circ$$

Piirrä tämän perusteella yksikköympyrään 210° kulma.

Määritä tangenttisuoran avulla $\tan 210^\circ$.

Esimerkki 1:

Määritä tangenttisuoran avulla

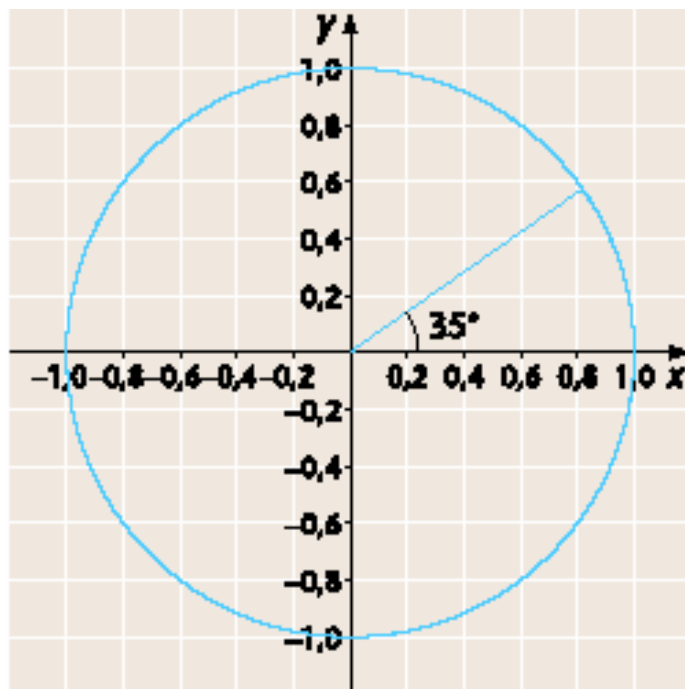
- $\tan 0^\circ =$
- $\tan 90^\circ =$
- $\tan 270^\circ =$
- $\tan 360^\circ =$

Esimerkki 2:

Määritä kuvan avulla

- a) $\tan 35^\circ$
- b) $\tan (-35^\circ)$
- c) $\tan 215^\circ$
- d) $\tan 395^\circ$.

Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



Taulukkokirjasta löytyy joidenkin kulmien trigonometrinen tarkkoja arvoja. Täydennä taulukko.

Kulma	Tangentin tarkka arvo
π	
45°	
150°	
$4\pi/3$	
330°	
2π	



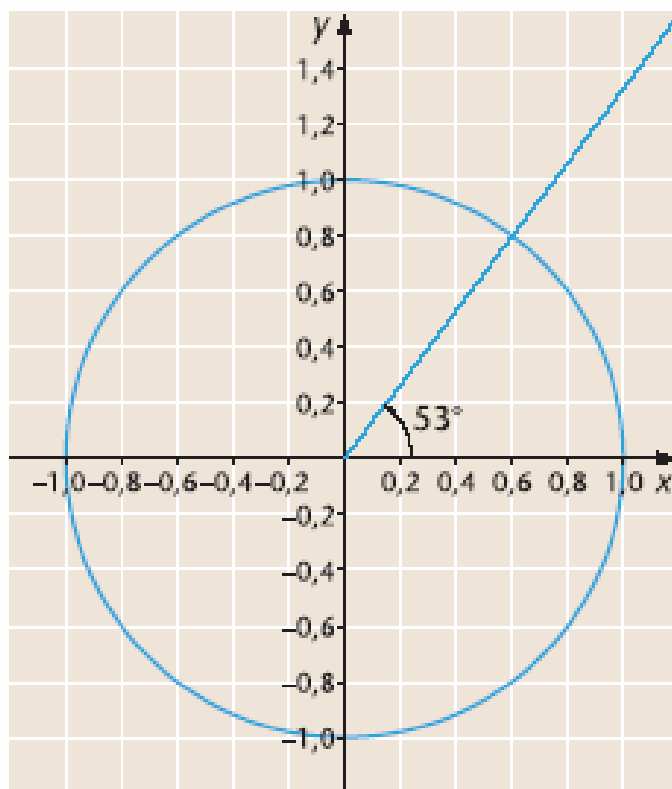
Esimerkki (oppikirja s. 54)

ESIMERKKI 4

Määritä kuvan avulla

- a) $\sin 53^\circ$
- b) $\cos 53^\circ$
- c) $\tan 53^\circ$.

Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.





Sinin, kosinin ja tangentin arvon laskeminen

Määritä laskimen avulla.

1.

- a) $\sin 25^\circ$
- b) $\sin 2,7$
- c) $\sin 190^\circ$
- d) $\sin 4,3$

2.

- a) $\cos 25^\circ$
- b) $\cos 25$
- c) $\cos(-159^\circ)$
- d) $\cos 5,6$

3.

- a) $\tan 36^\circ$
- b) $\tan 36$
- c) $\tan 215^\circ$
- d) $\tan(-4,5)$

Vastaukset:

- | | | | |
|-----------------|-------------|--------------|--------------|
| 1. a) 0,4226... | b) 0,427... | c) -0,173... | d) -0,916... |
| 2. a) 0,906... | b) 0,991... | c) -0,933... | d) 0,927... |
| 3. a) 0,726... | b) 7,75... | c) 0,700... | d) -4,637... |



Sini, kosini ja tangenti yksikköympyrässä

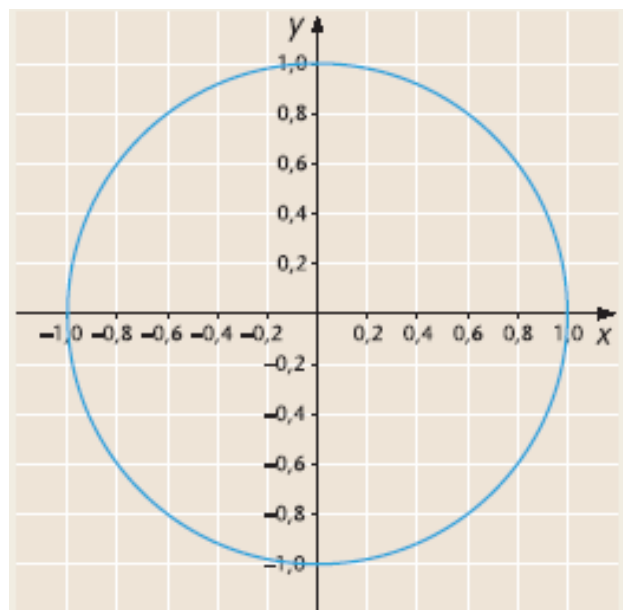
Trigonometrinen funktio	Arvon määrittäminen yksikköympyrässä	Merkit yksikköympyrässä
Sini	<p>Yksikköympyrässä sinin arvo on sama kuin kehäpisteen y-koordinaatti.</p> $\sin \alpha = y$	
Kosini	<p>Yksikköympyrässä kosinin arvo on sama kuin kehäpisteen x-koordinaatti.</p> $\cos \alpha = x$	
Tangentti	<p>Tangentin arvo voidaan määrittää yksikköympyrässä kehäpisteiden koordinaattien eli sinin ja kosinin arvojen avulla.</p> $\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	



Testi: Sini, kosini ja tangentti

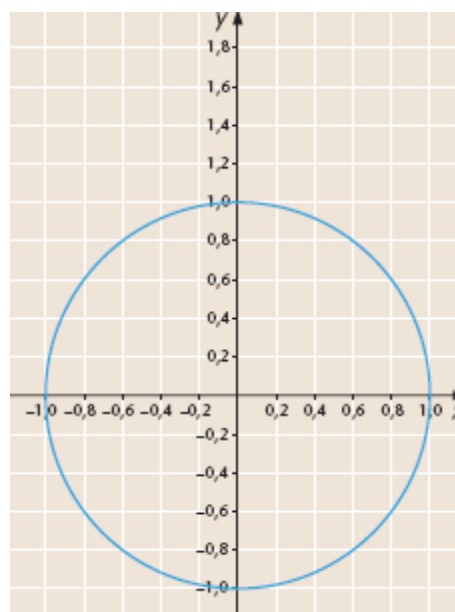
1. Määritä yksikköympyrän avulla graafisesti (yhden desimaalin tarkkuudella)

- a) $\sin 70^\circ$
- b) $\cos 70^\circ$
- c) $\sin 210^\circ$
- d) $\cos 210^\circ$.



2. Määritä graafisesti (yhden desimaalin tarkkuudella)

- a) $\tan 60^\circ$
- b) $\tan 160^\circ$.



3. Määritä taulukkokirjan avulla tarkat arvot lausekkeille

- a) $\tan \frac{\pi}{3}$
- b) $\sin \frac{7\pi}{10}$
- c) $\cos \frac{11\pi}{6}$.

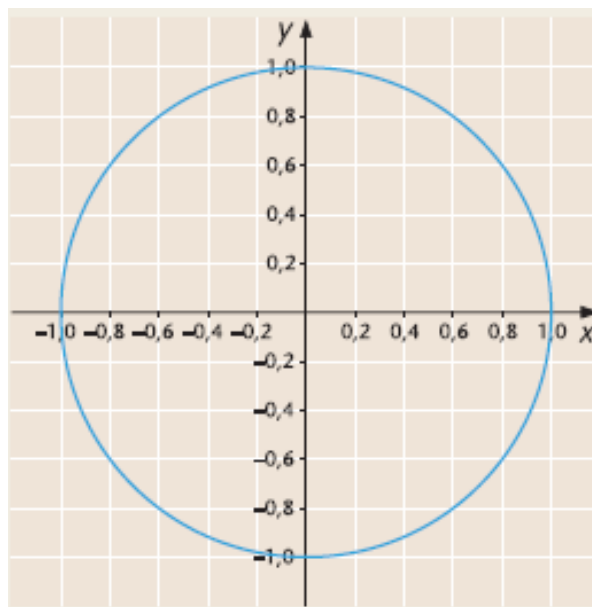


Siniyhtälö

Pohdinta 1

Välillä $[0^\circ, 360^\circ]$ on kaksi sellaista kulmaa, joiden sini on 0,6. Piirrä kulmat ja mittaa ne astemitalla.

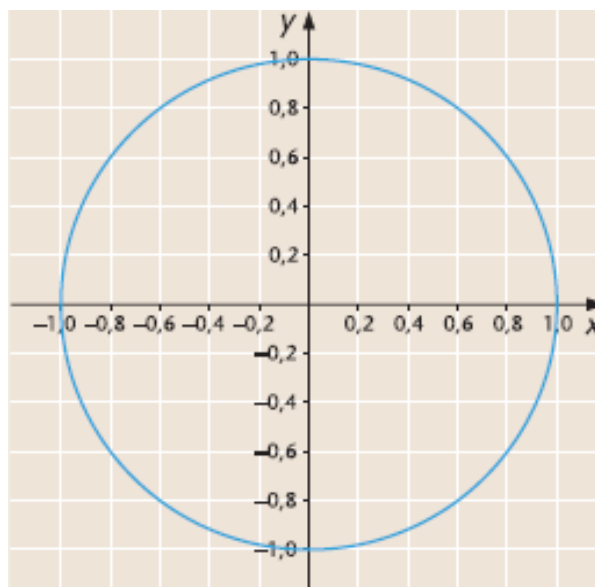
Mikä yhteys näiden kulmien välillä näyttäisi olevan?



Pohdinta 2

Välillä $[0^\circ, 360^\circ]$ on kaksi sellaista kulmaa, joiden sini on $-0,8$. Piirrä kulmat ja mittaa ne astemitalla.

Mikä yhteys näiden kulmien välillä näyttäisi olevan?

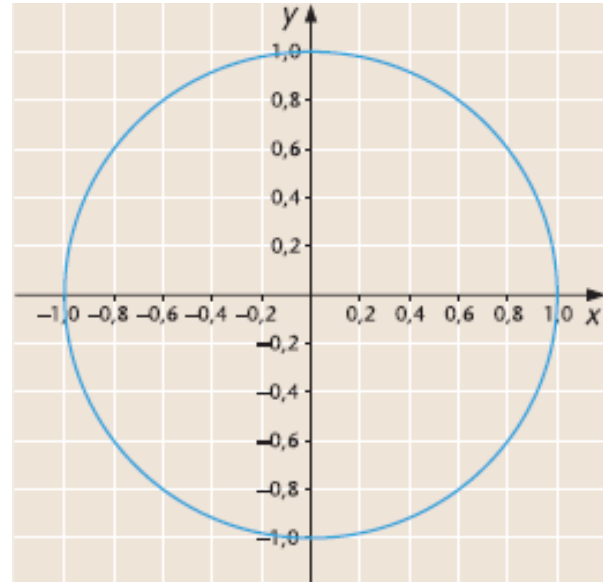




Kulman ratkaiseminen graafisesti

1) Piirrä ensimmäiseen neljännekseen sellainen kulma, jonka sinin arvo on 0,7. Mittaa kulman suuruus asteina.

2) Myös toisesta neljänneksestä löytyy kulma, jonka sini on 0,7. Piirrä kulma ja mittaa kulman suuruus asteina.



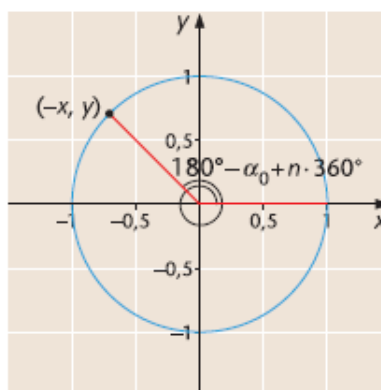
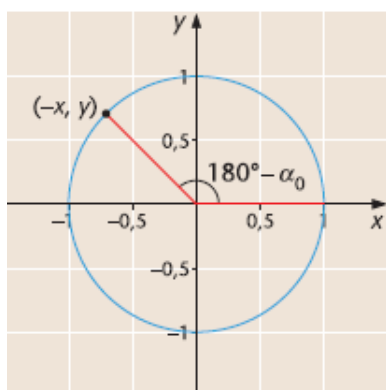
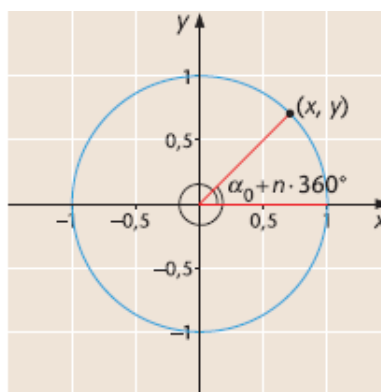
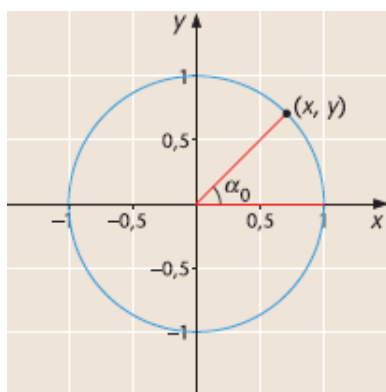
3) Mieti, millä muilla kulmilla voi sinin arvo olla 0,7. Anna esimerkkejä tällaisista kulmista.

4) Miten kaikki kulmat, joiden sini on 0,7, voitaisiin esittää mahdollisimman yksinkertaisella tavalla?



Siniyhtälön ratkaiseminen

- Tarkastellaan sellaista alle 90° kulmaa α_0 , jonka sinin arvo on y eli $\sin \alpha_0 = y$.
- Sama sinin arvo y on myös kulmilla $\alpha_0 + 360^\circ$, $\alpha_0 + 2 \cdot 360^\circ$ jne. sekä kulmilla $180^\circ - \alpha_0$, $180^\circ - \alpha_0 + 360^\circ$, $180^\circ - \alpha_0 + 2 \cdot 360^\circ$ jne.



Siniyhtälön $\sin \alpha = y$ ratkaisu:

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360^\circ \text{ tai } \alpha = 180^\circ - \alpha_0 + n \cdot 360^\circ,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



Esimerkki 1

Ratkaise yhtälö $\sin x = 0,15$ asteen tarkkuudella.

Ratkaisu:

Esimerkki 2

Ratkaise yhtälö $\sin x = 0,15$ radiaaneina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu:

Esimerkki 3

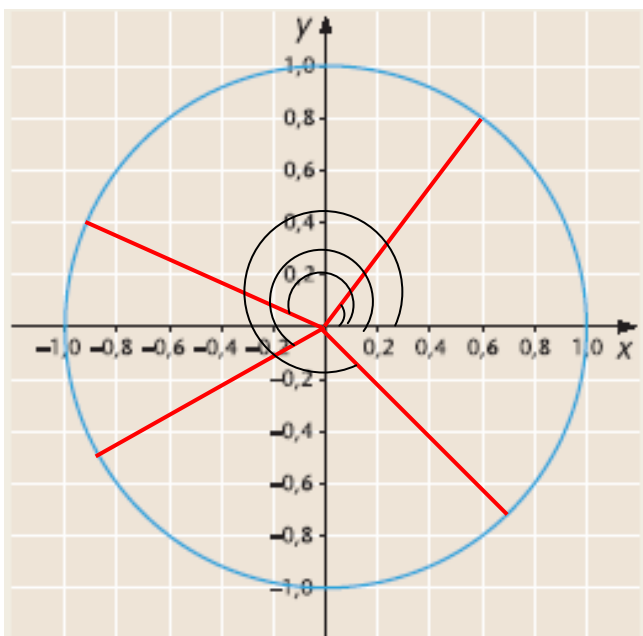
Ratkaise yhtälön $\sin 2x = 0,761$ juurista ne, jotka ovat välillä $[0, \pi]$.

Ratkaisu:



Kulman laskeminen yksikköympyrän avulla

Lue kuvasta tarvittavat tiedot ja määritä **laskimella** kulman suuruus.



Kulman suuruus asteen tarkkuudella	Kulman suuruus radiaaneina kahden desimaalin tarkkuudella



Siniyhtälö sovellustehtävissä

Esimerkki 5 (oppikirja s. 39)

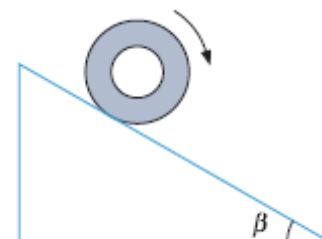
Teräsputki pyörii alas ramppia kuvan mukaisesti. Kappaleen kiihtyvyys a riippuu rampin kallistuskulmasta β yhtälön

$$a = \frac{1}{2} g \sin \beta$$

mukaisesti, jossa $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Määritä kulma β , kun putken kiihtyvyys

rampilla on $2,45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Ratkaisu:



**Testi: Siniyhtälö**

1. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella.

$$\sin x = 0,32$$

2. Ratkaise yhtälö radiaaneina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

$$2 \sin \beta - 0,40 = 0$$

3. Ratkaise yhtälö ilman likiarvoja taulukkokirjan avulla.

$$\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

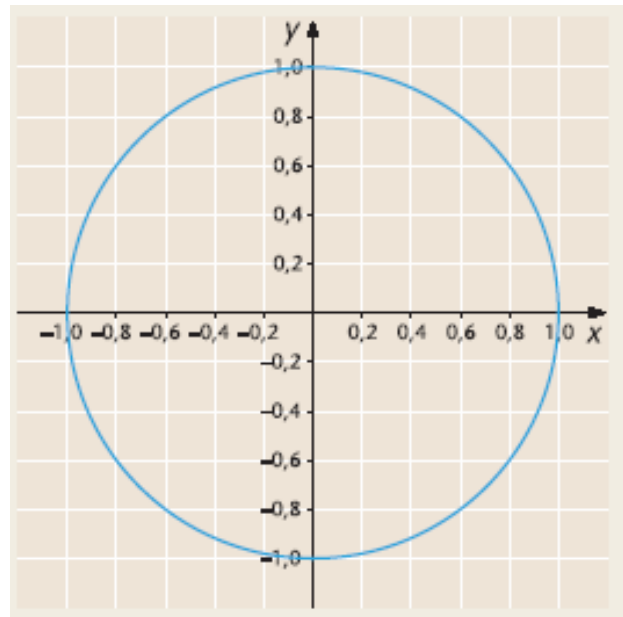


Kosini- ja tangenttiyhtälöt

Pohdinta 1

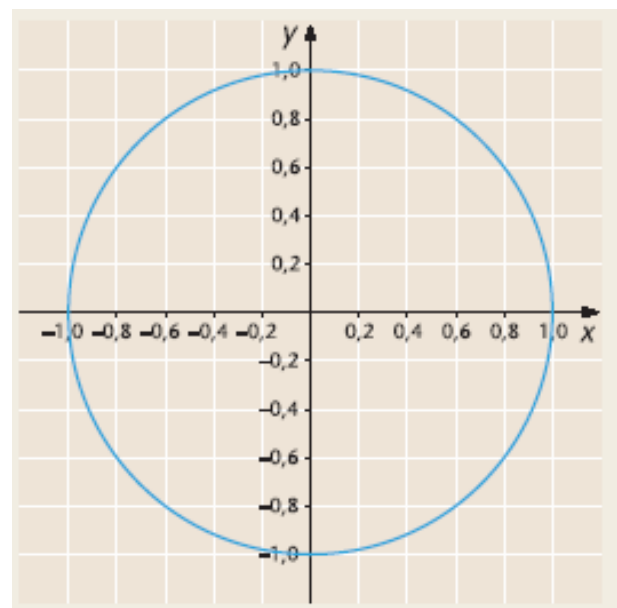
Väliltä $[0^\circ, 90^\circ]$ löytyy yksi kulma, jonka kosini on 0,5. Piirrä tämä kulma ja mittaa kulma astemitalla.

Etsi ainakin yksi kulma, jonka kosinilla on sama arvo kuin edellä. Piirrä kulma ja mittaa se.



Pohdinta 2

Etsi väliltä $[0^\circ, 360^\circ]$ kaksi kulmaa, joiden tangentin arvo on 0,6. Piirrä kulmat ja mittaa ne. Millainen riippuvuus kulmien välillä näyttäisi olevan?

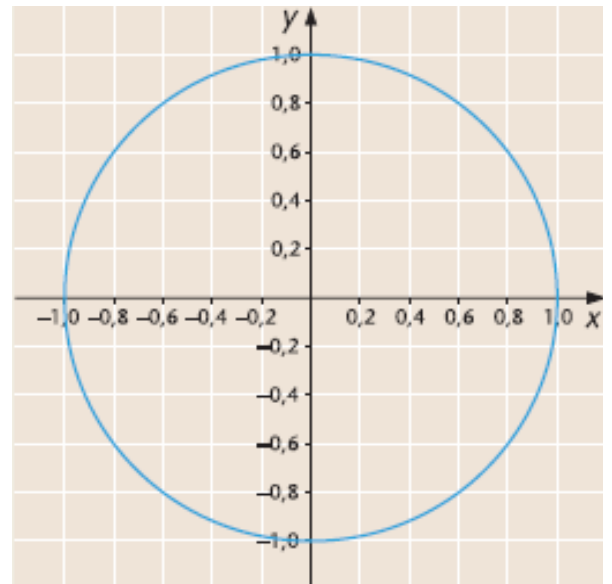




Kulman ratkaiseminen graafisesti

1) Piirrä ensimmäiseen neljännekseen sellainen kulma, jonka kosinin arvo on 0,7. Mittaa kulman suuruus asteina.

2) Myös neljännestä neljänneksestä löytyy kulma, jonka kosini on 0,7. Piirrä kulma ja mittaa kulman suuruus asteina.



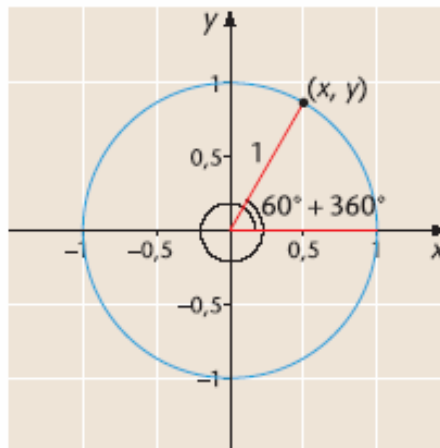
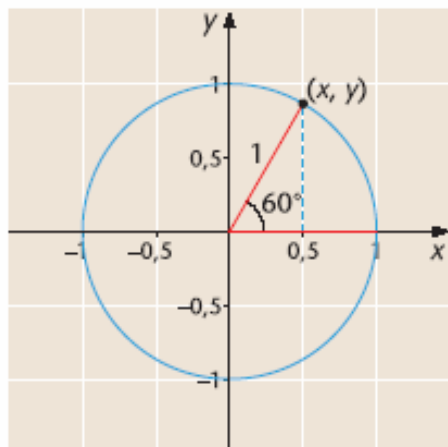
3) Mieti, millä muilla kulmilla kosinin arvo voi olla 0,7. Anna esimerkkejä tällaisista kulmista.

4) Miten kaikki kulmat, joiden kosini on 0,7, voitaisiin esittää mahdollisimman yksinkertaisella tavalla?

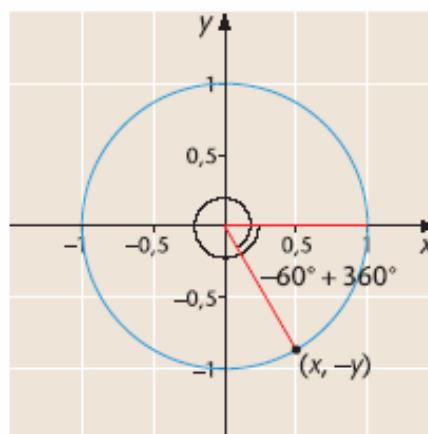
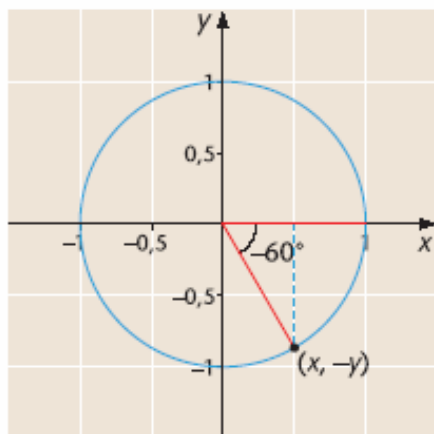


Kosiniyhtälö

1. Kosinin arvo toistuu aina 360 asteen välein.



2. x -akselin suhteen peilatulla kulmalla on sama kosinin arvo. Myös tämä toistuu 360 asteen välein.



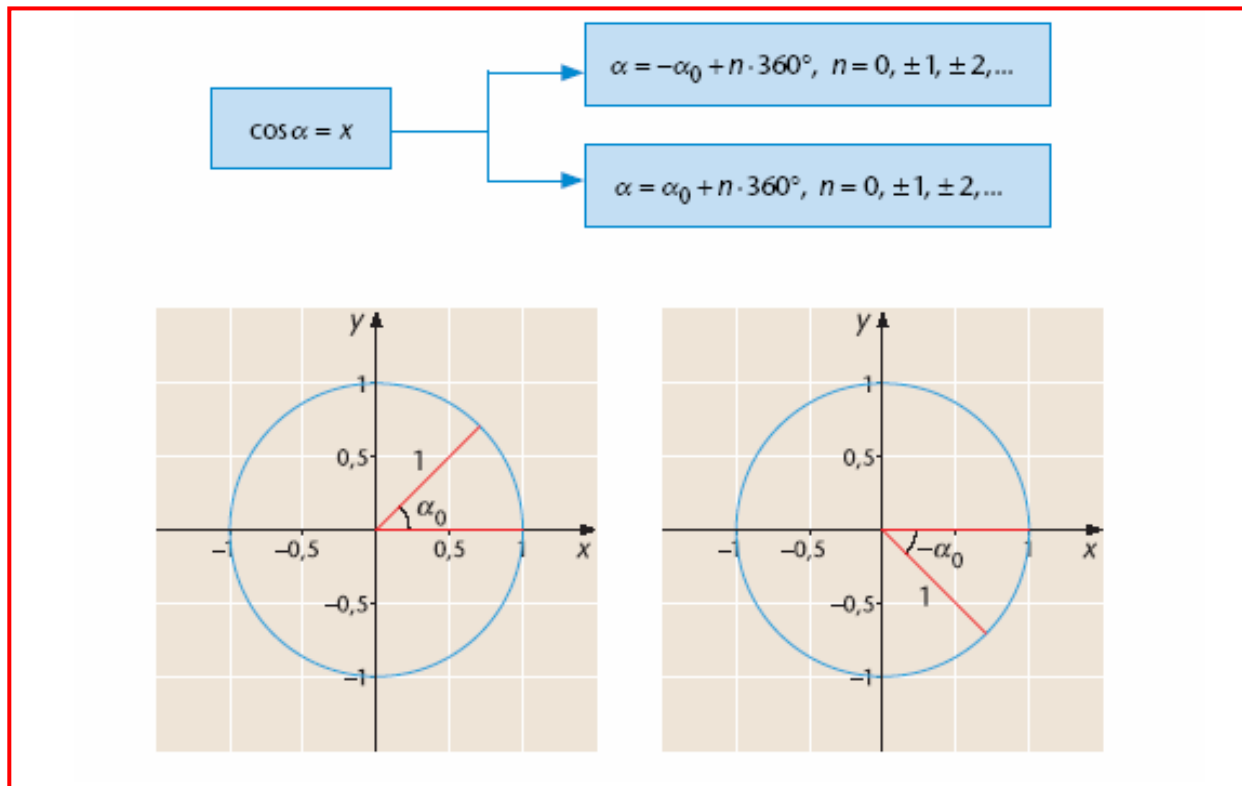
$$\cos \alpha = 0,5$$

$$\alpha = 60^\circ + n \cdot 360^\circ, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\alpha = -60^\circ + n \cdot 360^\circ, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Kosiniyhtälön ratkaiseminen



Esimerkki

Ratkaise yhtälö $\cos \alpha = 0,25$ asteina ja radiaaneina. Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

asteina

radiaaneina

Esimerkki

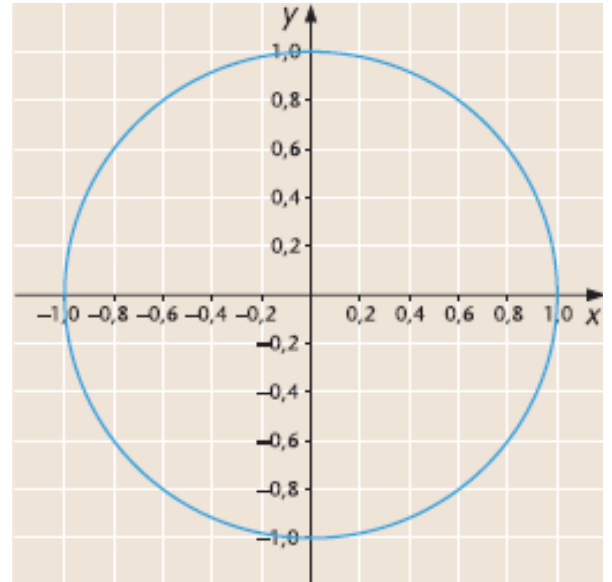
Ratkaise yhtälö $2\cos \alpha + 1 = 0$ taulukkokirjan avulla. Anna vastaus radiaaneina ja tarkkana arvona.



Kulman ratkaiseminen graafisesti

1) Piirrä ensimmäiseen neljännekseen sellainen kulma, jonka tangentin arvo on 0,7. Mittaa kulman suuruus asteina.

2) Myös kolmannelle neljännekselle löytyy kulma, jonka tangentti on 0,7. Piirrä kulma ja mittaa kulman suuruus asteina.



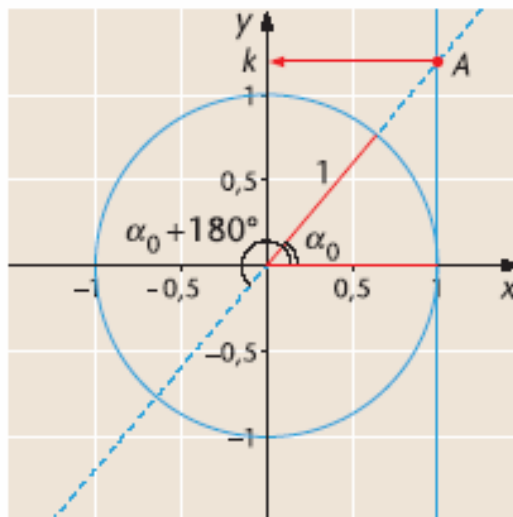
3) Mieti, millä muilla kulmilla tangentin arvo voi olla 0,7. Anna esimerkkejä tällaisista kulmista.

4) Miten kaikki kulmat, joiden tangentti on 0,7, voitaisiin esittää mahdollisimman yksinkertaisella tavalla?



Tangenttiyhtälön ratkaiseminen

Tangentin arvo saadaan tangentsuoran avulla. Sama tangentin arvo toistuu 180 asteen välein.



$$\tan \alpha = k$$

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 180^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esimerkki

Ratkaise yhtälö $\tan \alpha = 1,2$ asteina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Esimerkki

Ratkaise taulukkokirjan avulla radiaaneina yhtälö $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$.



Sini, kosini ja tangentti taulukkokirjan avulla

1. Ratkaise taulukkokirjan avulla

a) $\sin 45^\circ$

b) $\cos 30^\circ$

c) $\tan 210^\circ$

d) $\sin \frac{4}{3}\pi$

e) $\cos \frac{5\pi}{6}$

f) $\tan \frac{5\pi}{3}$.

2. Ratkaise taulukkokirjan avulla ne ratkaisut, jotka kuuluvat välille $[0, 2\pi]$.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\tan \varphi = \sqrt{3}$

d) $\cos \beta - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Vastaukset:

1. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $-\sqrt{3}$

2. a) $x = \frac{\pi}{6}$ tai $x = \frac{5\pi}{6}$ b) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ tai $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

c) $\varphi = \frac{\pi}{3}$ tai $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ d) $\beta = \frac{\pi}{6}$ tai $\beta = \frac{11\pi}{6}$



Yhteenvedo trigonometrinen yhtälöiden ratkaisemisesta

SINIYHTÄLÖ $\sin \alpha = y$

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad \alpha = 180^\circ - \alpha_0 + n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esimerkki: Ratkaise $\sin \alpha = 0,5$

$$\alpha = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad \alpha = \underbrace{180^\circ - 30^\circ}_{150^\circ} + n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

KOSINIYHTÄLÖ $\cos \alpha = x$

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad \alpha = -\alpha_0 + n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esimerkki: Ratkaise $\cos \alpha = 0,5$

$$\alpha = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad \alpha = \underbrace{-60^\circ}_{300^\circ} + n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

TANGENTTIYHTÄLÖ $\tan \alpha = k$

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 180^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esimerkki: Ratkaise $\tan \alpha = 0,5$.

$$\alpha = 26,5\dots^\circ + n \cdot 180^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Sini-, kosini- ja tangenttiyhtälöitä

1. Ratkaise yhtälö. Ilmoita vastaus asteina.

a) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sin 3x = \frac{1}{2}$

c) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\cos(-2x) = 0,6$

e) $\tan \beta = \sqrt{2} + 1$

f) $\tan(-x) = 0,5$

2. Ratkaise yhtälö. Ilmoita vastaus radiaaneina.

a) $4 \sin x = -2$

b) $\sin 2x - 3 = -2,2$

c) $-\frac{1}{3} \cos x = \frac{1}{5}$

d) $\cos(-x) + 2 = 3$

e) $-\tan x = -7$

f) $2 \tan 2\alpha - 3 = 5$

Vastaukset:

1. a) $x = 225^\circ + n \cdot 360^\circ$ tai $x = 315^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in Z$

b) $x = 10^\circ + n \cdot 120^\circ$ tai $x = 50^\circ + n \cdot 120^\circ, n \in Z$

c) $\alpha = \pm 45^\circ + n \cdot 120^\circ, n \in Z$

d) $x = 18,4\dots^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in Z$

e) $\beta = 67,5^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in Z$

f) $x = -26,56\dots^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in Z$

2. a) $x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi, n \in Z$

b) $x = 0,46\dots + n \cdot \pi$ tai $x = 1,107\dots + n \cdot \pi, n \in Z$

c) $x = \pm 2,21\dots + n \cdot 2\pi, n \in Z$

d) $x = n \cdot 2\pi, n \in Z$

e) $x = 1,428\dots + n \cdot \pi, n \in Z$

f) $\alpha = 0,662\dots + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in Z$



Testi: Kosini- ja tangenttiyhtälöt

1. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella.

$$\cos x = 0,24$$

2. Ratkaise yhtälö radiaaneina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

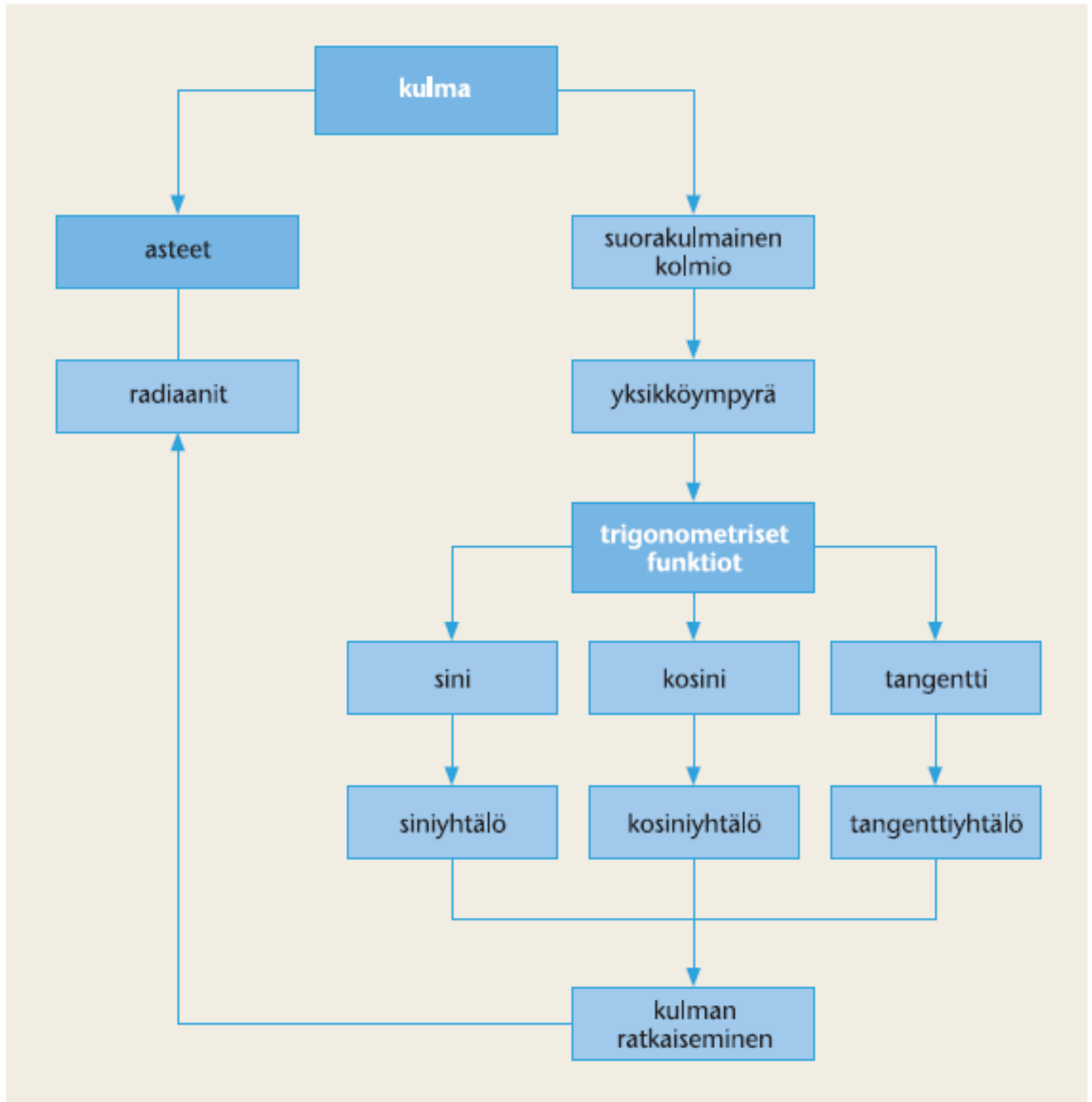
$$3 \tan \beta - 2,1 = 0$$

3. Ratkaise yhtälö ilman likiarvoja taulukkokirjan avulla.

$$\tan 2x = \sqrt{2} - 1$$



Keskeisiä käsitteitä trigonometriasta

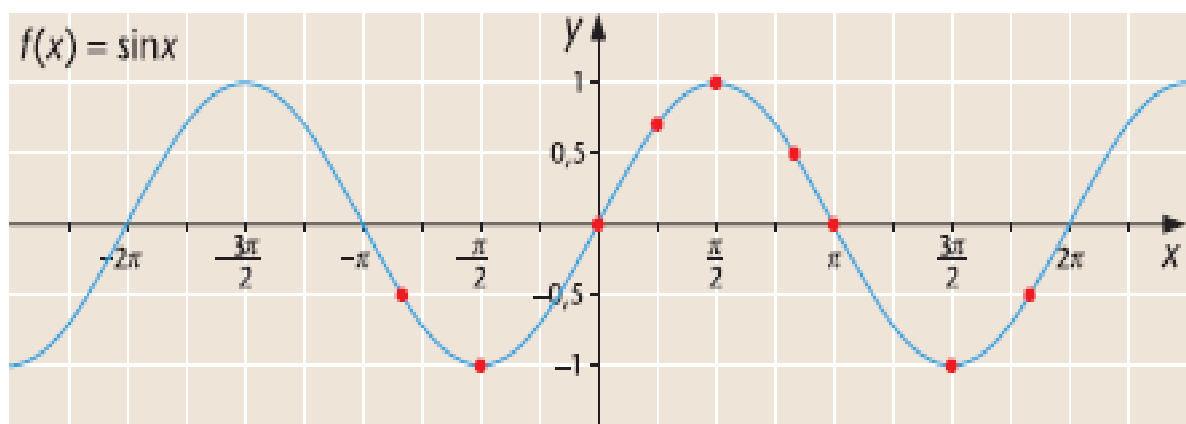




Funktio $f(x) = \sin x$

- Tutkitaan funktiota $f(x) = \sin x$ laskemalla ensin funktiolle muutamia arvoja.
- Piirretään arvojen avulla kuvaaja.
- Sinin arvot toistuvat määrätyn jakson välein, eli sini on **jaksollinen funktio**.
 - jaksona 2π
- Sinifunktio $f(x) = \sin x$ saa arvoja välillä $[-1, 1]$.

x	$f(x) = \sin x$
0	$f(0) = \sin 0 = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707\dots$
$\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$
$-\frac{\pi}{2}$	$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
$\frac{5\pi}{6}$	$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$
$-\frac{5\pi}{6}$	$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
π	$f(\pi) = \sin \pi = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$
$\frac{11\pi}{6}$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$





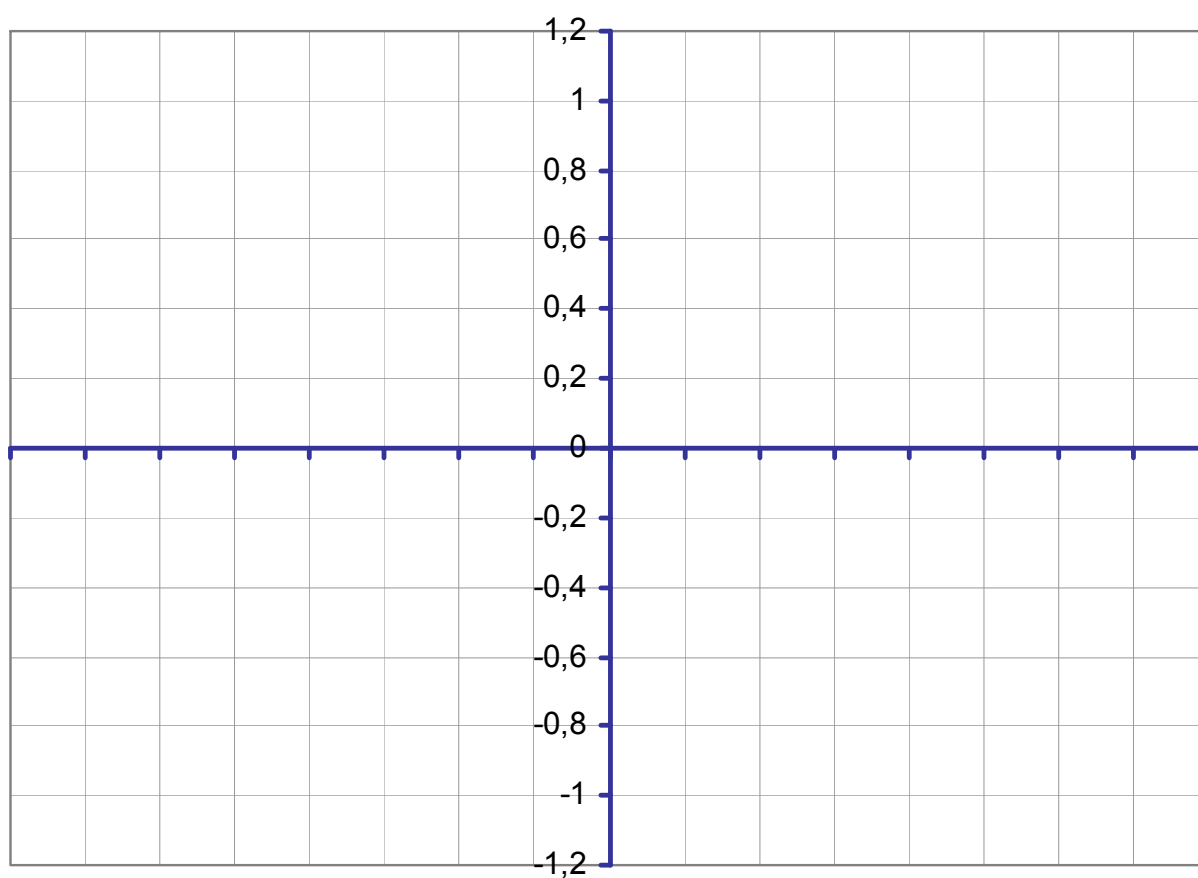
Funktio $f(x) = \cos x$

- Tutkitaan funktiota $f(x) = \cos x$ laskemalla ensin funktiolle muutamia arvoja:

x	$f(x) = \cos x$
0	
$\frac{\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{2}$	
$-\frac{\pi}{2}$	
$\frac{5\pi}{6}$	
$-\frac{5\pi}{6}$	
π	
$\frac{3\pi}{2}$	
$\frac{11\pi}{6}$	



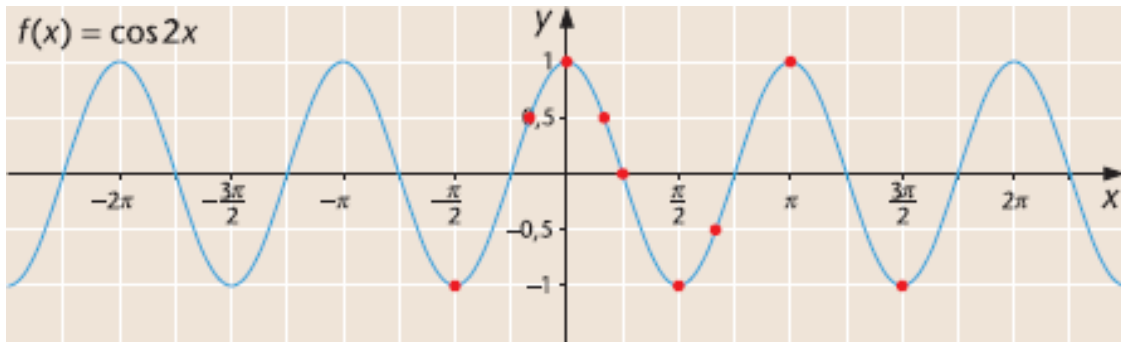
- Lisää arvoja voi etsiä vaikkapa taulukkokirjasta.
- Piirretään pisteiden avulla funktion kuvaaja.



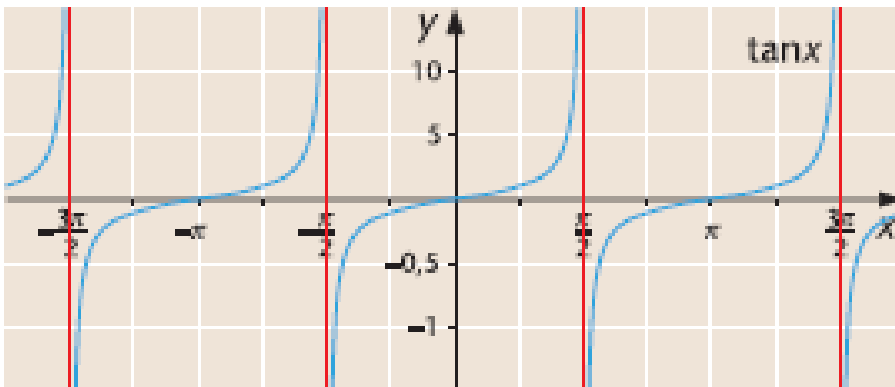


Muita trigonometrisia funktioita

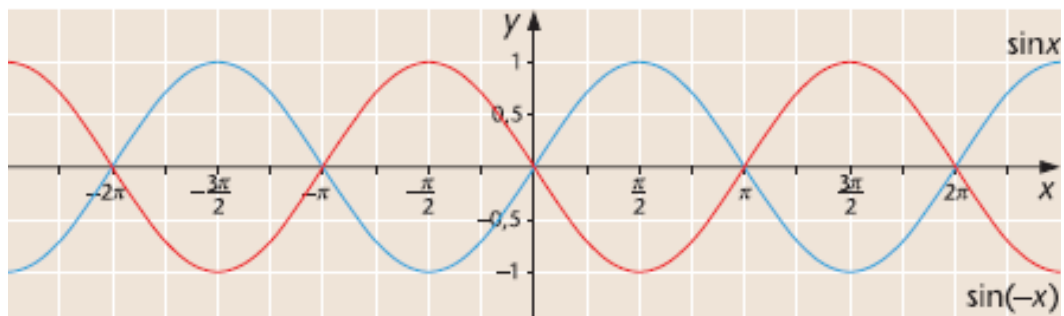
◆ $f(x) = \cos 2x$



◆ $f(x) = \tan x$



◆ $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \sin(-x)$



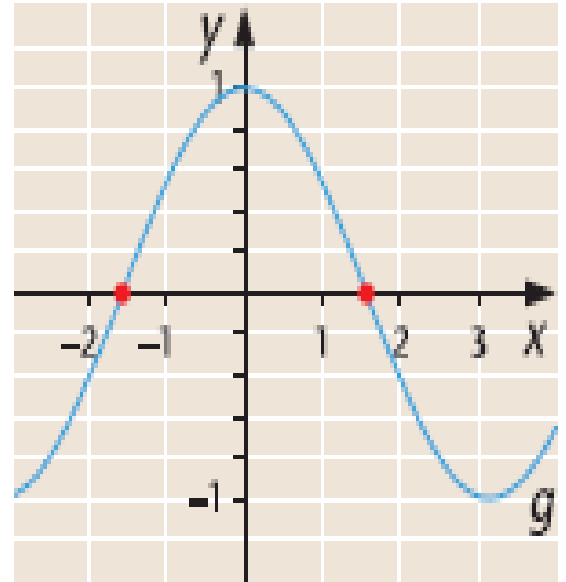


Nollakohtien määrittäminen graafisesti ja algebrallisesti

Esimerkki 1

Määritä kuvaajan avulla funktion g nollakohdat välillä $[-\pi, \pi]$. Anna nollakohdat yhden desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu:



Esimerkki 2

Määritä funktion $f(x) = 2\sin x - 0,3$ nollakohdat kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

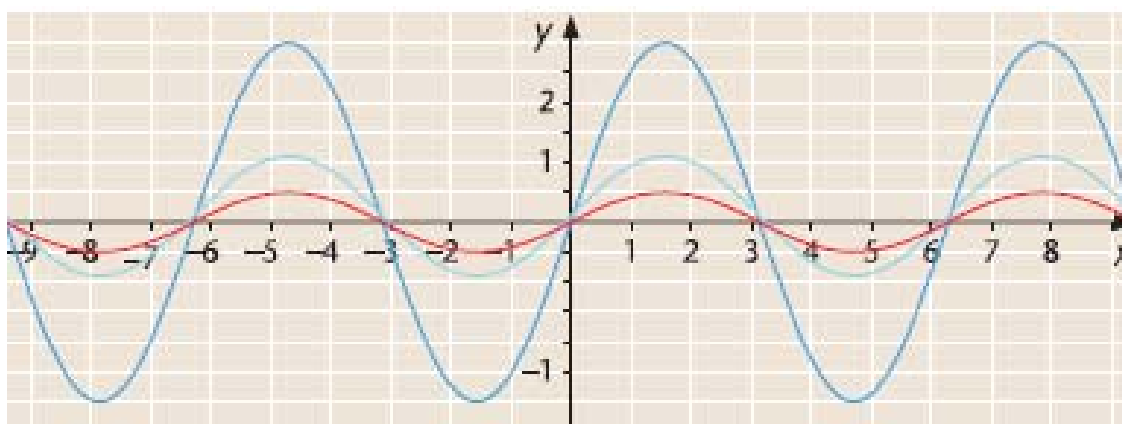


Joitakin tehtäviä oppikirjasta

Tehtävä 96

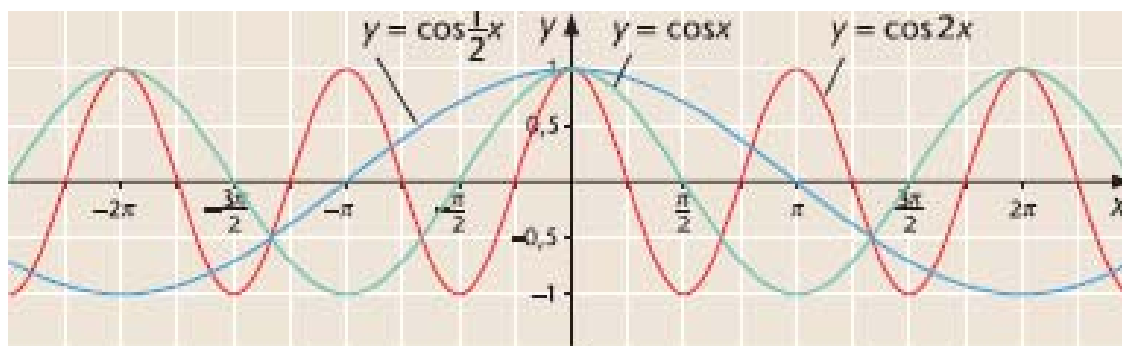
Kuvassa on esitetty funktioiden $f(x) = 0,5 \sin x$, $g(x) = \sin x$ ja $k(x) = 3 \sin x$ kuvaajat.

- Yhdistä funktio oikeaan kuvaajaan.
- Funktio g saa kaikki arvot välillä $[-1, 1]$. Määritä kahden muun funktion saamat arvot.



Tehtävä 97

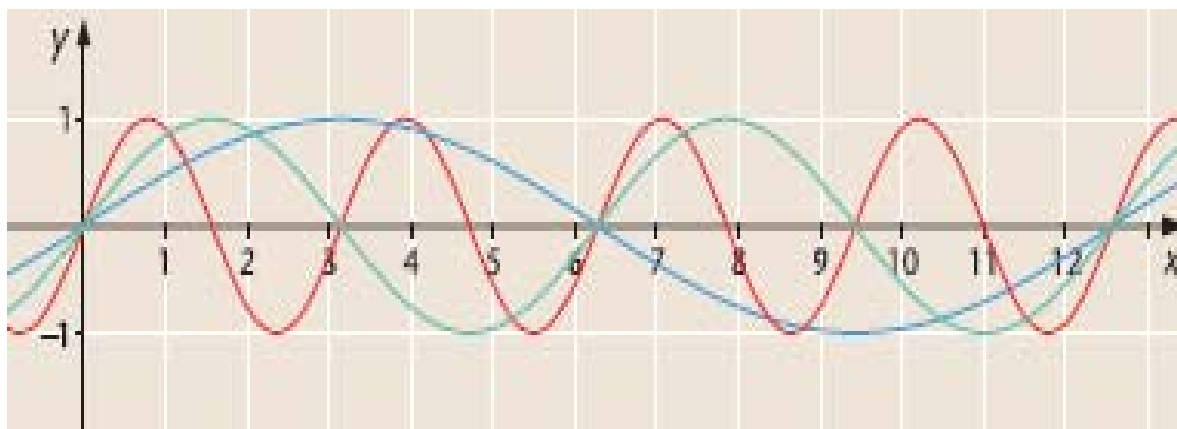
Kuvassa on esitetty funktioiden $\cos 0,5x$, $\cos x$ ja $\cos 2x$ kuvaajat. Päätele kuvien avulla funktioiden $\cos 0,5x$ ja $\cos 2x$ jaksosten pituus. Päätele edelleen funktion $\cos 4x$ jakson pituus.



**Tehtävä 101**

Kuvassa on esitetty funktion $f(x) = \sin kx$ kuvaajia, kun $k = 0,5$, $k = 1$ ja $k = 2$.

- Yhdistä k :n arvo ja oikea kuvaaja.
- Millainen vaikutus k :n arvolla on funktion f ?

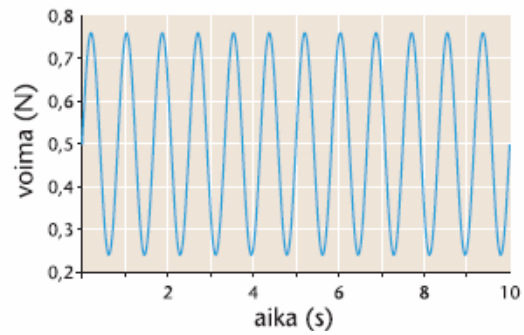




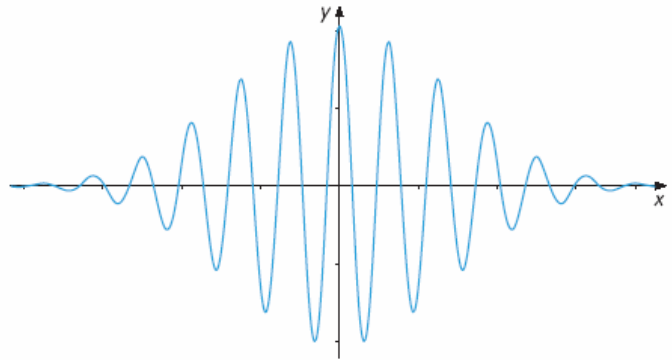
Sovelluksia

Trigonometrisilla funktioilla mallinnetaan jaksollisia ilmiöitä.

Harmoninen värähtely



Kvanttimekaniikka, aaltofunktio



Vuorovesi-ilmiö



Aaltoliike





Sovellustehtävän ratkaisu

1. Jos kysytään funktion arvoa, muista **katsoa, missä yksikössä kulmat on ilmoitettu** (asteet/radiaanit).
2. Suurimman/pienimmän arvon tutkimisessa käytä hyväksesi tietoa, että **sinin ja kosinin arvot ovat välillä $[-1, 1]$** .

Esimerkki

Yksittäisen aallon korkeutta senttimetreinä eräässä koetilanteessa kuvasi funktio

$$f(t) = 1,25\cos(3,2t + \pi/4), \text{ jossa}$$

t on aika sekunteina kokeen alusta lukien.

- a) Laske aallon korkeus, kun aikaa kokeen alusta on kulunut 1,4 sekuntia.
- b) Laske aallon suurin korkeus.
- c) Milloin aikavälillä $0 \leq t \leq 6,0$ s aalto on korkeimmillaan?

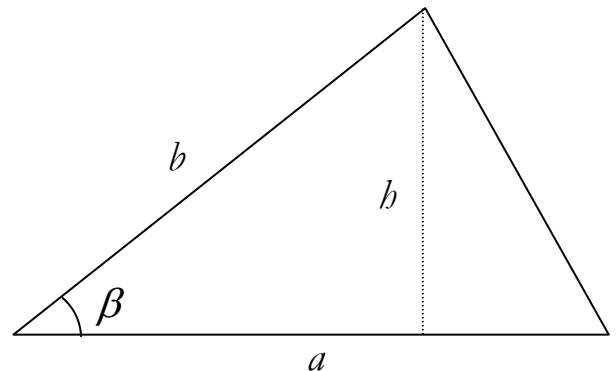
Ratkaisu



Kolmion ja suunnikkaan ala

Pohdinta 1

a) Mittaa viivoittimella kanta a ja korkeus b . Laske niiden avulla kolmion ala kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.



b) Mittaa sivujanan pituus b sekä kulma β . Sijoita mittaustulokset kaavaan

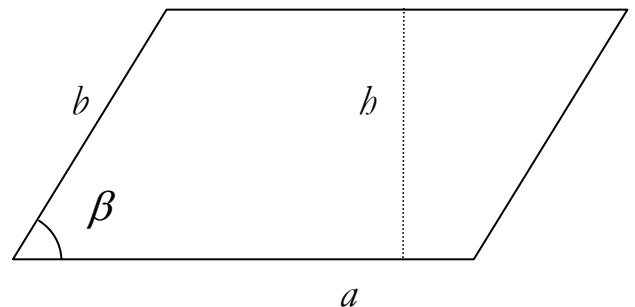
$$\frac{1}{2}ab \sin \beta.$$

Vertaa tätä tulosta kohdan a tulokseen.

Pohdinta 2

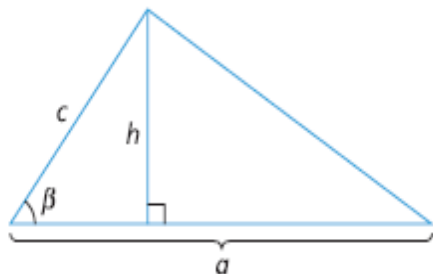
Laske suunnikkaan ala sopivien mittausten avulla. Mittaa lisäksi sivujanan pituus b sekä kulma β . Sijoita tulokset kaavaan

$$ab \sin \beta.$$



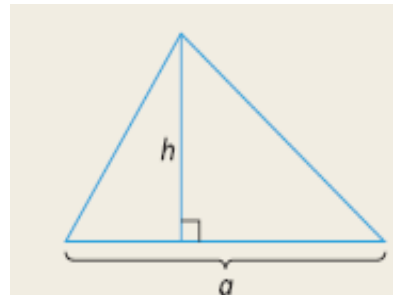


Kolmion ala



$$\sin \beta = \frac{h}{c}$$

$$h = c \sin \beta$$



Kolmion ala

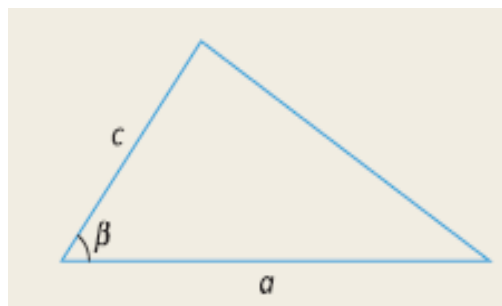
$$A = \frac{1}{2} ab$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot c \sin \beta$$

$$= \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

Kolmion ala

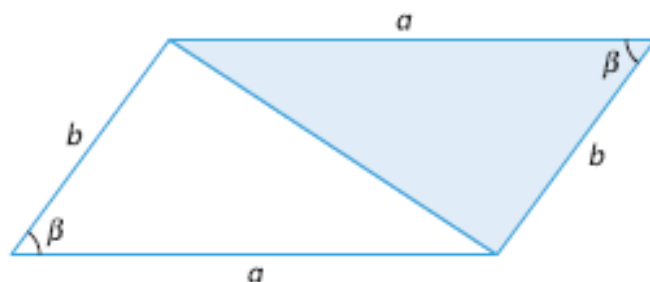
$$A = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$





Suunnikkaan ala

- ◆ Suunnikas voidaan jakaa lävistäjällä kahdeksi yhteneväksi kolmioksi.

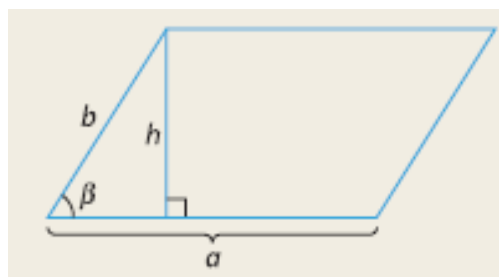


- ◆ Koska kolmion ala on puolet sen kahden sivun ja niiden välisen kulman sinin tulosta,

$$A_{\text{suunnikas}} = 2 \cdot A_{\text{kolmio}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab \sin \beta = ab \sin \beta$$

Suunnikkaan ala

$$A = ab \sin \beta$$



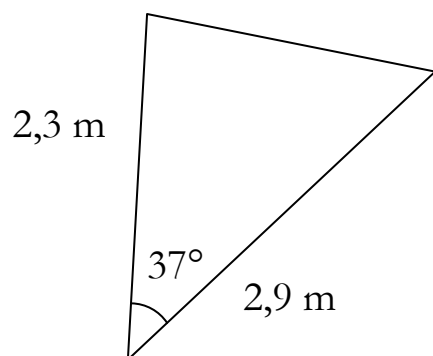


Alojen laskemista

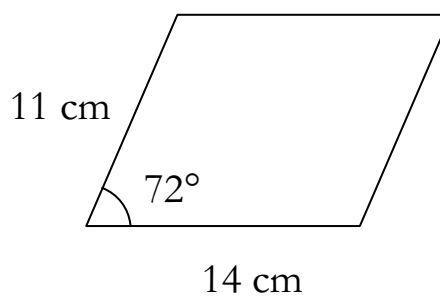
Esimerkki 1

Laske kuvioiden alat.

a)



b)



Ratkaisu:

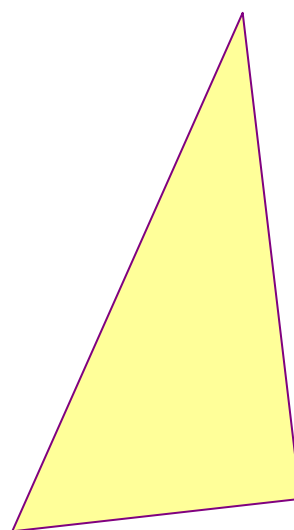


Kulman ratkaiseminen

Esimerkki

Kolmion kaksi sivua ovat 1,9 dm ja 0,85 dm. Kolmion ala on $0,80 \text{ dm}^2$. Laske annettujen sivujen välinen kulma.

Ratkaisu:

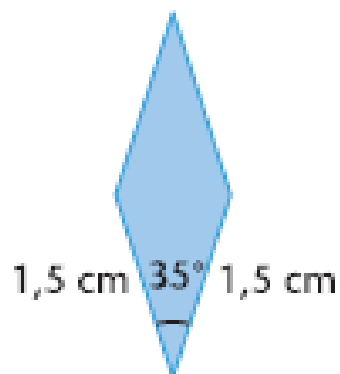
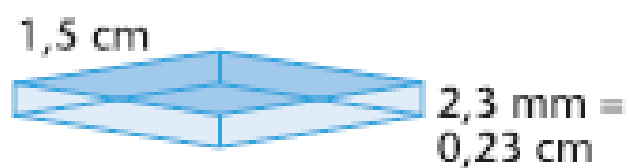




Oppikirjan esimerkki 2 (s. 79)

Salmiakkiruutu on muodoltaan suora särmiö, jonka pohjana on neljäkäs. Neljäkkään sivun pituus on 1,5 cm, ja sivujen välinen terävä kulma on 35° . Laske salmiakkiruudun tilavuus, kun ruudun paksuus on 2,3 mm.

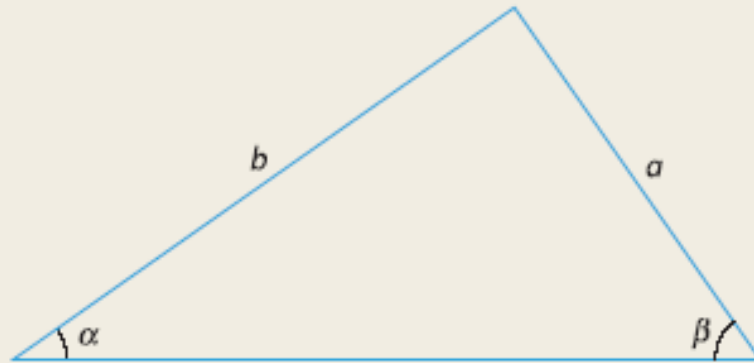
Ratkaisu:





Sinilause

POHDINTA 1 Mittaa kolmion sivujanat a ja b sekä kulmat α ja β .



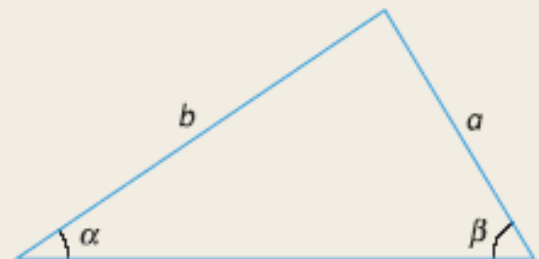
Laske mittaustulosten avulla suhteet $\frac{a}{\sin \alpha}$ ja $\frac{b}{\sin \beta}$.

$$\frac{a}{\sin \alpha} =$$

$$\frac{b}{\sin \beta} =$$

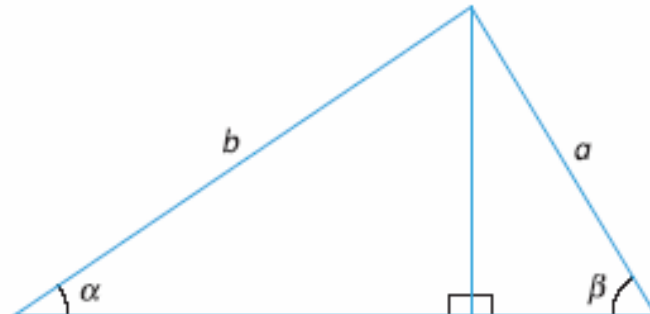
Mitä havaitset?

POHDINTA 2 Kuvan kolmiolle $a = 15$ cm, $\alpha = 34^\circ$ ja $\beta = 59^\circ$. Päättelä edellisen tehtävän avulla, miten pituus b saadaan laskettua, ja laske se kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.





Sinilauseen johtaminen



$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \quad | \cdot b$$

$$h = b \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{h}{a} \quad | \cdot a$$

$$h = a \sin \beta$$

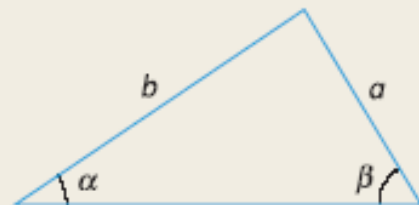
$$a \sin \beta = b \sin \alpha \quad | : \sin \alpha$$

$$\frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = b \quad | : \sin \beta$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

Sinilause

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

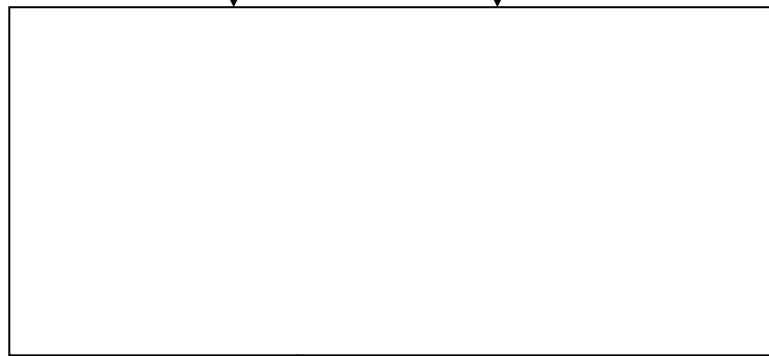
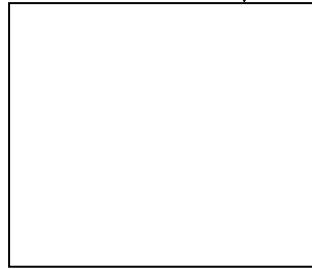
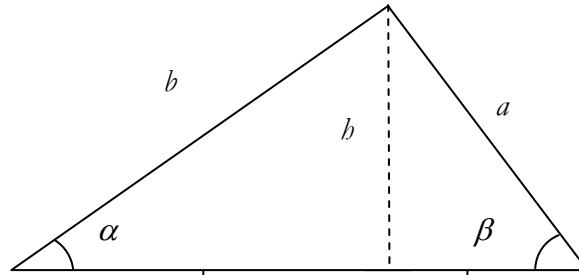


Sinilauseen avulla voidaan ratkaista kolmion sivuja ja kulmia, kun tunnetaan

- kaksi sivua ja toisen sivun vastainen kulma
- kaksi kulmaa ja toisen kulman vastainen sivu.



Sinilause



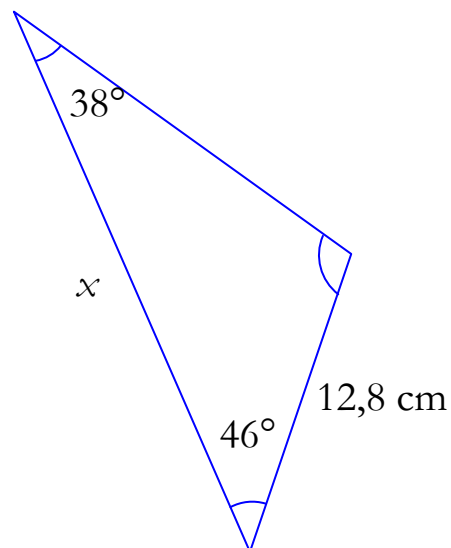
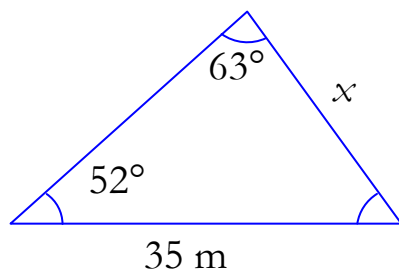
SINILAUSE



Sinilauseen käyttäminen sivun ratkaisemiseen

Esimerkki

Ratkaise sivun x pituus.





Sinilauseen käyttäminen kulman ratkaisemiseen

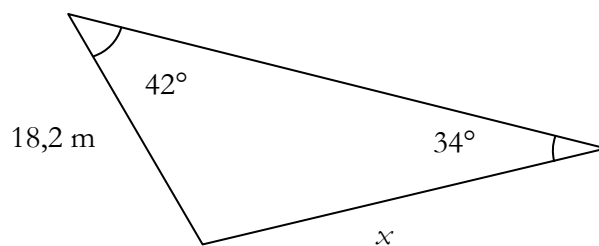
Esimerkki

Kolmion kahden sivun pituudet ovat 3,5 cm ja 6,8 cm. Näistä pidemmän sivun vastaisen kulman suuruus on 36 astetta. Laske kolmion muut kulmat.

**Testi: Sinilause**

Nimi:

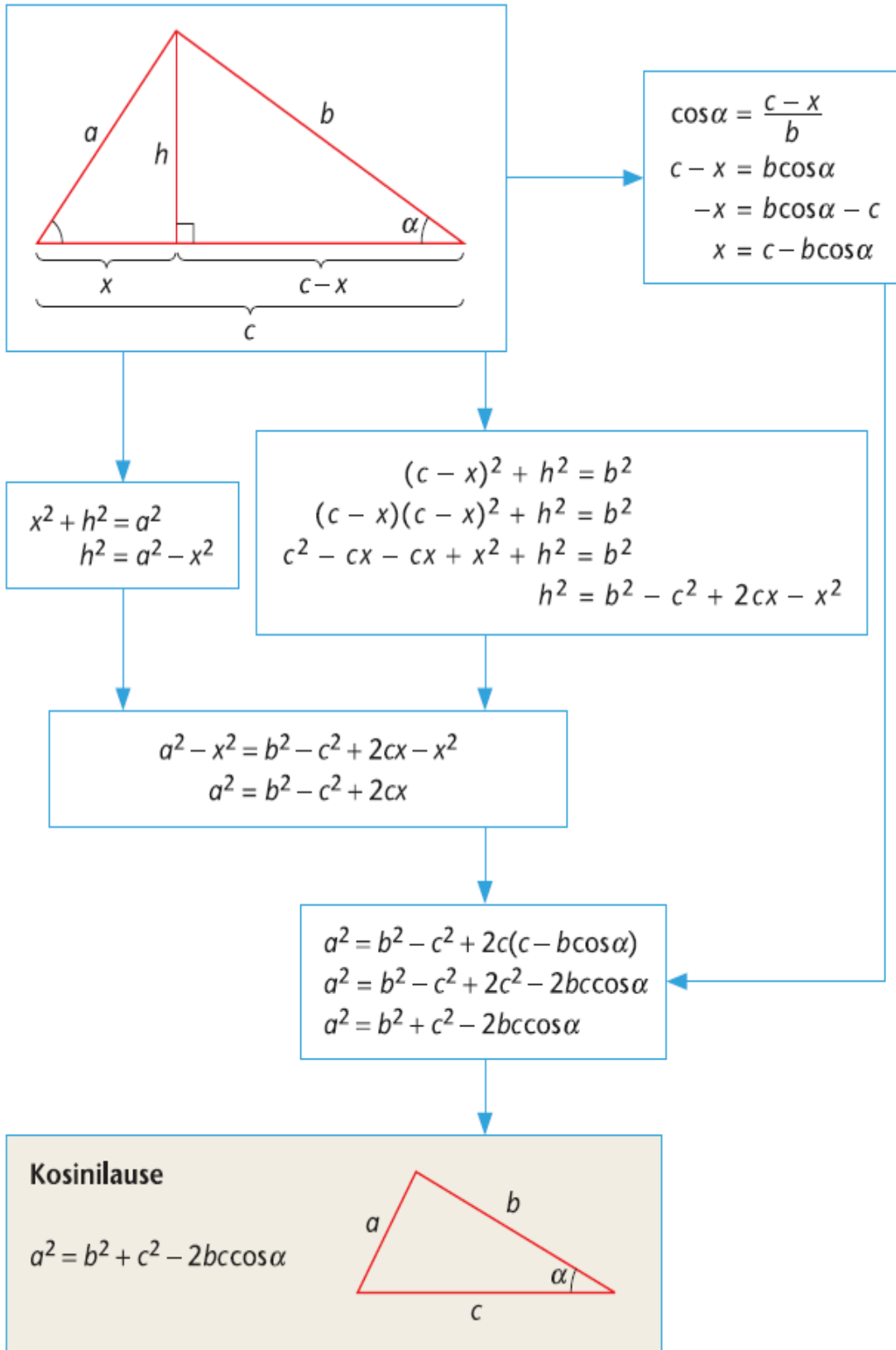
1. Laske sivun pituus x .



2. Suoran särmiön pohjana on kolmio, jonka kahden sivun pituudet ovat 45 cm ja 53 cm. Jälkimmäisen sivun vastainen kulma on 72° . Särmiön korkeus on 19 cm. Särmiö on tehty metalliseoksesta, jonka tiheys on $2,14 \text{ kg/dm}^3$. Kuinka paljon kappale painaa?



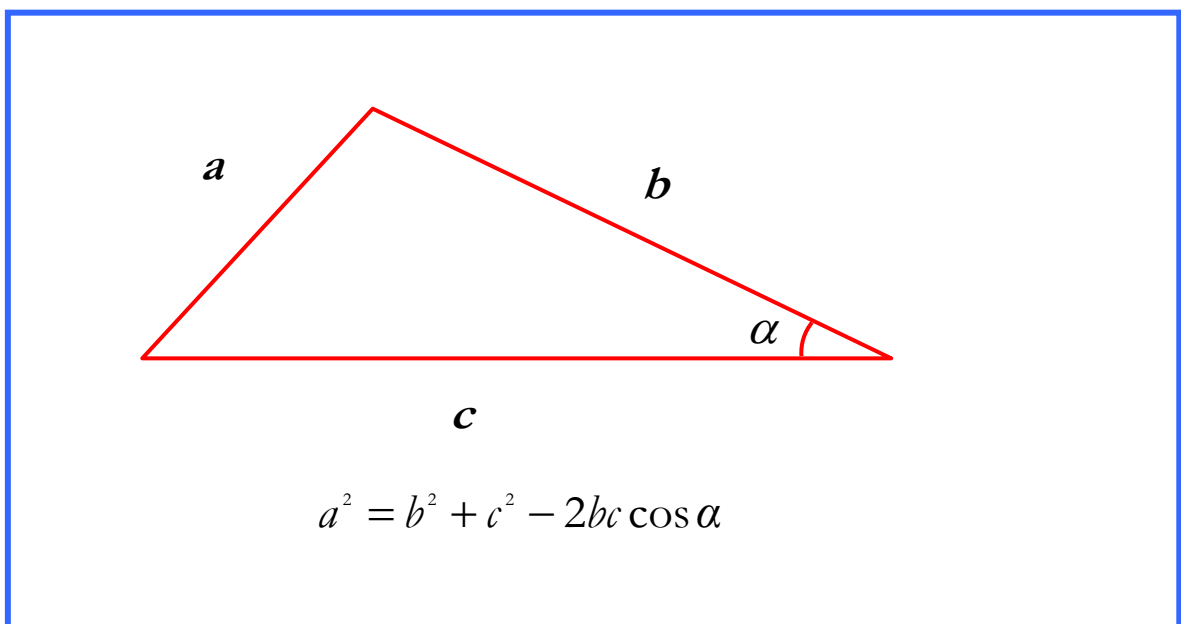
Kosinilauseen johtaminen





Kosinilause

- ◆ Kolmion kolmas sivu voidaan laskea, jos tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma.



- ◆ Kun kahden sivun välinen kulma on 90° , kosinilause saa Pythagoraan lauseen muodon.
- ◆ Kosinilauseella voidaan ratkaista myös kolmion kulmia, jos kaikki sivut tunnetaan.

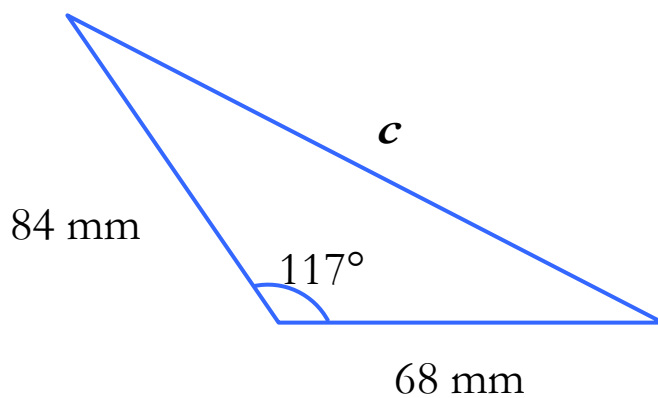


Kosinilauseen käyttäminen sivun ratkaisemiseen

Esimerkki 1

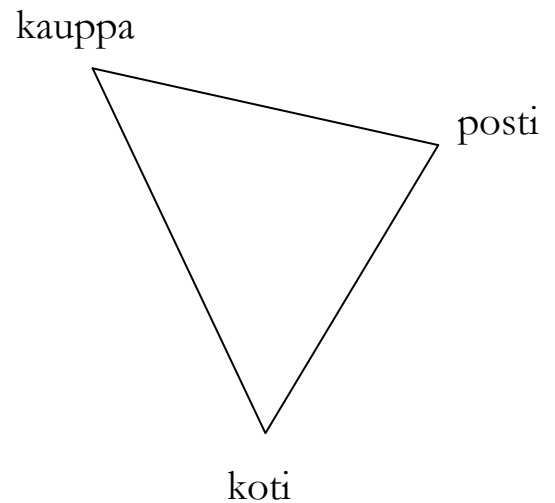
Ratkaise sivun pituus c .

Ratkaisu:



Esimerkki 2

Pekan kodilta johtaa suora tie kauppaan. Etäisyys kauppaan on 870 m. Kodilta johtaa toinen tie pankkiin, jonne etäisyyttä on 550 m. Teiden väliin muodostuu 85° kulma. Laske kaupan ja postin välinen etäisyys.

**Ratkaisu:**

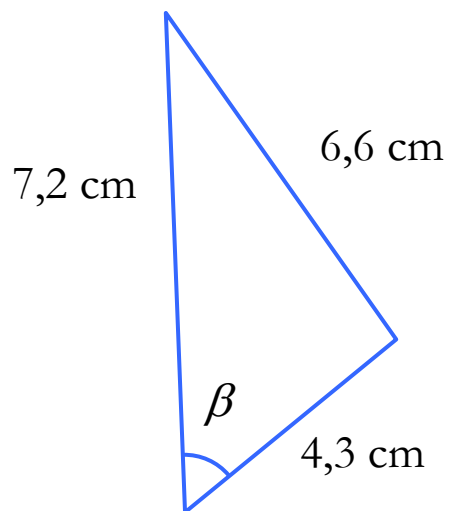


Kosinilauseen käyttäminen kulman ratkaisemiseen

Esimerkki

Ratkaise kulma β .

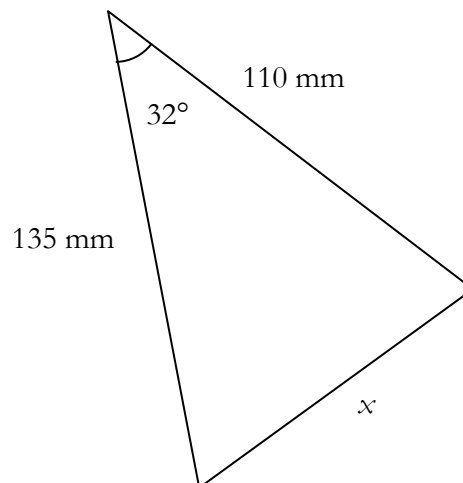
Ratkaisu:



**Testi: Kosinilause**

Nimi:

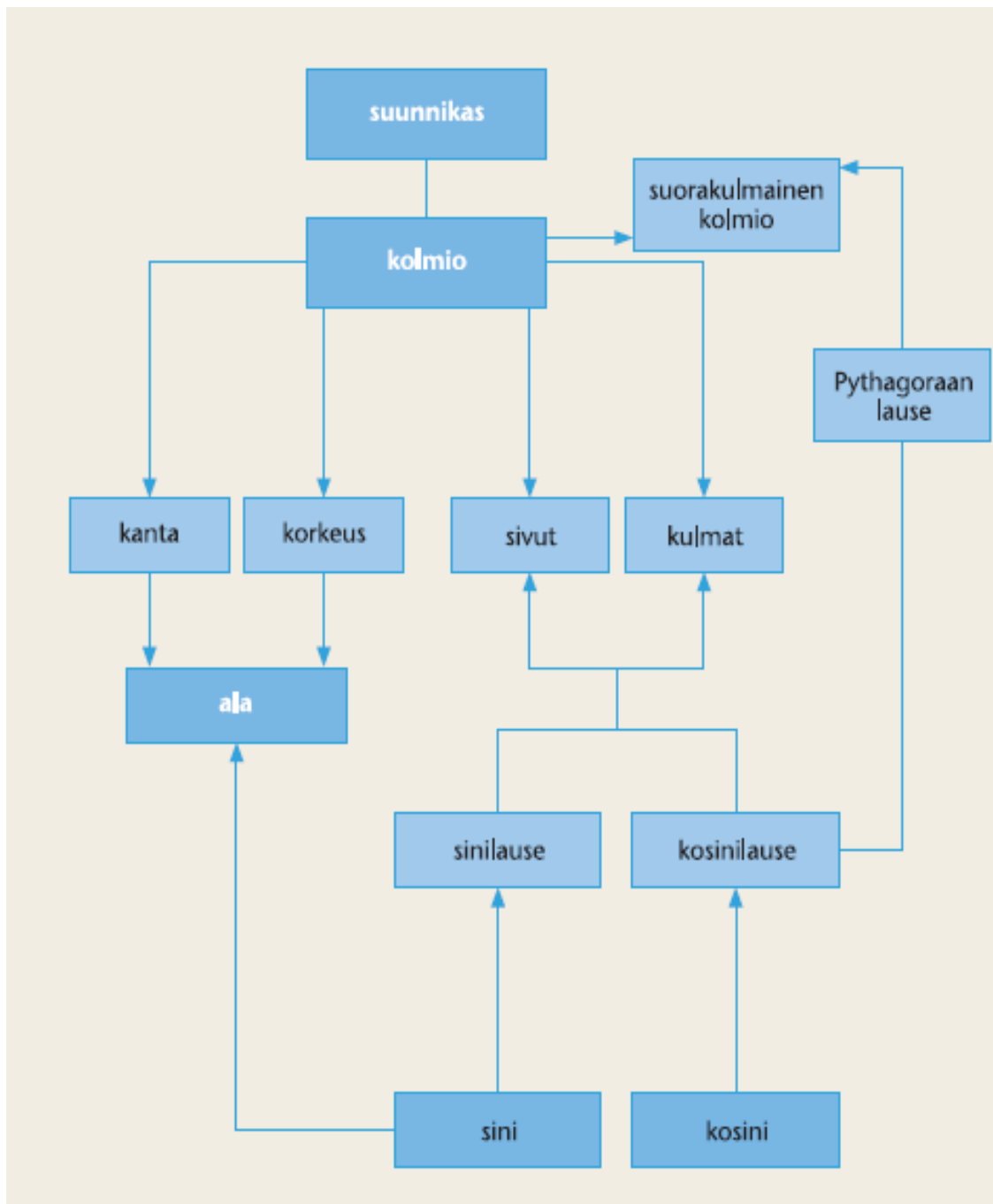
1. Laske sivun pituus x .



2. Kolmion sivujen pituudet ovat 14 cm, 19 cm ja 28 cm. Laske kahden jälkimmäisen sivun välinen kulma asteen tarkkuudella.



Keskeisiä käsitteitä geometriasta





Peruskäsitteitä vektoreista

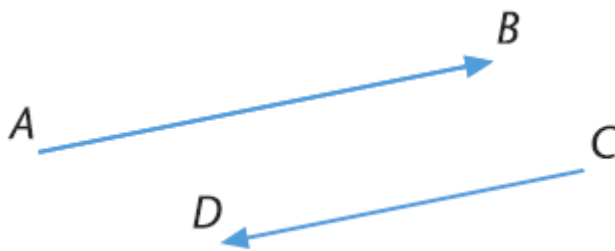
- Janan AB alkupiste on A ja loppupiste B .
 → suuntajana, jolla **pituus** ja tietty **suunta**

- Suuntajanaa kutsutaan **vektoriksi**.

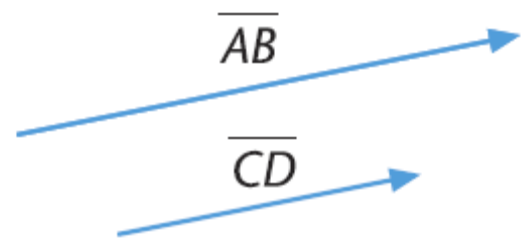


- Vektoria voidaan merkitä myös yhdellä kirjaimella.
 Esimerkiksi vektori \vec{a} .

Vastakkaissuuntaiset vektorit

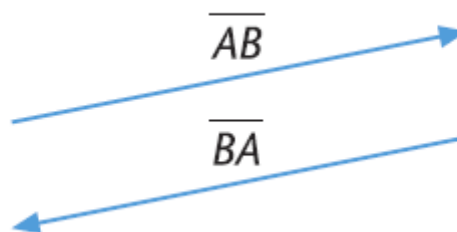


Samansuuntaiset vektorit



Yhdensuuntaiset vektorit

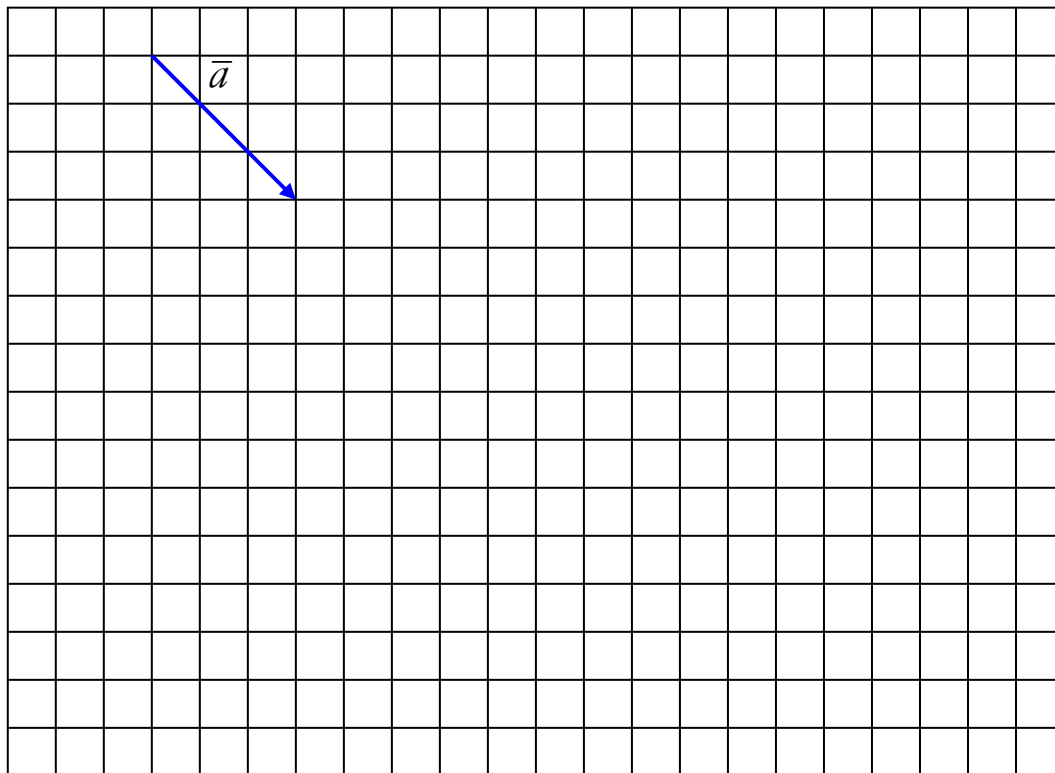
Vastavektorit



Vektorit ovat yhtä pitkät, mutta vastakkaissuuntaiset.
 Vektorit ovat yhdensuuntaiset.

Esimerkki 1

Piirrä vektorin \vec{a} kanssa samansuuntainen vektori \vec{b} ,
vastakkaisuuntainen vektori \vec{c} ja vastavektori $-\vec{a}$.





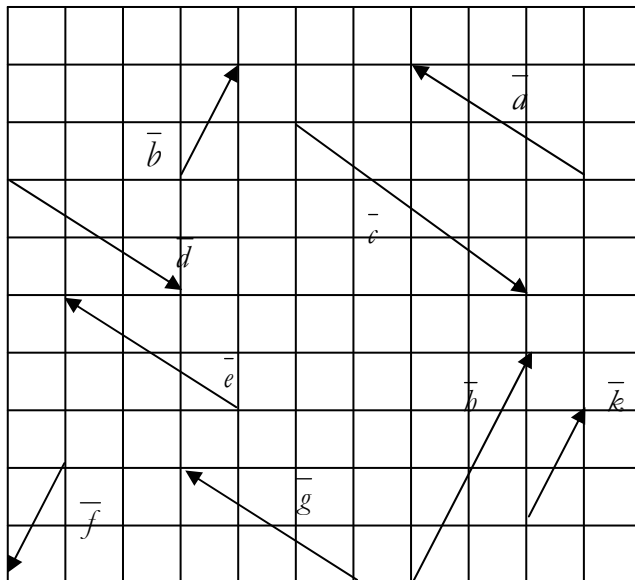
Vektoreiden yhtäsuuruus

Vektorit \vec{a} ja \vec{b} ovat **identtiset** eli samat, $\vec{a} = \vec{b}$, kun

- ✓ Pituudet ovat samat eli $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
- ✓ Suunta on sama eli $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Esimerkki 1

Etsi kuvasta identtiset vektorit.



Esimerkki 2

Millä vakion k arvolla vektorit $\vec{a} = 4\vec{p} - 7\vec{t}$ ja $\vec{b} = 4\vec{p} + k\vec{t}$ ovat identtiset?



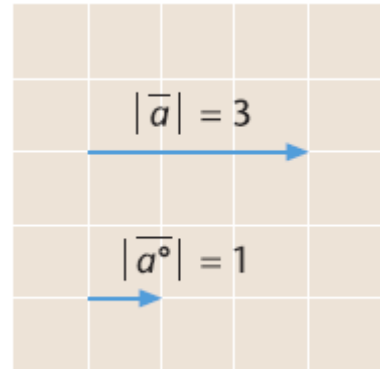
Erilaisia vektoreita

Vektoreiden ominaisuus	Selitys	Merkintätapa	Esimerkki
Samansuuntaisuus $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$	<ul style="list-style-type: none"> – vektoreilla sama suunta – vektoreiden ei tarvitse olla yhtä pitkiä – ovat yhdensuuntaisia 		
Vastakkaisuuntaisuus	<ul style="list-style-type: none"> – vektori suuntautuu vastakkaiseen suuntaan vertailuvektoriin nähden – vektoreiden ei tarvitse olla yhtä pitkiä – ovat yhdensuuntaisia 	$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$	
Vastavektori	<ul style="list-style-type: none"> – vastakkaisuuntainen ja yhtä pitkä vertailuvektoriin nähden 	$\vec{b} = -\vec{a}$ tai $\vec{a} = -\vec{b}$	
Yhdensuuntaisuus	<ul style="list-style-type: none"> – vektorit ovat joko samansuuntaisia tai vastakkaisuuntaisia – vektorit voidaan asettaa peräkkäin niin, että ne muodostavat janan 	$\vec{a} \parallel \vec{b}$ $\vec{a} \parallel \vec{c}$ $\vec{b} \parallel \vec{c}$	
Erisuuntaisuus	<ul style="list-style-type: none"> – vektorit eivät ole yhdensuuntaisia 	$\vec{a} \nparallel \vec{b}$	



Yksikkövektori

Kun vektori jaetaan pituudellaan, saadaan yksikkövektori.



YKSIKKÖVEKTORI

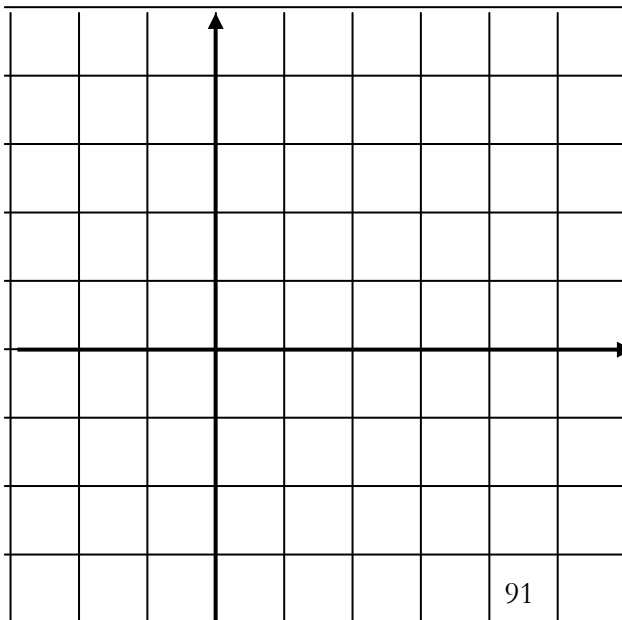
Vektorin \bar{a} yksikkövektori on

$$\bar{a}^\circ = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, \text{ jossa } |\bar{a}| \text{ on vektorin } \bar{a} \text{ pituus.}$$

Esimerkki

Tarkastellaan vektoria \overline{AB} .

- Piirrä vektori, kun $A = (1, -3)$ ja $B = (4, 1)$.
- Laske vektorin pituus (eli kahden pisteen välinen etäisyys).
- Piirrä koordinaatistoon yksikkövektori.
- Muodosta yksikkövektorin lauseke.





Vektorien välinen kulma

- Vektorin siirretään alkamaan samasta pisteestä.
- Vektorien välinen kulma on syntyneistä kulmista pienempi.



- Samansuuntaisten vektorien välinen kulma on 0° .



- Vastakkaisuuntaisten vektorien välinen kulma on 180° .

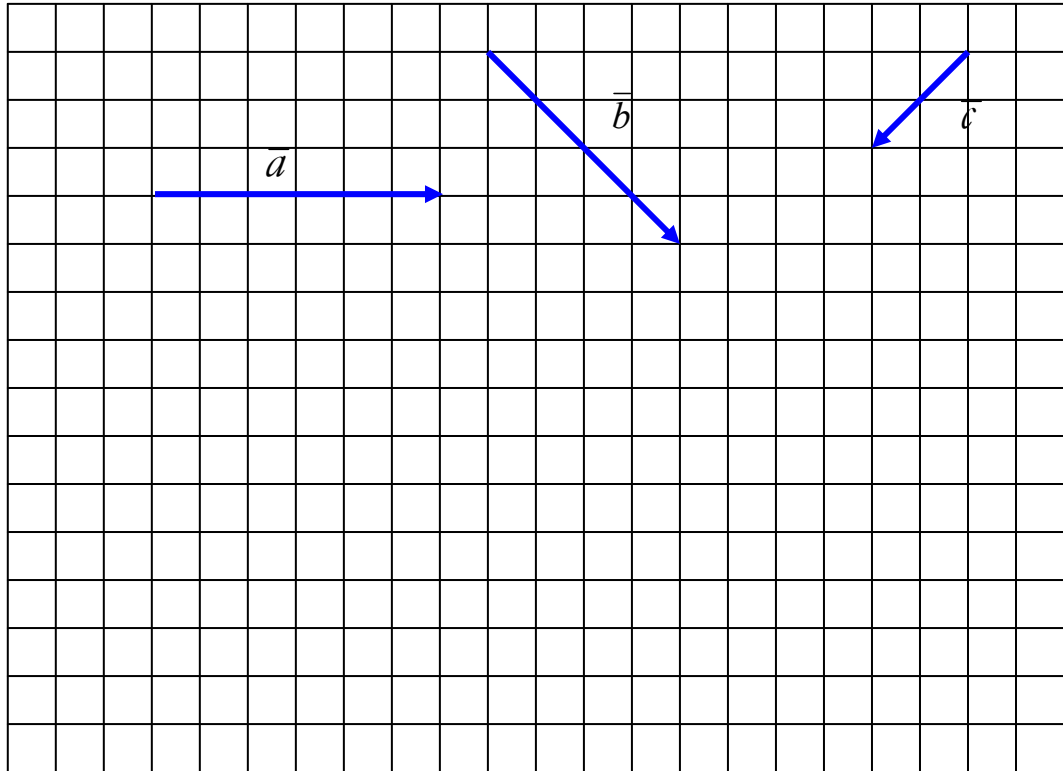


Esimerkki

Määritä vektorien

a) \vec{a} ja \vec{b} b) \vec{b} ja \vec{c} c) \vec{a} ja \vec{c}

välinen kulma.

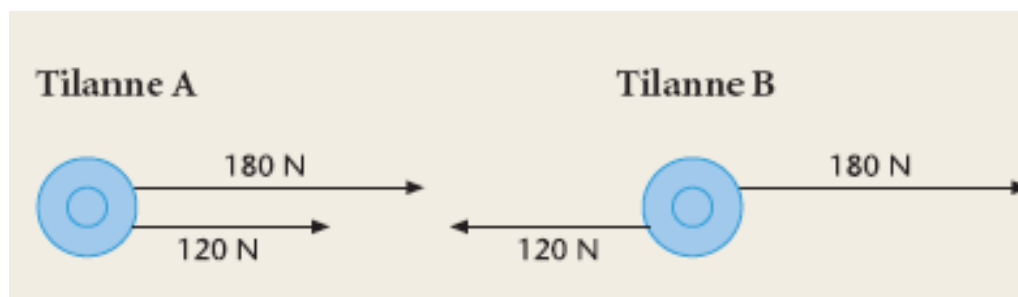




Laskutoimitukset

Pohdinta 1

Pekka ja Jalmari työntävät pyöreää rullaa voimilla 180 N ja 120 N.

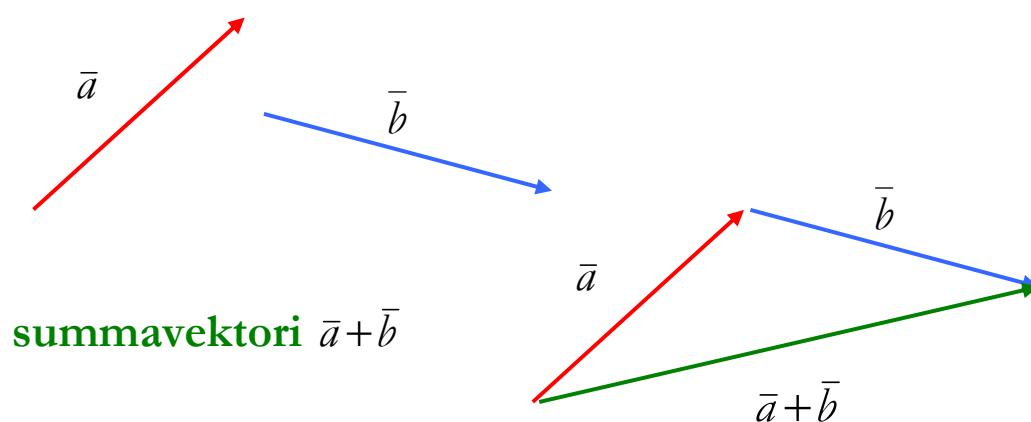


- Kuinka suurella voimalla yhteensä rullaa työnnetään?
- Piirrä annettujen voimavektoreiden avulla yhteisvoimaa kuvaava vektori.
- Miten voimien summavektori on muodostettu?

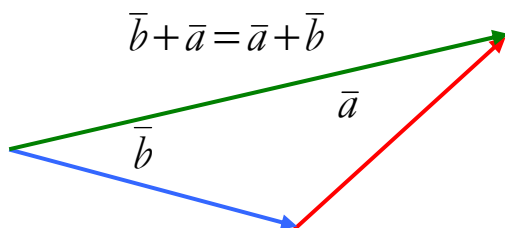


Vektorien summa

- Vektorit lasketaan yhteen liittämällä ne **peräkkäin**.
 - Vektorien suunnat säilyvät.
 - Vektorien pituudet säilyvät.
- Edellisen vektorin loppupisteeseen yhdistetään seuraavan vektorin alkupiste.



- Summavektoria kutsutaan **resultantiksi**.
- Summa noudattaa **vaihdantalakia**.



- Summa noudattaa **liitäntälakia**.

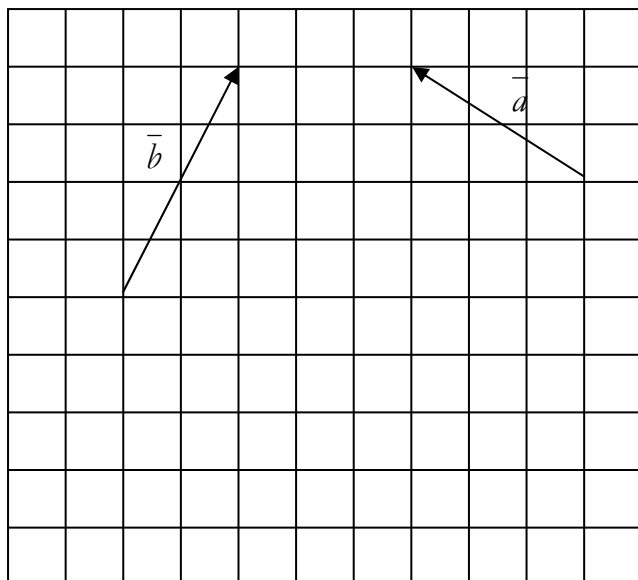
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



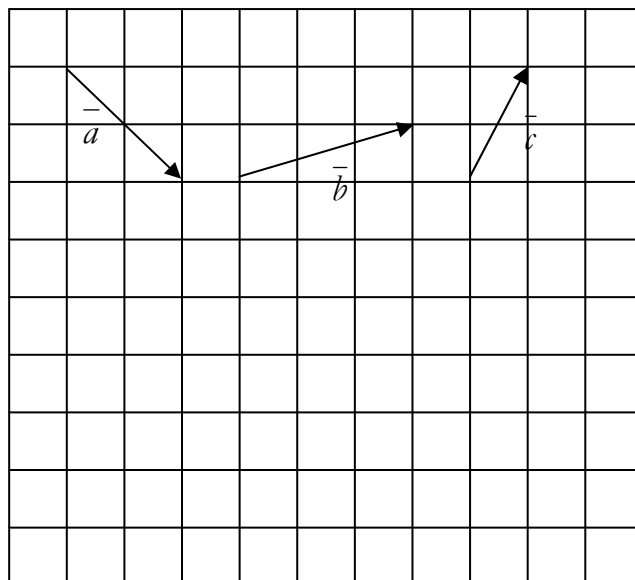
Summavektoreita piirtämällä

Muodosta piirtämällä summavektori

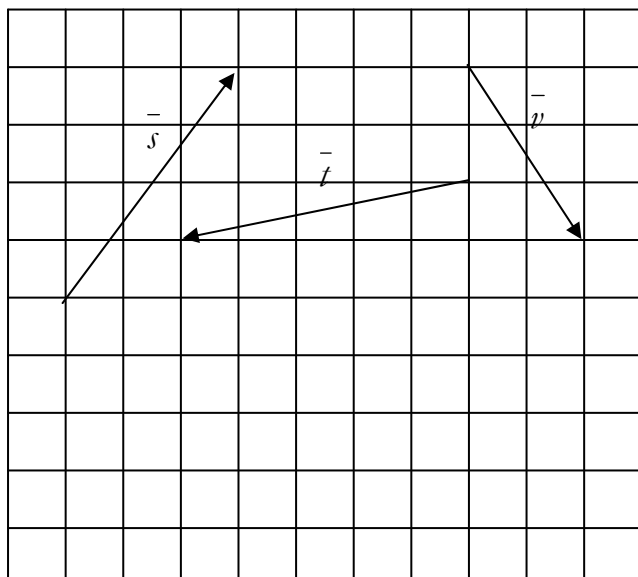
a) $\vec{a} + \vec{b}$



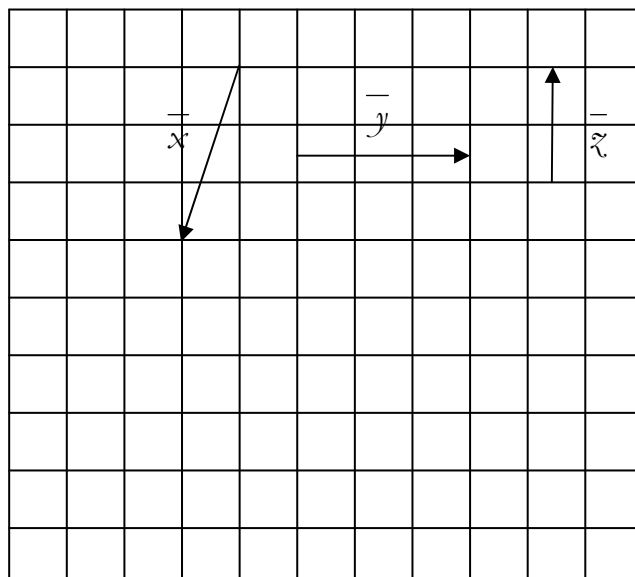
b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



c) $\vec{s} + \vec{t} + \vec{v}$



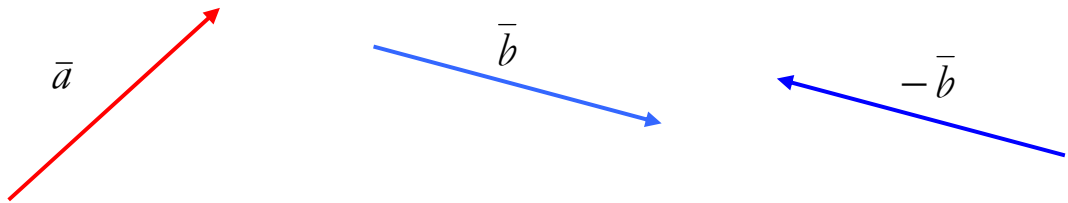
d) $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$



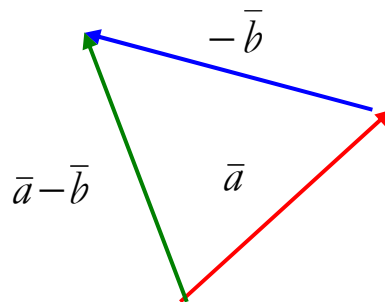


Vektorien erotus

- Vektorien \vec{a} ja \vec{b} erotus $\vec{a}-\vec{b}$ saadaan **lisäämällä** vektoriin \vec{a} vektorin \vec{b} **vastavektori** $-\vec{b}$.
- Vastavektori $-\vec{b}$ on pituudeltaan yhtä suuri, mutta suunnaltaan vastakkainen kuin \vec{b} .



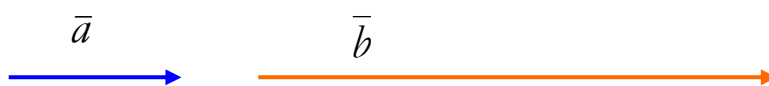
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$





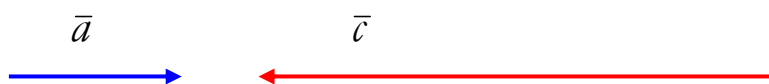
Vektorin kertominen luvulla

- Vektorit \vec{a} ja \vec{b} ovat samansuuntaiset, mutta \vec{b} on kolme kertaa vektorin \vec{a} pituinen.



$$\vec{b} = 3\vec{a}$$

- Kun vektori kerrotaan positiivisella reaaliluvulla, sen pituus muuttuu mutta suunta ei muutu.
- Jos vektori kerrotaan negatiivisella reaaliluvulla, pituus muuttuu ja suunta muuttuu vastakkaisuuntaiseksi.



$$\vec{c} = -3\vec{a}$$

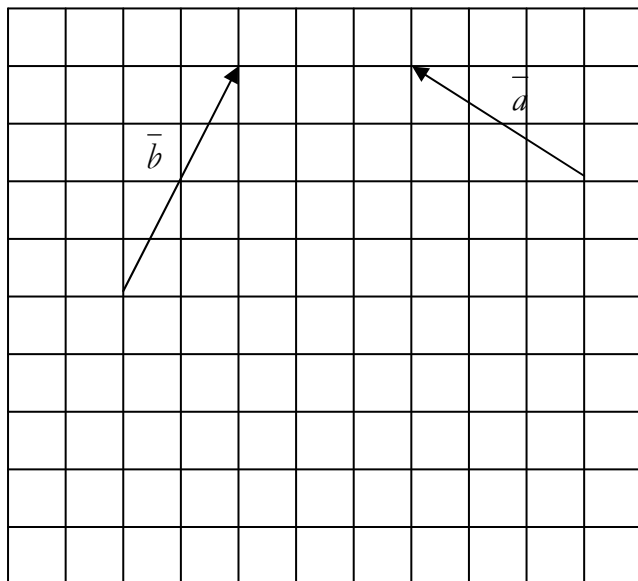
- Huomaa, että luvulla 1 kertominen ei muuta vektorin pituutta!



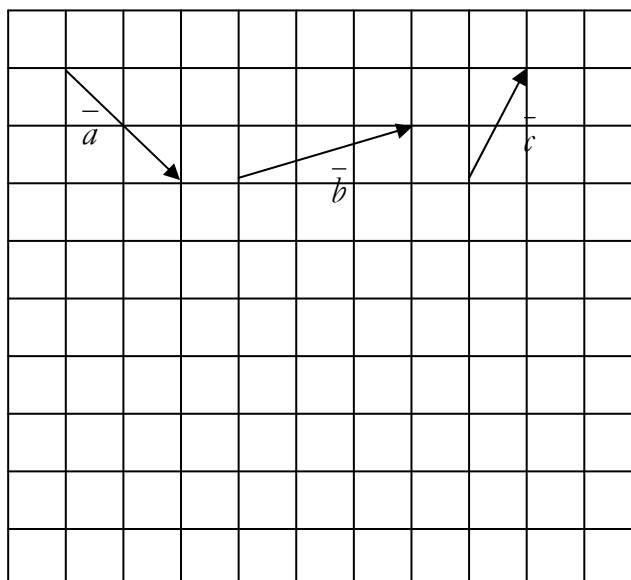
Vektoreiden erotus piirtämällä

Muodosta piirtämällä vektoreiden erotus.

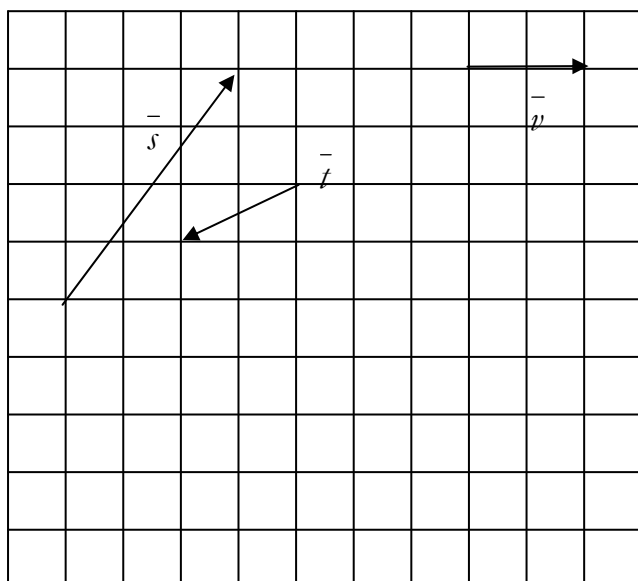
a) $\vec{a} - \vec{b}$



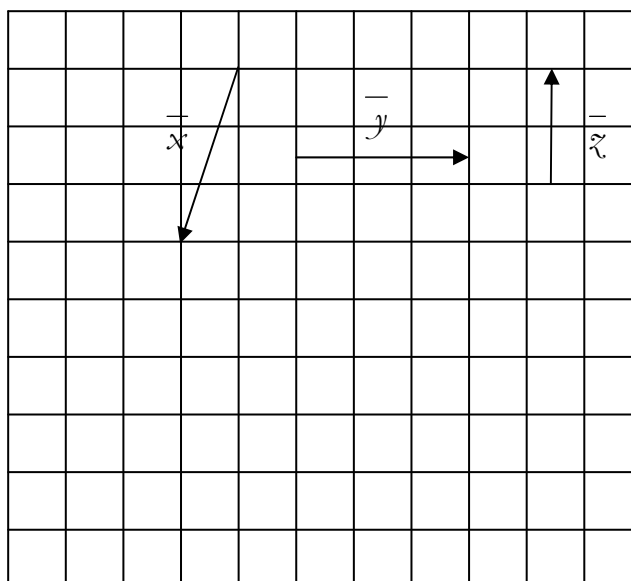
b) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$



c) $\vec{s} - 2\vec{t} - \vec{v}$



d) $-\vec{x} - \vec{y} - 2\vec{z}$





Vektorien yhdensuuntaisuus

- Samansuuntaiset ja vastakkaissuuntaiset vektorit ovat **yhdensuuntaisia** keskenään.

$$t\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}, \text{ jos } t > 0$$

$$t\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{a}, \text{ jos } t < 0$$

$$t\bar{a} = \bar{0}, \text{ jos } t = 0$$

- Kaksi vektoria \bar{a} ja \bar{b} ovat yhdensuuntaisia, jos on olemassa reaalityyppinen luku t ($t \neq 0$) siten, että \bar{a} saadaan kertomalla vektori \bar{b} luvulla t eli

$$\bar{a} \parallel \bar{b}, \text{ jos } \bar{a} = t\bar{b} \quad t \neq 0$$



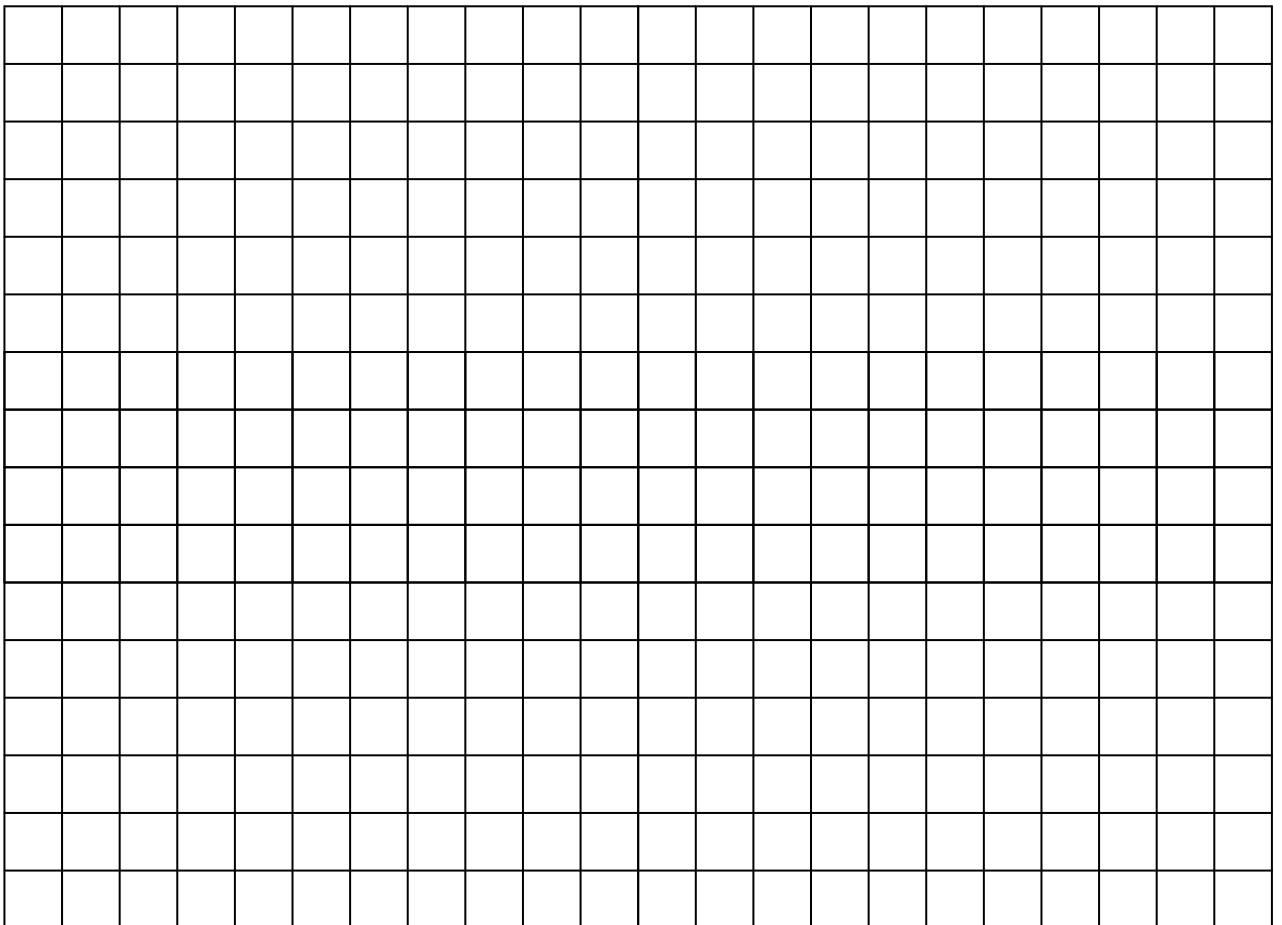
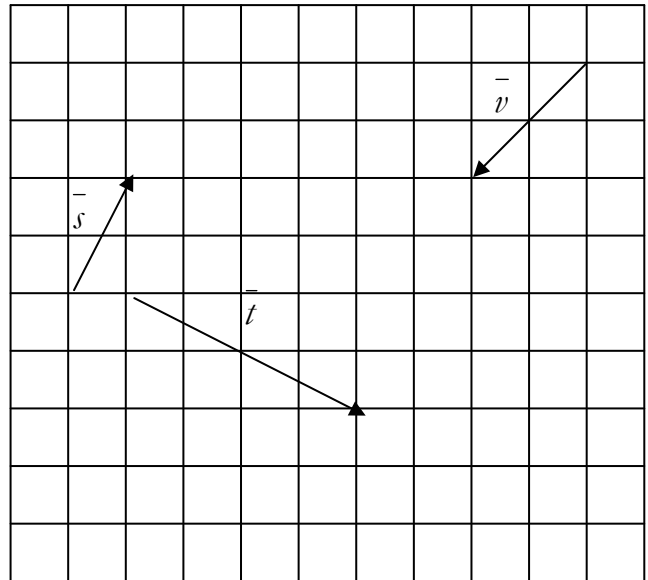
Esimerkkejä laskutoimituksista

Piirrä vektorien \vec{s} , \vec{t} ja \vec{v} avulla

a) $2\vec{s} - \vec{t}$

b) $0,5\vec{t} - 2\vec{v}$

c) $-3\vec{s} + (-2\vec{t}) - \vec{v}$.





Testi: Laskutoimitukset

Nimi:

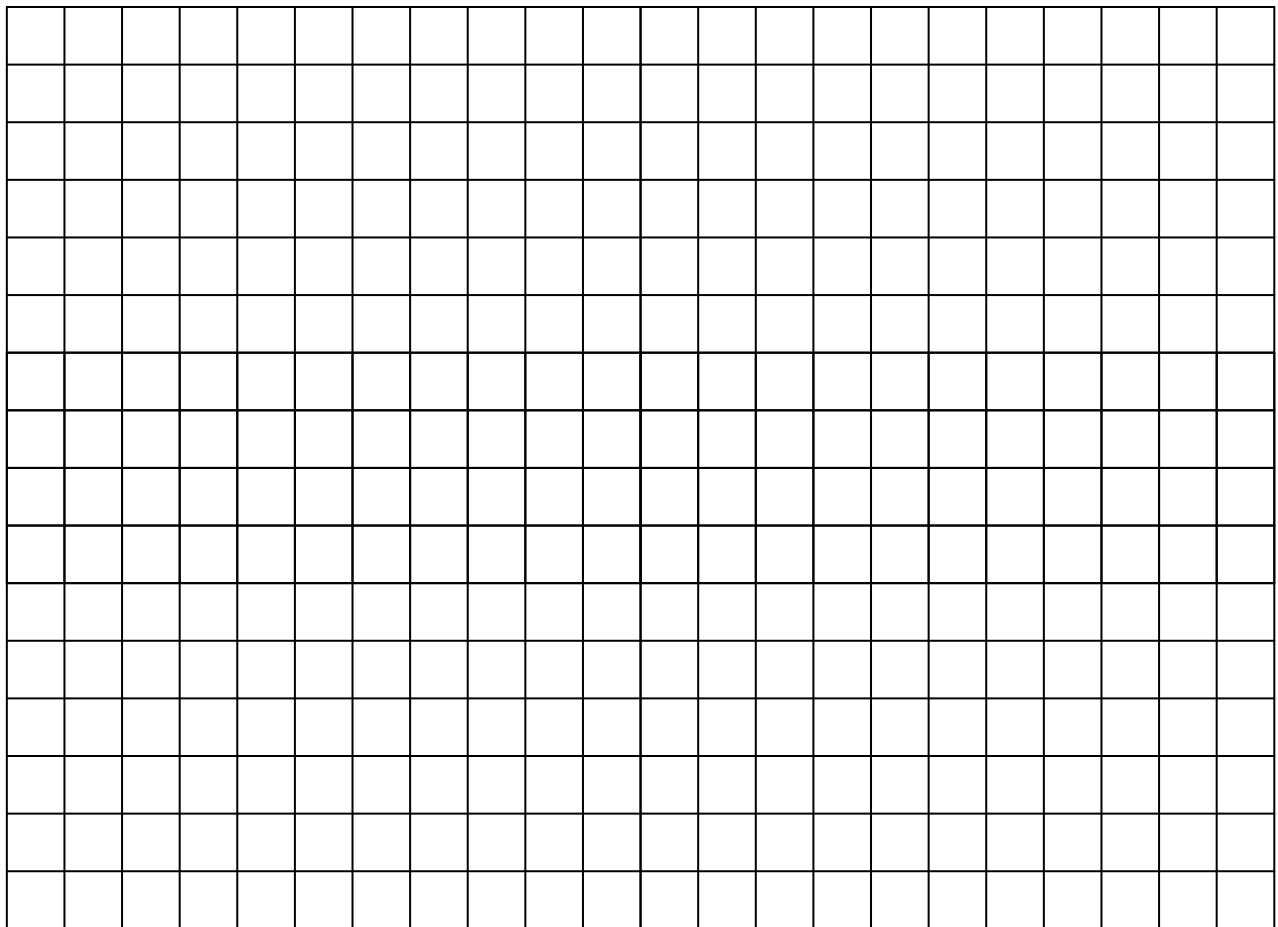
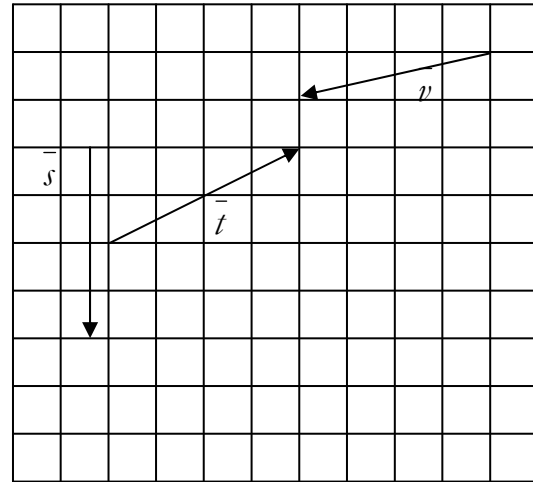
1. Piirrä vektorien \vec{s} , \vec{t} ja \vec{v} avulla

a) $\vec{t} + \vec{v}$

b) $\vec{s} - \vec{v}$

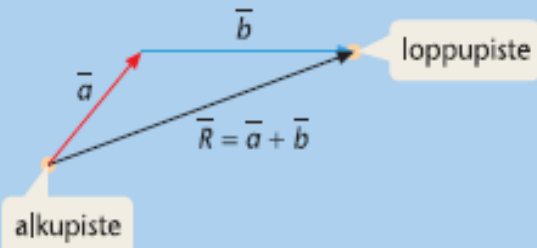
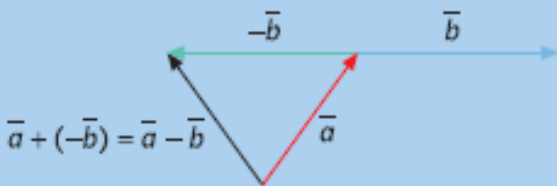
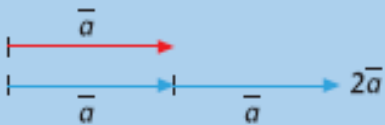
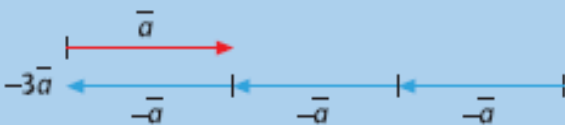
c) $-0,5\vec{s} + 0,5\vec{v}$

d) $2\vec{t} + 2\vec{s}$





Yhteenvedo vektorien laskutoimituksista

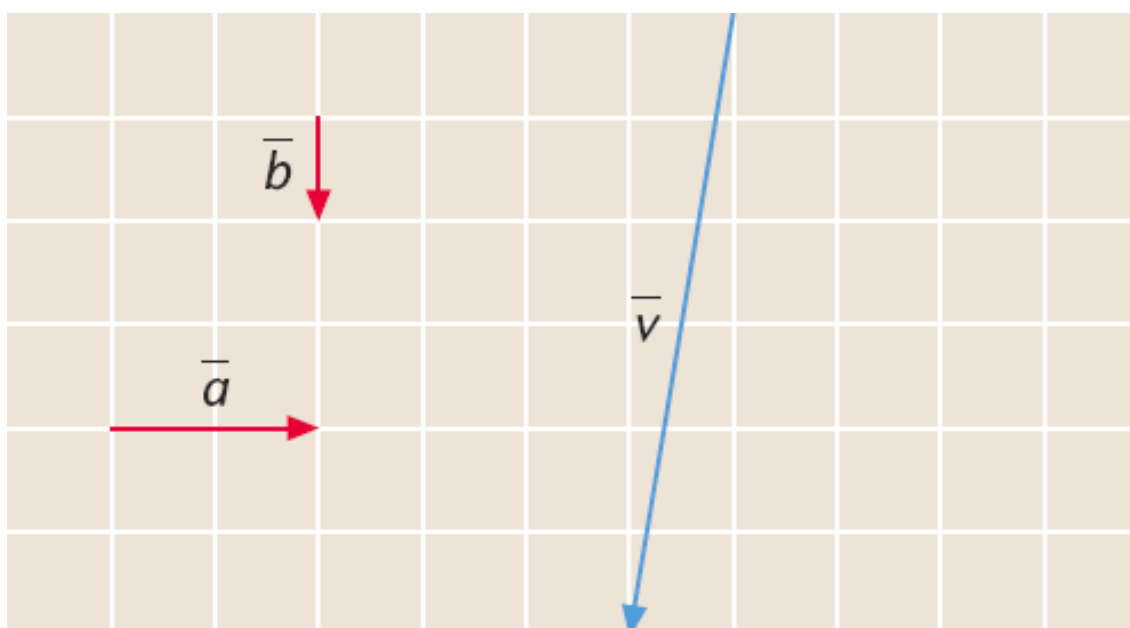
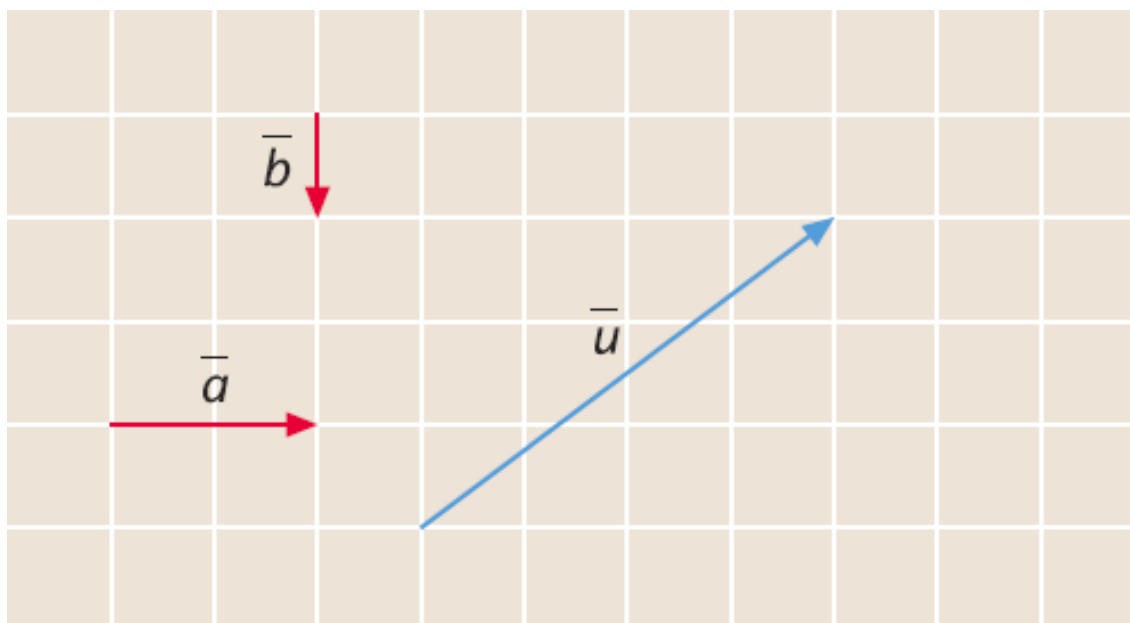
Laskutoimitus	
Summa	<p>Vektorit lasketaan yhteen liittämällä ne peräkkäin suuntansa ja pituutensa säilyttäen.</p> <p>Summavektori eli resultantti \vec{R} saadaan yhdistämällä ensimmäisen vektorin alkupiste viimeisen kärkeen.</p> 
Erotus	<p>Vektorien \vec{a} ja \vec{b} erotus saadaan lisäämällä vektorin \vec{b} vastavektori vektorin \vec{a} eli $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.</p> 
Luvulla kertominen	<p>Luvulla $t \neq 0$ kertominen kasvattaa vektorin pituutta t-kertaiseksi. Positiivisella luvulla kertominen säilyttää vektorin suunnan samana.</p>  <p>Negatiivisella luvulla kertominen muuttaa suunnan vastakkaiseksi.</p> 



Komponentteihin jako

Pohdinta 1

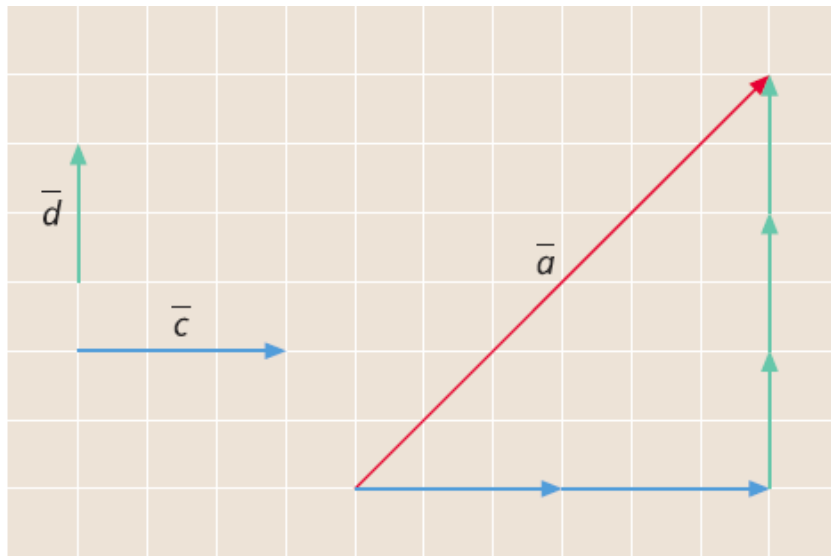
Lausu vektorit \vec{u} ja \vec{v} vektorien \vec{a} ja \vec{b} avulla.





Vektorin jakaminen komponentteihin

Tason vektorit voidaan lausua kahden erisuuntaisen vektorin avulla.

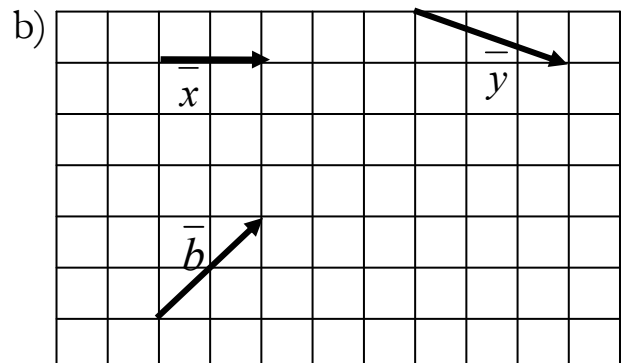
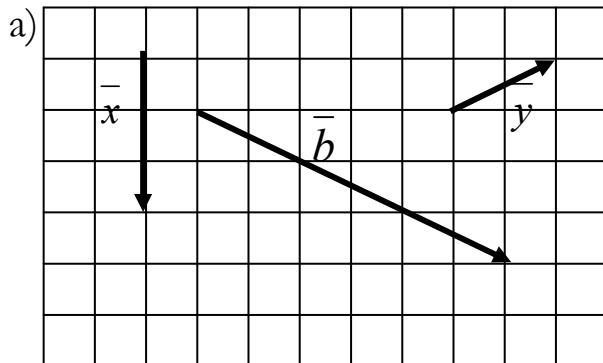


$$\vec{a} = 2\vec{c} + 3\vec{d}$$

Komponentit

Esimerkki

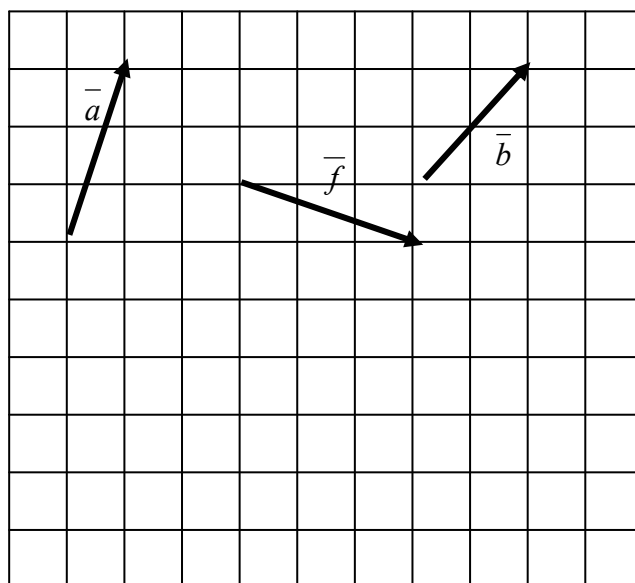
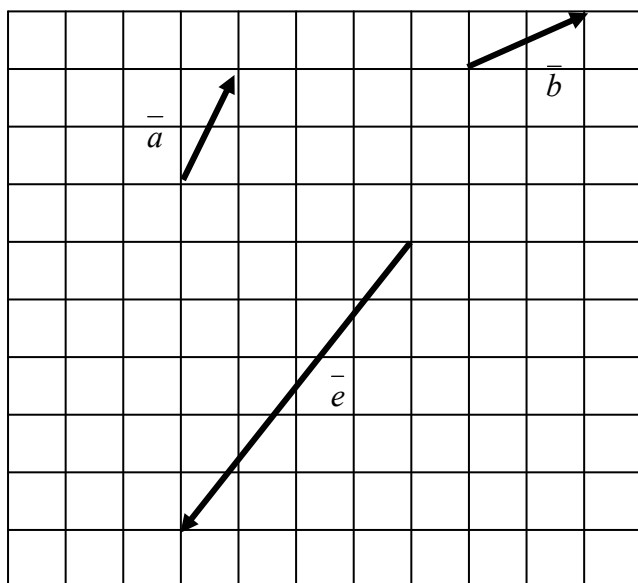
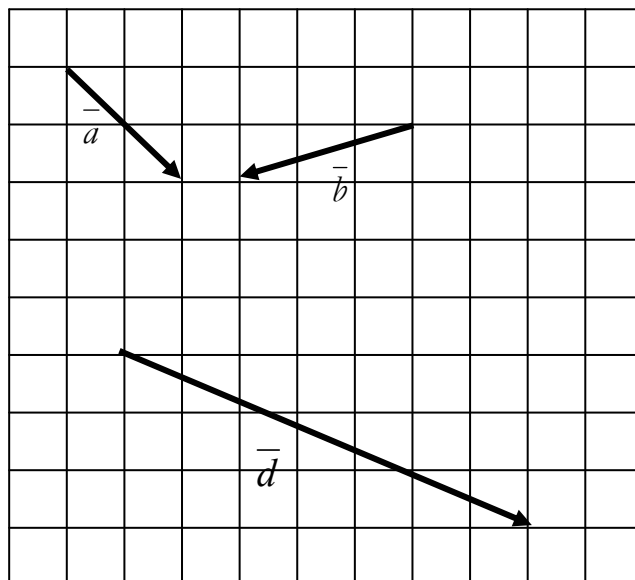
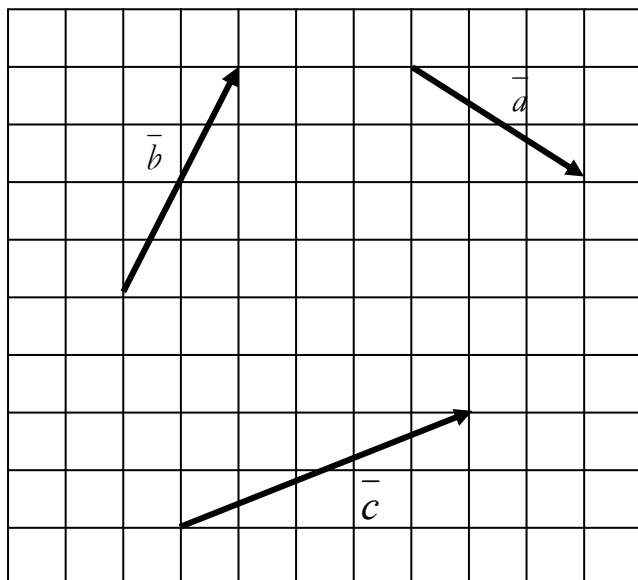
Jaa vektori \vec{b} vektorien \vec{x} ja \vec{y} suuntaisiin komponentteihin.





Komponentit

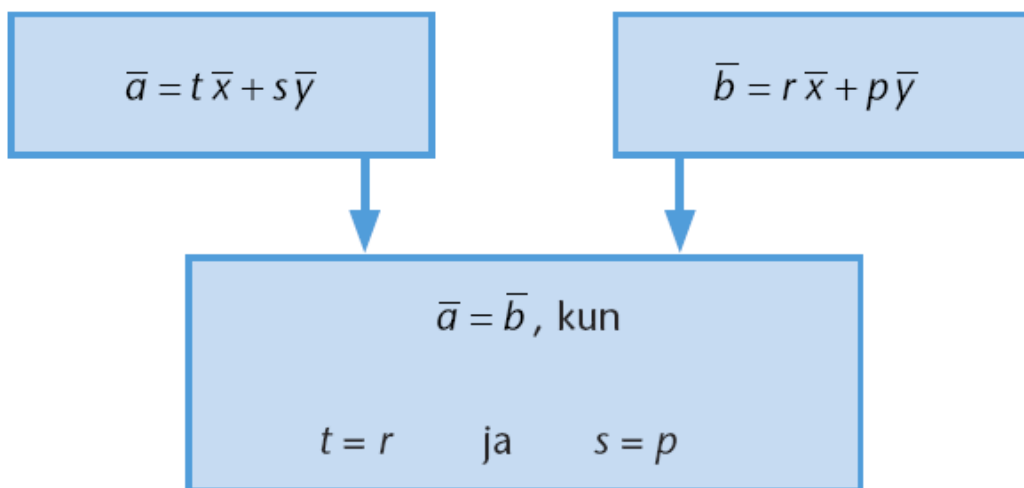
Jaa vektorit \vec{c} , \vec{d} , \vec{e} ja \vec{f} vektorien \vec{a} ja \vec{b} suuntaisiin komponentteihin.





Vektorien yhtäsuuruus

**Kaksi vektoria ovat yhtä suuret,
kun niiden komponentit ovat samat.**



Esimerkki

Millä vakion t arvolla vektorit $\bar{a} = 2\bar{x} - 6\bar{y}$ ja $\bar{b} = 4t(2\bar{y} - \bar{x})$ ovat yhtä suuria?



Esimerkkejä komponentteihin jaosta

Esimerkki 1

Millä vakioiden s ja t arvoilla vektorit $14\vec{a} - 20\vec{b}$ ja $s(\vec{a} + 2\vec{b}) - 2t(2\vec{a} - 4\vec{b})$ ovat yhtä suuret?

Esimerkki 2

Jaa vektori $\vec{a} = 6\vec{x} + 10\vec{y}$ vektorien $2\vec{x} + \vec{y}$ ja $\vec{x} - 3\vec{y}$ suuntaisiin komponentteihin.



Vektorien yhdensuuntaisuus

Vektorit ovat yhdensuuntaisia, kun ne saadaan toisistaan kertomalla nolasta eroavalla luvulla.

$$\text{Jos } \vec{c} \parallel \vec{d}, \text{ niin} \\ \vec{c} = t\vec{d}, t \neq 0.$$

Esimerkki 1

Ovatko vektorit $\vec{c} = 8\vec{a} + 4\vec{b}$ ja $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b}$ yhdensuuntaisia?

Esimerkki 2

Ovatko vektorit $\vec{c} = 2\vec{a} - 10\vec{b}$ ja $\vec{d} = 16\vec{a} - 60\vec{b}$ yhdensuuntaisia?

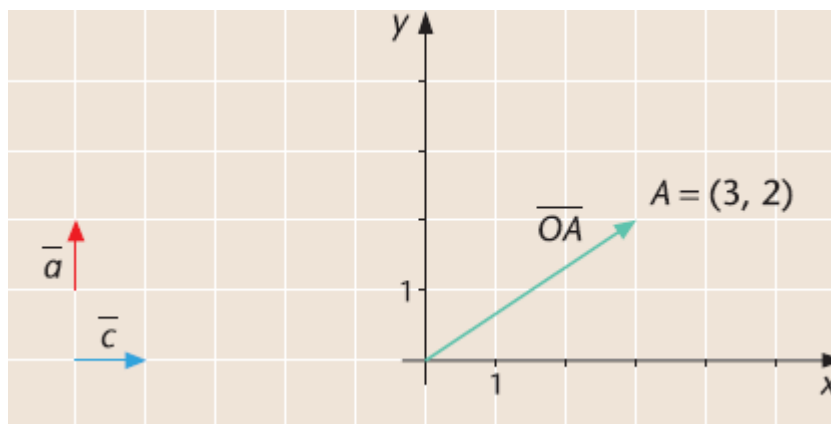


Vektorit xy -koordinaatistossa

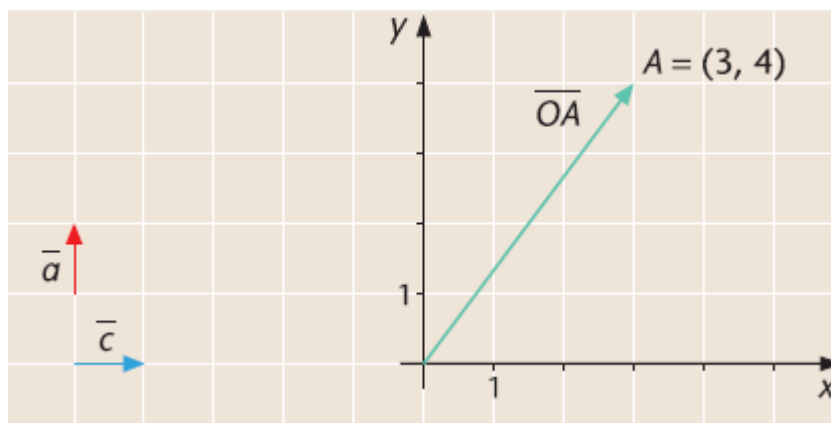
Pohdinta 1

Koordinaatistoon on piirretty vektori pisteestä $O = (0, 0)$ pisteeseen A . Ilmoita vektori \overline{OA} annettujen vektoreiden \vec{a} ja \vec{c} avulla.

a)



b)



Pohdinta 2

Päättele edellisen pohdintatehtävän perusteella, miten ilmoittaisit vektorin \overline{OA} vektoreiden \vec{a} ja \vec{c} avulla, kun piste O sijaitsee origossa ja pisteen A koordinaatit ovat

- a) $(5, 7)$
- b) $(-4, 2)$
- c) (x, y) .



xy -tason kantavektorit

- ◆ Sovitaan, että x -akselin suuntainen yksikkövektori on \bar{i} .

$$|\bar{i}| = 1$$

- ◆ Olkoon lisäksi y -akselin suuntainen yksikkövektori nimeltään \bar{j} .

$$|\bar{j}| = 1$$

- ◆ Koska koordinaattiakselit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa,

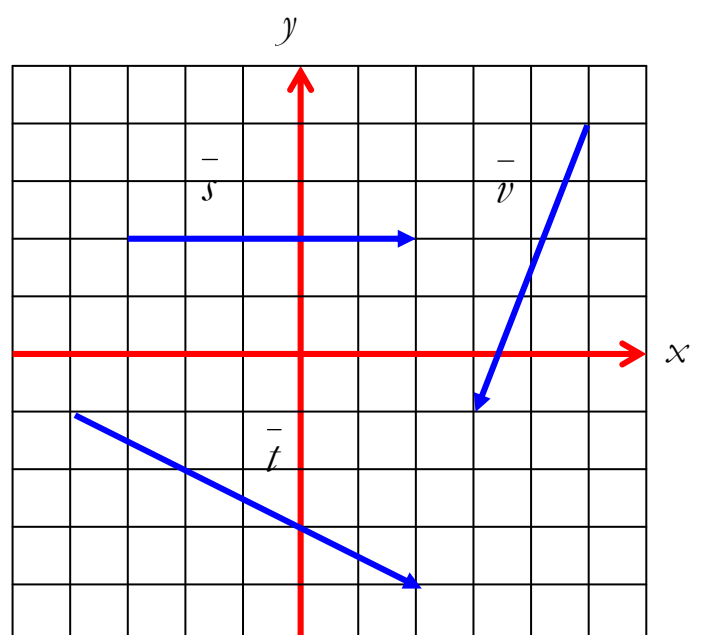
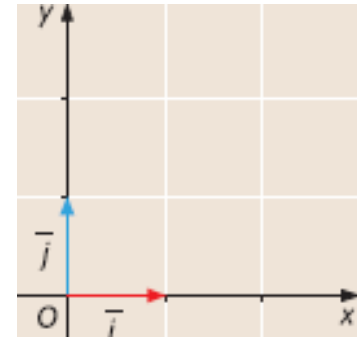
$$\bar{i} \perp \bar{j}$$

- ◆ Kaikki muut xy -tason vektorit voidaan ilmoittaa kantavektorien \bar{i} ja \bar{j} avulla.

$$\bar{s} =$$

$$\bar{t} =$$

$$\bar{v} =$$

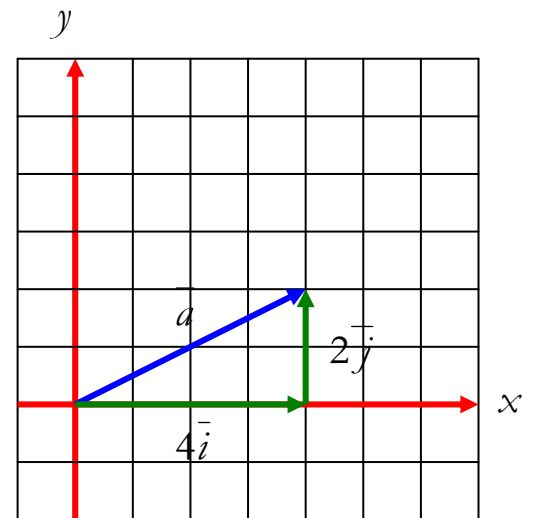




Pisteen paikkavektori

- ◆ Tarkastellaan vektoria \vec{a} , jonka alkupisteenä on origo $O = (0, 0)$ ja loppupisteenä $A = (4, 2)$.
- ◆ Vektori \vec{a} voidaan esittää tason kantavektorien \vec{i} ja \vec{j} avulla:

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$$



- ◆ Vektori $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ on pisteen $(4, 2)$ **paikkavektori**.
- ◆ Vastaavalla tavalla mielivaltaisen tason pisteen (x, y) paikkavektori voidaan esittää muodossa $x\vec{i} + y\vec{j}$.

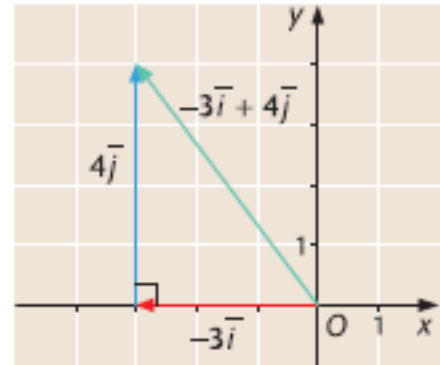
<p>PISTEEN (x, y) PAIKKAVEKTORI</p> <p>Origosta pisteeseen $A = (x, y)$ piirretty vektori on</p> $\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}.$	
---	--



Vektorin pituus

- ◆ Tarkastellaan vektoria $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.
- ◆ Vektorin \vec{a} pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla:

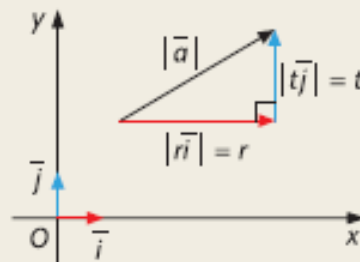
$$\begin{aligned} |-3\vec{i}| &= 3 & |4\vec{j}| &= 4 \\ |\vec{a}|^2 &= 3^2 + 4^2 \\ |\vec{a}|^2 &= 25 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$



VEKTORIN PITUUS

Vektorin $\vec{a} = r\vec{i} + t\vec{j}$ pituus on

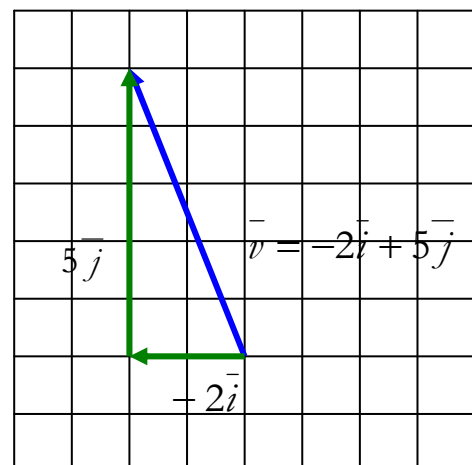
$$|\vec{a}| = \sqrt{r^2 + t^2}.$$



Esimerkki

Laske vektorin $\vec{v} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ pituus.

Ratkaisu:





Kahden pisteen välisen vektorin määrittäminen

Esimerkki

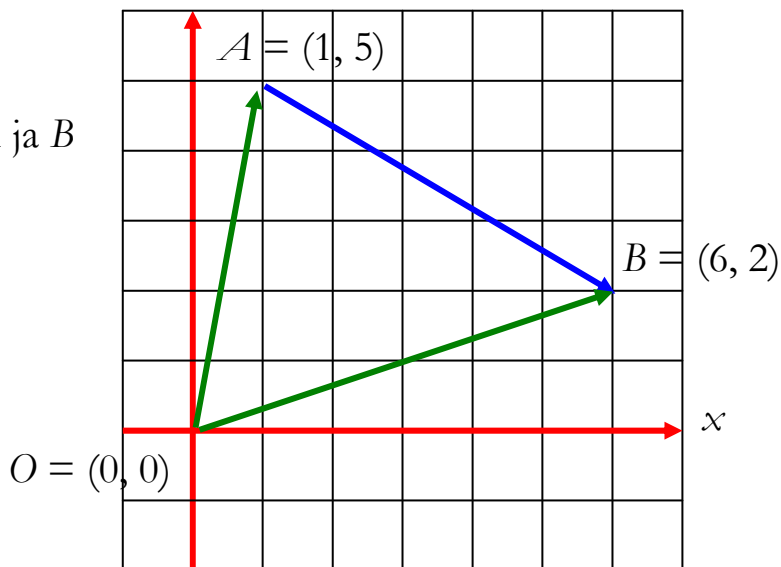
Määritä vektori, jonka alkupisteenä on $A = (1, 5)$ ja loppupisteenä $B = (6, 2)$.

Ratkaisu:

Käytetään apuna pisteiden A ja B Paikkavektoreita:

$$\overline{OA} =$$

$$\overline{OB} =$$



Lausutaan vektori \overline{AB} paikkavektorien avulla:

$$\overline{AB} =$$



Kahden pisteen välinen vektori

KAHDEN PISTEEN VÄLINEN VEKTORI

Jos $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$,
niin vektori

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j}.$$

Esimerkki

Määritä vektori, jonka alkupisteenä on $A = (-6, -3)$ ja loppupisteenä $B = (7, -4)$.

Ratkaisu:



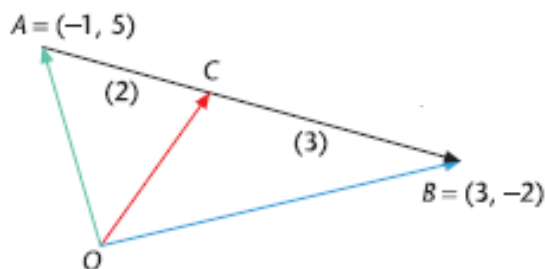
Kirjan esimerkki 4 (s. 135)

Janan AB päätepisteet ovat $A = (-1, 5)$ ja $B = (3, -2)$. Piste C jakaa janan suhteessa 2:3. Määritä pisteen C koordinaatit.

Ratkaisu:

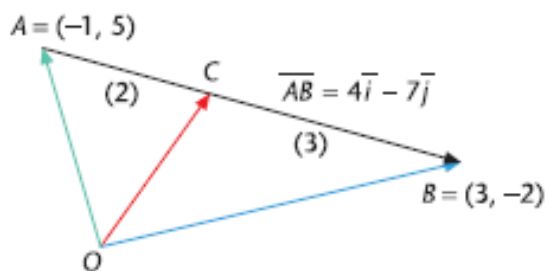
Määritetään vektori \overline{AB} :

$$\overline{AB} =$$



Muodostetaan vektori \overline{OC} . Tähän tarvitaan joko vektori \overline{AC} tai \overline{BC} :

$$\overline{AC} =$$



Pisteen C paikkavektori \overline{OC} voidaan nyt lausua vektorien \overline{OA} ja \overline{AC} avulla:

$$\overline{OC} =$$



Testi: Vektorit xy -koordinaatistossa

Nimi: _____

1. Vektorin \overline{PQ} alkupisteenä on $P = (-5, 10)$ ja loppupisteenä $Q = (8, 12)$.

a) Määritä vektori \overline{PQ} .

b) Laske $|\overline{PQ}|$.

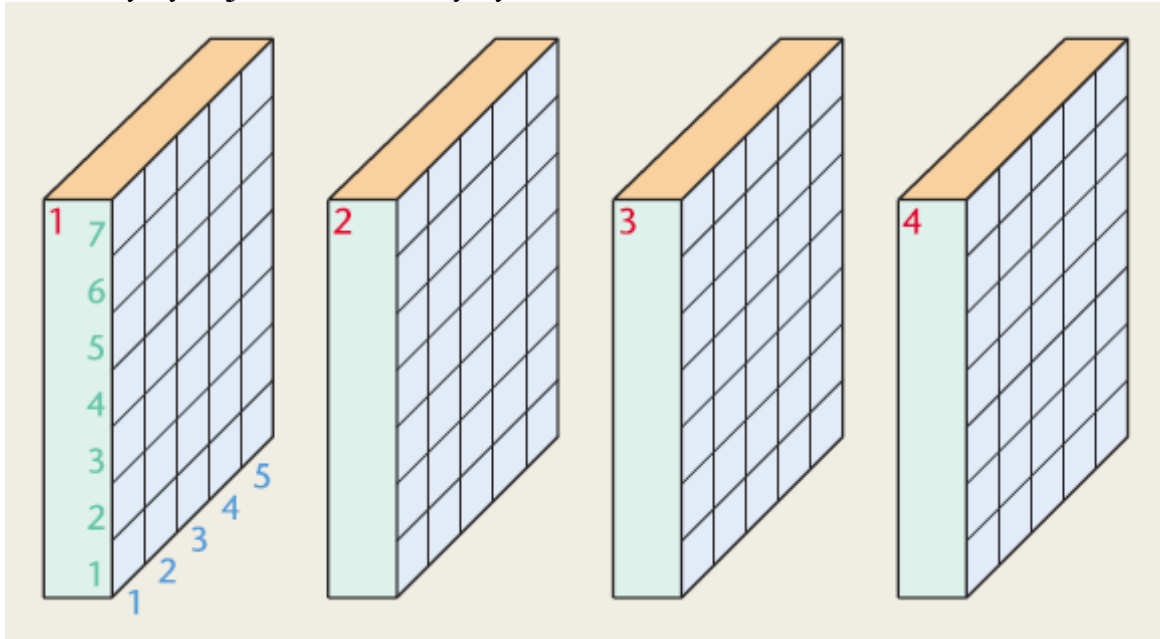
c) Piste X jakaa janan PQ suhteessa 1:1. Määritä pisteen X koordinaatit.



Vektorit xyz -koordinaatistossa

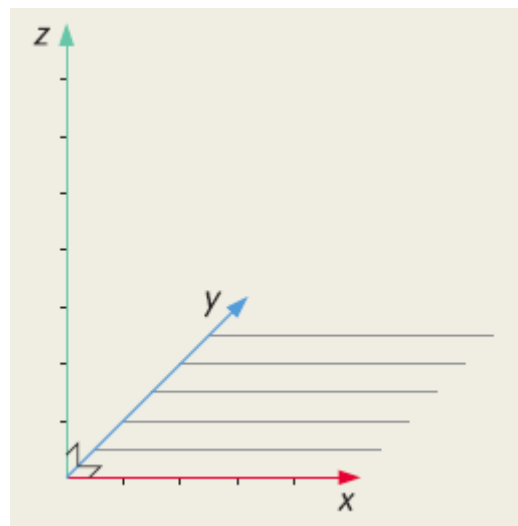
Pohdinta 1

Erään yrityksen arkisto koostuu 4 hyllyköstä, joissa jokaisessa on 7 hyllyä. Jokaisessa hyllyssä on 5 laatikkoa vierekkäin.



Arkistoa voidaan kuvata koordinaatistomallilla, jossa lattiaa kuvaa xy -taso.

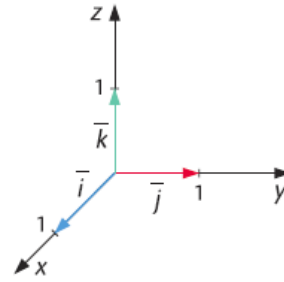
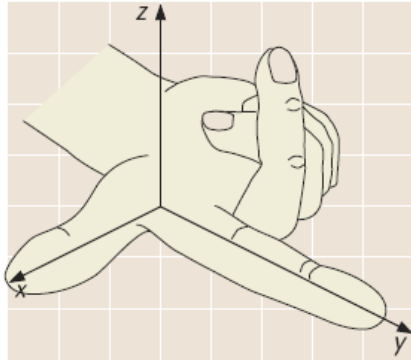
Jos hyllyköitä kuvaa koordinaatti x , laatikoita koordinaatti y ja hyllyjä koordinaatti z , niin missä sijaitsee asiakirja, joka on hyllykössä kolme, viidennessä laatikossa ja hyllyllä seitsemän?



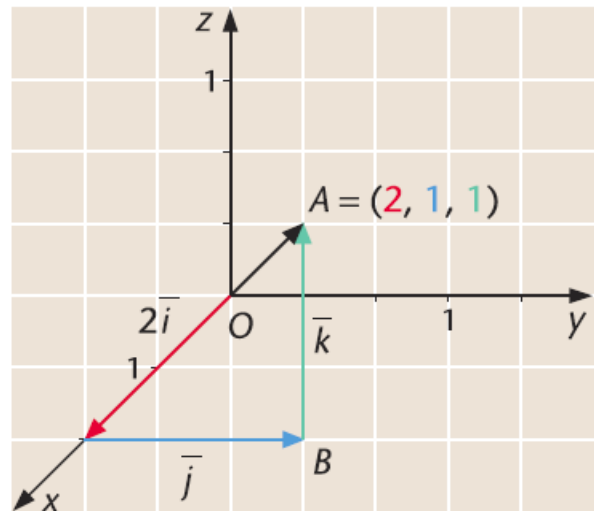


Paikkavektori avaruuskoordinaatistossa

- Kolmiulotteisen koordinaatiston kantavektorit ovat \bar{i} , \bar{j} ja \bar{k} .



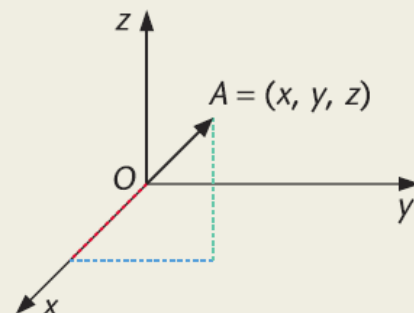
- Pisteen A paikkavektori avaruuskoordinaatistossa on vektori \overline{OA} .



PISTEEN (x, y, z) PAIKKAVEKTORI

Origosta pisteeseen $A = (x, y, z)$ piirretty vektori on

$$\overline{OA} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$





Esimerkkejä paikkavektorin käytöstä

Esimerkki 1

Koordinaatistoon on merkitty neljä pistettä A , B , C ja D .
Pisteen A koordinaatit ovat $(-1, 3, 5)$ ja pisteen B koordinaatit $(3, -2, 7)$.

- Muodosta paikkavektorit \overline{OA} ja \overline{OB} .
- Määritä paikkavektorin avulla pisteiden C ja D koordinaatit, kun $\overline{AC} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ ja $\overline{BD} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}$.



Esimerkki 2

Piste P jakaa janan AC suhteessa 3:2. Määritä pisteen P koordinaatit, kun $A = (-2, 1, 3)$ ja $C = (-7, 1, 13)$.



Vektorin pituus

Suorakulmaisen särmiön sivuvektorit:

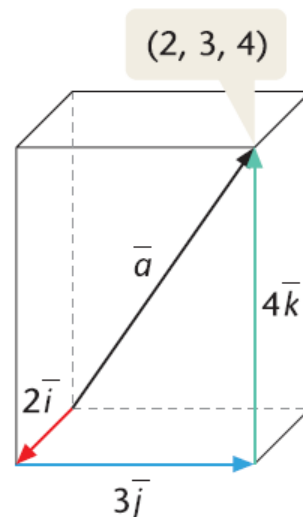
$$2\bar{i}, 3\bar{j}, 4\bar{k}.$$

Särmiön avaruuslävistäjä:

$$\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$$

Avaruuslävistäjän pituus:

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

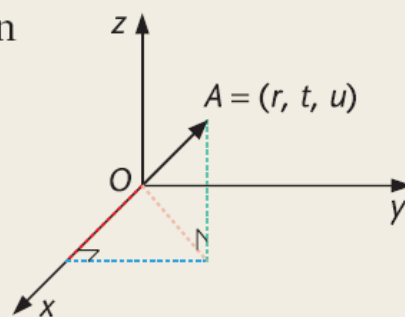


VEKTORIN PITUUS

Vektorin $\bar{a} = r\bar{i} + t\bar{j} + u\bar{k}$ pituus on

$$|\bar{a}| = \sqrt{r^2 + t^2 + u^2},$$

jossa r, t ja u ovat reaalilukuja.

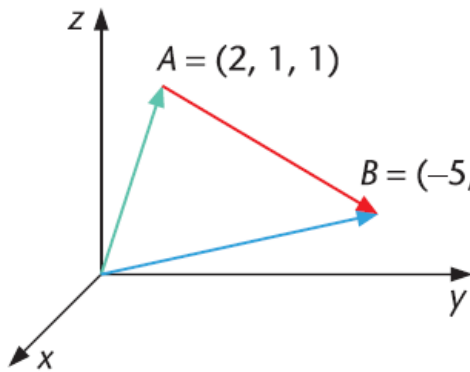


Esimerkki

Laske vektorin $\bar{b} = 3\bar{i} - 5\bar{j} - \bar{k}$ pituus.



Kahden pisteen välinen vektori



$$\overline{OA} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$$

$$\overline{OB} = -5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$= -5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k} - (2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$$

$$= (-5 - 2)\bar{i} + (2 - 1)\bar{j} + (-3 - 1)\bar{k}$$

$$= -7\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$$

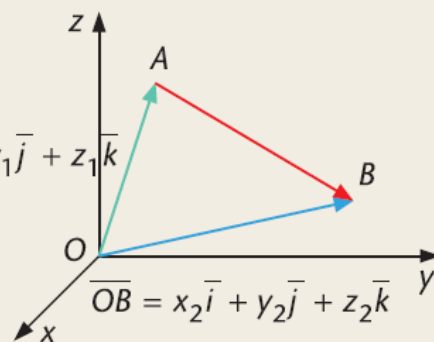
Loppupisteen koordinaateista vähennetään alkupisteen koordinaatit.

KAHDEN PISTEEN VÄLINEN VEKTORI

$$A = (x_1, y_1, z_1)$$

$$B = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\overline{OA} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$$



$$\overline{OB} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$$

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

Esimerkki 1

Määritä vektori \overline{AB} ja laske sen pituus, kun

a) $A(4, 5, 2)$ ja $B(2, 4, -3)$ b) $A(-6, 3, -1)$ ja $B(1, 3, -7)$.

Esimerkki 2

Piste P jakaa janan AB suhteessa 1:3. Määritä pisteen P koordinaatit, kun $A = (4, 1, 6)$ ja $B = (12, 5, -6)$.



xy-tason vektorien pistetulo

- ◆ Määritellään kahden tason vektorin $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ ja $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ **pistetulo** eli **skalaaritulo** seuraavasti:

TASON VEKTORIEN PISTETULO

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2,$$

$$\text{jossa } \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \text{ ja } \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

Esimerkki 1

Laske vektorien $\vec{v} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ ja $\vec{s} = -7\vec{i} - 3\vec{j}$ pistetulo.

Ratkaisu:

**Esimerkki 2**

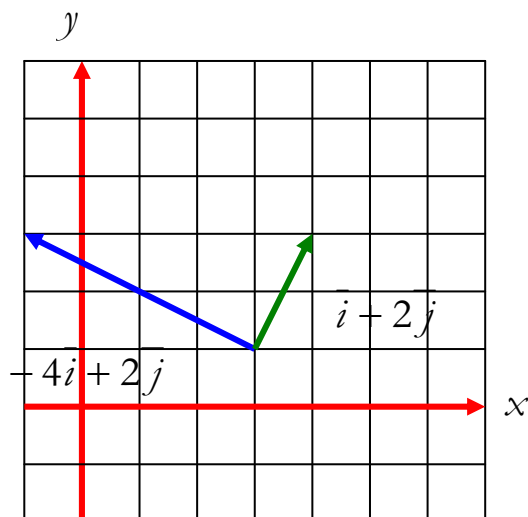
Määritä vakio t siten, että vektorien $\vec{x} = 3\vec{i} + (2 + t)\vec{j}$ ja $\vec{y} = 2t\vec{i} - 4\vec{j}$ pistetulo on -3 .

Ratkaisu:



Vektorien kohtisuoruus

- ♦ Vektoreiden $-4\bar{i} + 2\bar{j}$ ja $\bar{i} + 2\bar{j}$ välinen kulma on 90° , eli vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



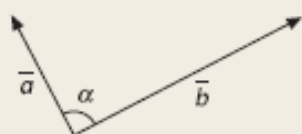
- ♦ Lasketaan näiden vektorien pistetulo:

$$(-4\bar{i} + 2\bar{j}) \cdot (\bar{i} + 2\bar{j}) =$$

- ♦ Jos kaksi vektoria ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niiden pistetulo on nolla.

VEKTORIEN KOHTISUORUUSEHTO

Jos $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, niin $\bar{a} \perp \bar{b}$ eli $\alpha = 90^\circ$.





Kohtisuoruusehdon käyttäminen

Esimerkki

Määritä vakio k siten, että vektorit $\vec{a} = k\vec{i} + \vec{j}$ ja $\vec{b} = (k-2)\vec{i} - 3\vec{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Ratkaisu:

Määritetään pistetulo vektoreille $\vec{a} = k\vec{i} + \vec{j}$ ja $\vec{b} = (k-2)\vec{i} - 3\vec{j}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden pistetulo on nolla. Näin saadaan toisen asteen yhtälö, josta ratkaistaan k :



Pistetulon määritelmä

- ◆ Tarkastellaan kahta vektoria \vec{a} ja \vec{b} . Pistetulo voidaan määritellä näiden **vektorien pituuksien** sekä niiden välisen **kulman kosinin** avulla seuraavasti:

VEKTORIEN \vec{a} ja \vec{b} PISTETULO

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

- $|\vec{a}|$ on vektorin \vec{a} pituus
- $|\vec{b}|$ on vektorin \vec{b} pituus
- α on vektorien välinen kulma

Esimerkki 1

Määritä vektorien \vec{s} ja \vec{t} pituudet, kun vektorin \vec{s} pituus on 3 yksikköä pienempi kuin vektorin \vec{t} . Lisäksi tiedetään, että vektorien välinen kulma on 60° ja vektorien pistetulo on 90.

**Esimerkki 2**

Määritä vektorien $\vec{s} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ ja $\vec{t} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ välinen kulma asteen tarkkuudella.

Ratkaisu:



Testi: Pistetulo

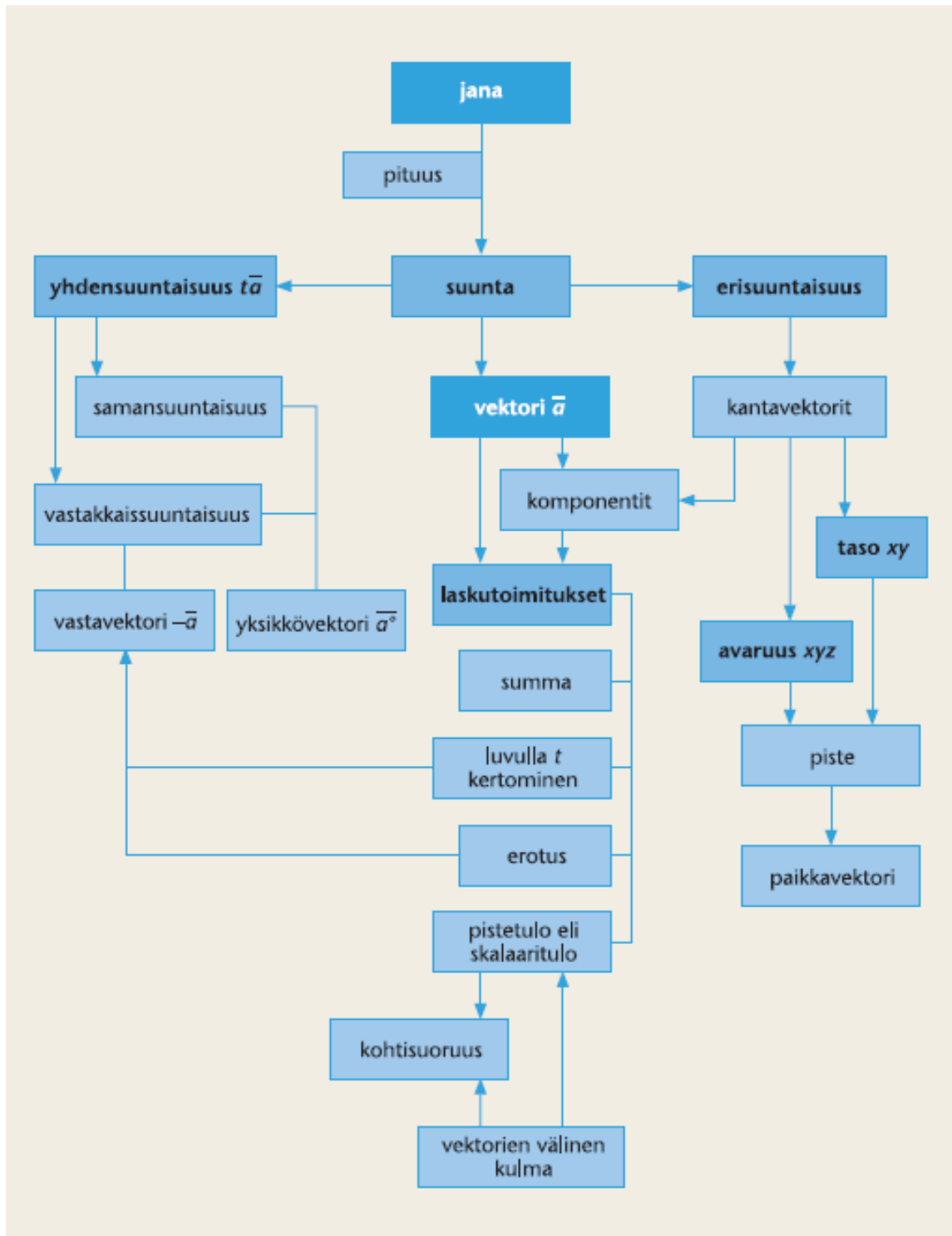
Nimi: _____

2. Laske vektorien $\vec{x} = -12\vec{i} + 7\vec{j}$ ja $\vec{y} = 9\vec{i} - 5\vec{j}$ pistetulo.

3. Määritä vektorien $\vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ välinen kulma asteen tarkkuudella.



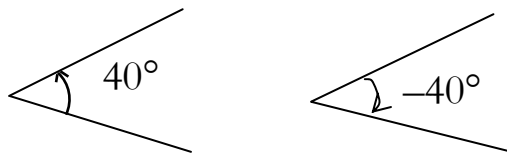
Keskeisiä käsitteitä vektoreista



Kertaus

Erilaisia kulmia ja kulmanyksiköitä

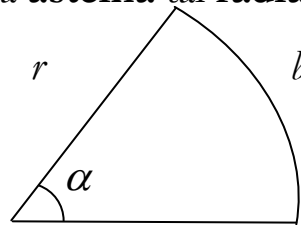
- ◆ **Suunnattu kulma** syntyy, kun kahdesta päällekkäin asetetusta puolisuorasta toinen jää paikalleen ja toista kierretään vastapäivään (positiivinen kulma) tai myötäpäivään (negatiivinen kulma).



- ◆ Kulman suuruus ilmoitetaan yleensä **asteina** tai **radiaaneina**.

- ◆ Radiaanin määritelmä:

$$a = \frac{b}{r}$$



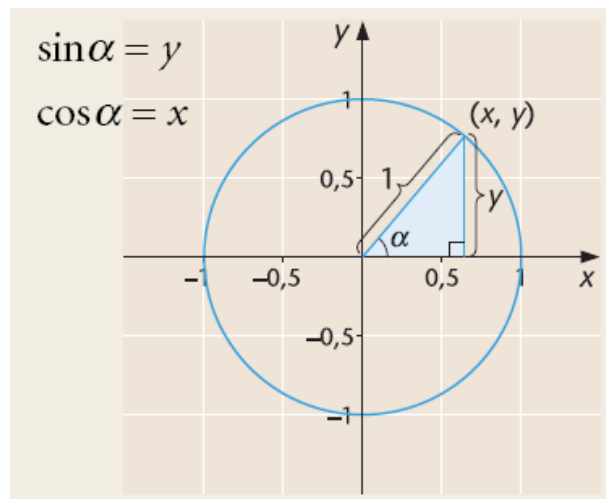
- ◆ Kulmanyksiköiden muuntaminen:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ (rad)} \quad 1 \text{ (rad)} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Sini, kosini ja tangenti

- ◆ **Trigonometrisista funktioista** sini ja kosini määritellään yksikköympyrän avulla seuraavasti:

sini on kulmaa α vastaavan kehäpisteen **y-koordinaatti** ja **kosini** **x-koordinaatti**.

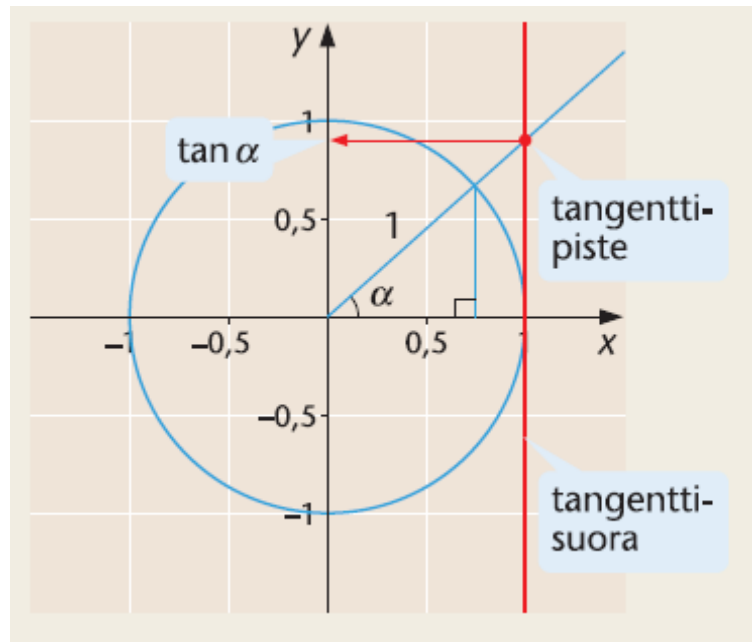


$$\sin \alpha = y$$

$$\cos \alpha = x$$

- ◆ **Tangentti** voidaan määrittellä pisteeseen $(1, 0)$ piirretyn **tangenttisuoran** avulla:

Kulman α **vasemman** kyljen ja tangenttisuoran leikkauspistettä sanotaan **tangenttipisteeksi**. Tämän pisteen y -koordinaatti on **$\tan \alpha$** .



- ◆ Trigonometrisia funktioita sitoo toisiinsa yhtälö

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- ◆ Trigonometrinen funktioiden merkki yksikköympyrän eri neljänneksissä:

Neljännes	Sini	Kosini	Tangentti
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

Siniyhtälö

- ◆ Yhtälön $\sin a = y$ ratkaisut ovat

$$a = a_0 + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad a = 180^\circ - a_0 + n \cdot 360^\circ,$$

jossa $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Kosini- ja tangenti yhtälöt

- ◆ Yhtälön $\cos \alpha = x$ ratkaisut ovat

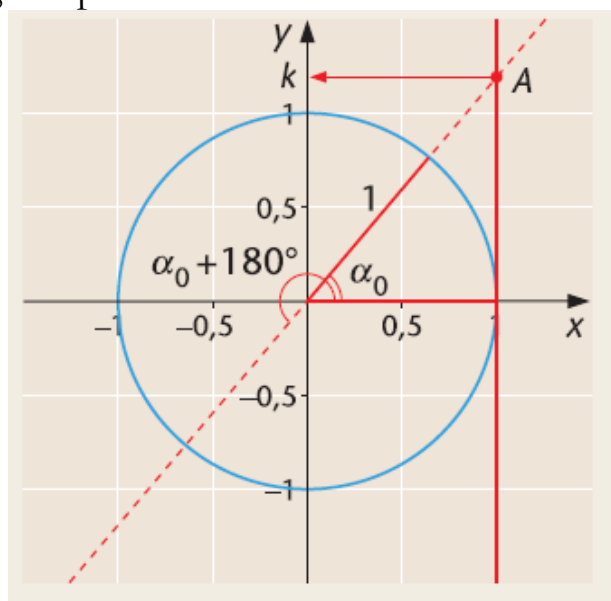
$$a = a_0 + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad a = -a_0 + n \cdot 360^\circ,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- ◆ Yhtälön $\tan \alpha = k$ ratkaisut ovat

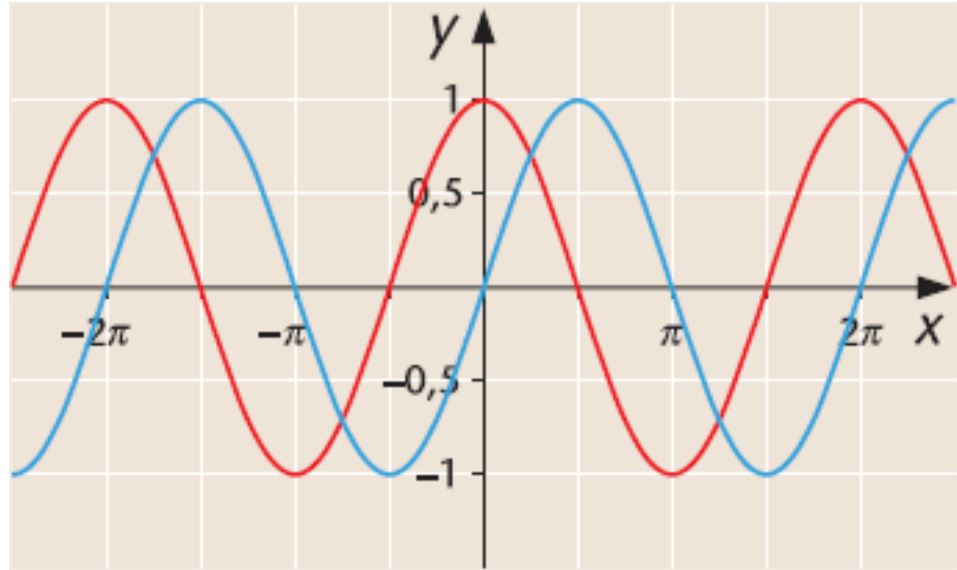
$$a = a_0 + n \cdot 180^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- ◆ Kulman tangentialipiste on A .

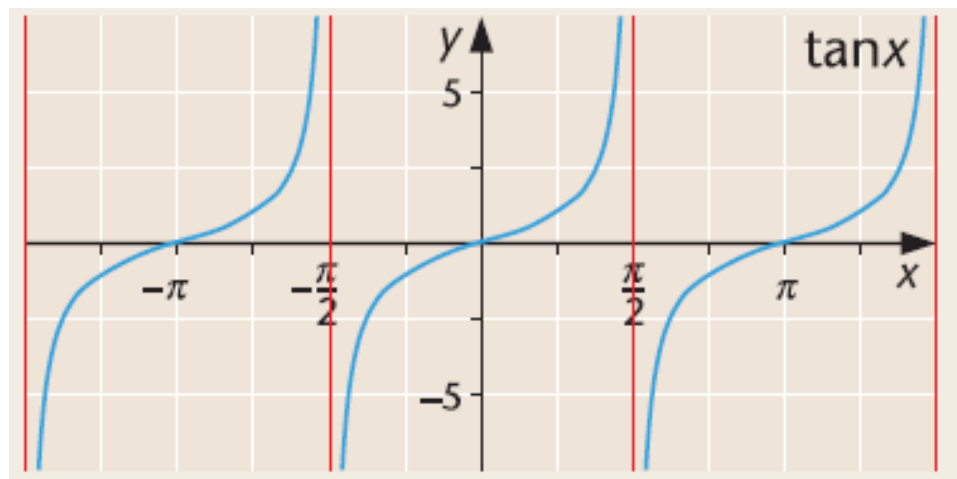


Trigonometrinen funktioiden jaksollisuus

- ◆ Sini ja kosini ovat **jaksollisia funktioita**. Molempien jakso on 2π , eli niiden arvot toistuvat 2π :n välein.



- ◆ Myös tangenti on jaksollinen funktio, mutta sen jaksona on π .



Sovelluksia

- ◆ Trigonometrisilla funktioilla voidaan mallintaa **jaksollisia ilmiöitä**, joita ovat esimerkiksi
 - harmoninen värähtely
 - vuoroveden vaihtelu
 - aaltoliike.

- ◆ **Aaltoliikkeen muotoja** ovat esimerkiksi
 - näkyvä valo
 - radioaallot
 - röntgensäteily
 - ääni
 - gravitaatioaallot.

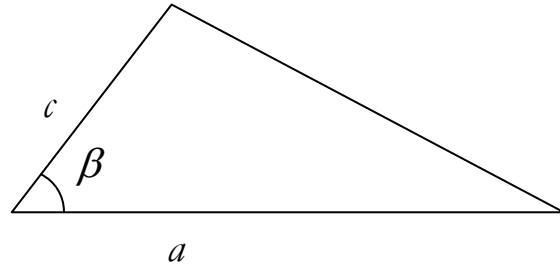
- ◆ Malleissa hyödynnetään kahta sinin ja kosinin ominaisuutta:
 1. Sini ja kosini on määritelty kaikilla reaalilukujen arvoilla.
 2. Sinin ja kosinin arvot vaihtelevat välillä $[-1, 1]$.

Esimerkiksi funktio $f(x) = 5 \sin x$ saa siis kaikki arvot väliltä $[-5, 5]$.

Kolmion ja suunnikkaan ala

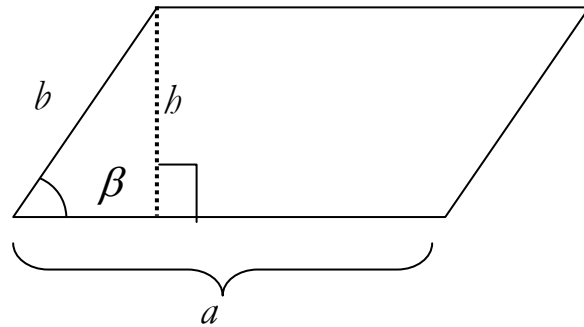
- ◆ **Kolmion ala** voidaan laskea, jos tunnetaan kaksi kolmion sivua sekä niiden välinen kulma:

$$A = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$



- ◆ **Suunnikkaan ala** kahden sivun ja niiden välisen kulman avulla laskettuna on

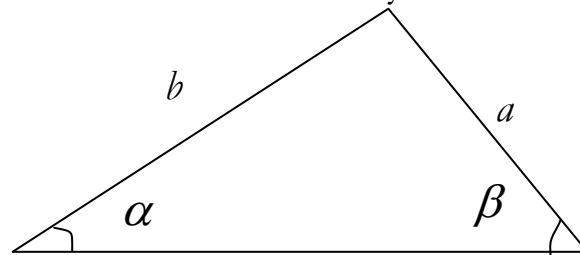
$$A = ab \sin \beta$$



Sinilause

- ◆ **Sinilauseen mukaan** kolmiolle on voimassa yhtälö

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

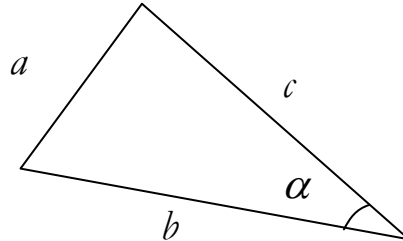


- ◆ Sinilauseen avulla voidaan ratkaista kolmion sivuja ja kulmia, kun tunnetaan
- kaksi sivua ja toisen sivun vastainen kulma
 - kaksi kulmaa ja toisen kulman vastainen sivu.

Kosinilause

- ◆ **Kosinilauseen** mukaan kolmiolle on voimassa yhtälö

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



- ◆ Lauseen avulla voidaan ratkaista kolmion kolmas sivu, kun kaksi sivua ja niiden välinen kulma tunnetaan.
- ◆ Myös kulmien ratkaiseminen on mahdollista, jos kolmiosta tunnetaan kaikki sivut.

Peruskäsitteitä

- ◆ **Yhdensuuntaisia vektoreita ovat:**

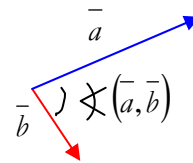
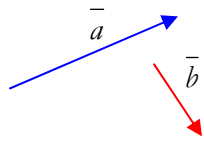
- samansuuntaiset vektorit, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$
- vastakkaissuuntaiset vektorit, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$
- vastavektorit, \vec{a} ja $-\vec{a}$
- identtiset eli yhtä suuret vektorit:
 $\vec{a} = \vec{b}$, kun
 $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ ja vektoreiden pituudet ovat samat.

- ◆ Yhdensuuntaisuutta merkitään $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

- ◆ **Yksikkövektori** saadaan, kun vektori jaetaan pituudellaan. Yksikkövektorin pituus on yksi yksikkö.

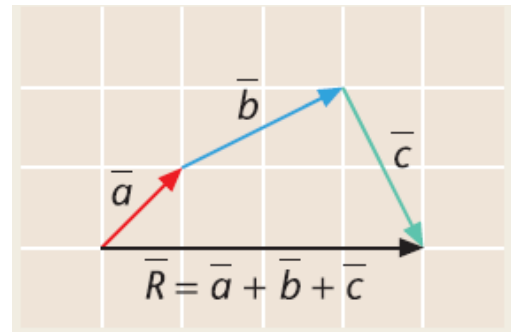
$$\vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \text{ jossa } |\vec{a}| \text{ on vektorin } \vec{a} \text{ pituus}$$

- ◆ **Nollavektorin** suuntaa ei ole määrätty, mutta sen pituus on nolla.
- ◆ **Erisuuntaiset vektorit** eivät ole yhdensuuntaisia. Tätä merkitään $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$.
- ◆ **Vektoreiden** \vec{a} ja \vec{b} **välinen kulma** α saadaan, kun vektorit asetetaan alkamaan samasta pisteestä, $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$.



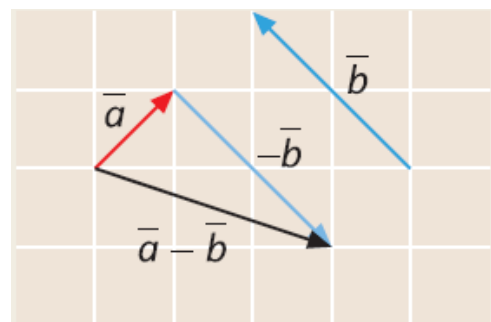
Laskutoimitukset

- ◆ Vektorit liitetään peräkkäin suuntansa ja pituutensa säilyttäen. Vektoreiden **summa** eli **resultantti** \vec{R} saadaan, kun ensimmäisen vektorin alkupiste yhdistetään viimeisen loppupisteeseen.



- ◆ Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} **erotus** $\vec{a} - \vec{b}$ saadaan lisäämällä vektoriin \vec{a} vektorin \vec{b} vastavektori $-\vec{b}$ eli

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$



- ◆ Vektoria \vec{a} voidaan **kertoa reaaliluvulla t** , jolloin vektorin pituus muuttuu ja suunta voi muuttua vastakkaiseksi tai pysyä samana.

$$t\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, \text{ jos } t > 0$$

$$t\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}, \text{ jos } t < 0$$

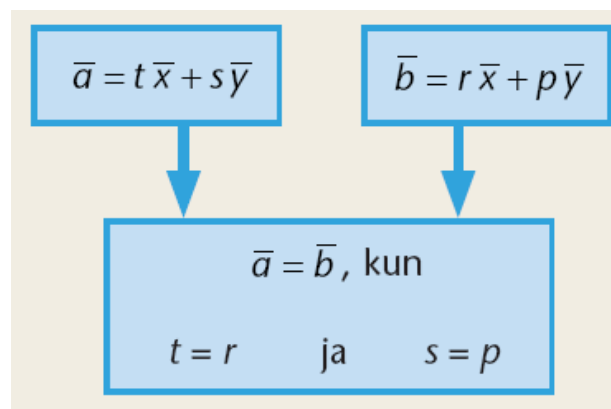
$$t\vec{a} = 0, t = 0$$

- ◆ Vektorit \vec{a} ja \vec{b} ovat yhdensuuntaisia eli

$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \text{ jos } \vec{a} = t\vec{b}, \text{ jossa } t \neq 0$$

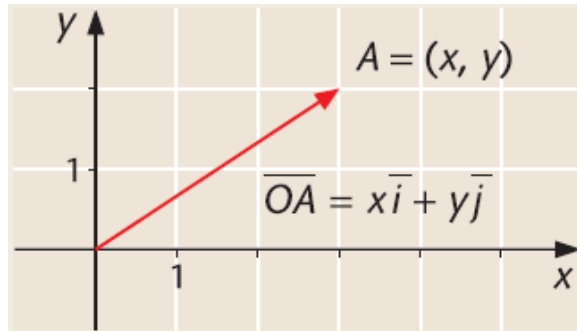
Komponentteihin jako

- ◆ Tason vektorit voidaan jakaa kahteen erisuuntaiseen **komponenttiin**. Avaruusvektorien komponenttiesitykseen tarvitaan kolme erisuuntaista vektoria. Komponenttien summana saadaan tarkasteltava vektori.
- ◆ Vektorit ovat yhtä suuret eli identtiset, kun niiden komponentit ovat samat



Vektorit xy -koordinaatistossa

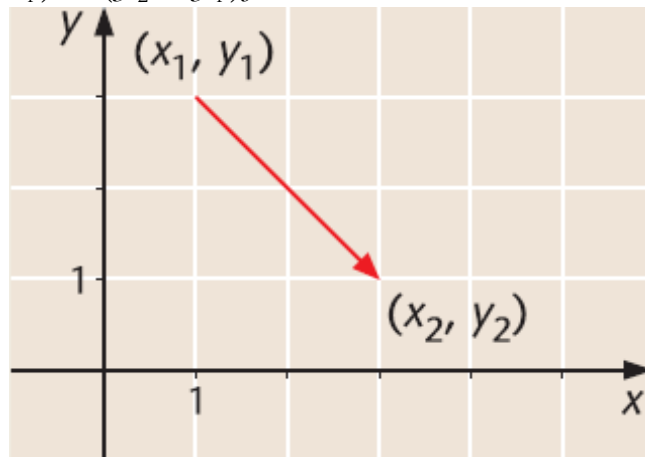
- ◆ xy -tason **kantavektorit** ovat \bar{i} ja \bar{j} .
- ◆ Pisteen $A = (x, y)$ **paikkavektori** on origosta pisteeseen A piirretty vektori \overline{OA} .



- ◆ Vektorin $\bar{a} = r\bar{i} + t\bar{j}$ **pituus** on

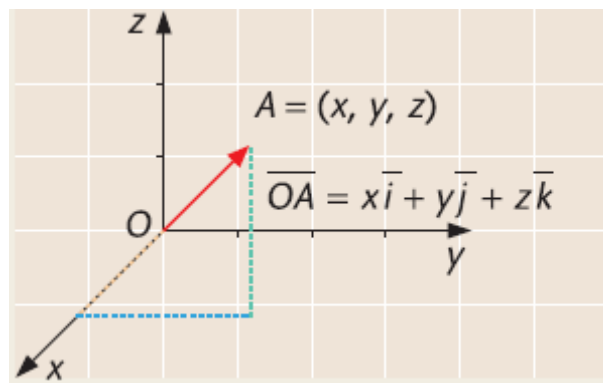
$$|\bar{a}| = \sqrt{r^2 + t^2}.$$
- ◆ **Pisteiden** $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ **välinen vektori** on

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}.$$



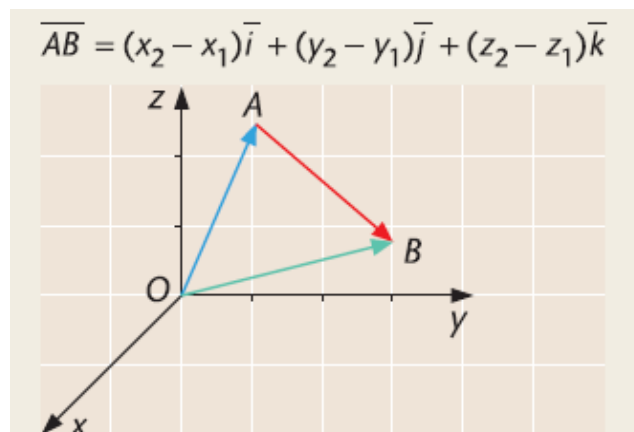
Vektorit xyz-koordinaatistossa

- ◆ Avaruuden xyz **kantavektorit** ovat \bar{i} , \bar{j} ja \bar{k} .
- ◆ Jokainen avaruuden xyz vektori voidaan esittää kantavektoreiden avulla **komponenttiensa** summana.



- ◆ Pisteiden $A = (x, y, z)$ **paikkavektori** on origosta pisteeseen A piirretty vektori \overline{OA} .
- ◆ Vektorin $\bar{a} = r\bar{i} + t\bar{j} + u\bar{k}$ **pituus** on

$$|\bar{a}| = \sqrt{r^2 + t^2 + u^2}.$$
- ◆ **Pisteiden** $A = (x_1, y_1, z_1)$ ja $B = (x_2, y_2, z_2)$ **välinen vektori** on



Vektoreiden pistetulo

◆ **Pistetulo** eli **skalaaritulo** voidaan laskea kahdella eri tavalla:

1) Jos tiedetään vektoreiden välinen kulma α sekä vektoreiden pituudet, niin

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha.$$

2) Jos vektoreiden välistä kulmaa ei tiedetä, niin

$$\text{tasossa } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \text{ ja}$$

$$\text{avaruudessa } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

◆ Pistetulon arvo on aina reaaliluku. Jos pistetulo on nolla, niin vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ niin } \vec{a} \perp \vec{b} \text{ eli } \alpha = 90^\circ$$

◆ **Vektoreiden välinen kulma** saadaan pistetulon avulla

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$



Monivalintakysymyksiä kurssista

Valitse **yksi** neljästä vaihtoehdosta.

- 1,34 radiaania on asteina likimain
 - a) 134°
 - b) 77°
 - c) $1,34^\circ$
 - d) $0,023^\circ$.
2. Lausekkeen $\sin \frac{2\pi}{7}$ likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella on
 - a) 1,11
 - b) 0,02
 - c) 0,89
 - d) 0,78.
3. Kulma, jonka suuruus on $\frac{4\pi}{3}$, sijaitsee
 - a) 1. neljänneksessä
 - b) 2. neljänneksessä
 - c) 3. neljänneksessä
 - d) 4. neljänneksessä.
4. Yhtälön $\sin x = 0,52$ ratkaisu kahden merkitsevän numeron tarkkuudella on
 - a) $x \approx \pm 31^\circ + n \cdot 360^\circ$
 - b) $x \approx 31^\circ + n \cdot 360^\circ$ tai $x \approx 149^\circ + n \cdot 360^\circ$
 - c) $x \approx 31^\circ + n \cdot 180^\circ$ tai $x \approx 149^\circ + n \cdot 180^\circ$
 - d) $x \approx 31^\circ + n \cdot 180^\circ$.
5. Yhtälön $\tan x = 120$ ratkaisu kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella on
 - a) $x \approx 1,56 + n \cdot \pi$
 - b) $x \approx \pm 1,56 + n \cdot 2\pi$
 - c) $x \approx \pm 1,56 + n \cdot \pi$
 - d) $x \approx 1,56 + n \cdot 2\pi$.
6. Kolmion sivujen pituudet ovat 14 cm ja 19 cm, ja niiden välinen kulma on 49° . Kolmion ala on siis likimain
 - a) 200
 - b) 175
 - c) 125
 - d) 100.

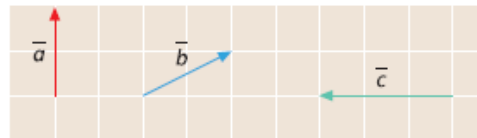
7. Mikä seuraavista väitteistä ei pidä paikkaansa?
- Vektorit ovat yhtä suuret, jos niillä on sama pituus.
 - Vastakkaissuuntaiset vektorit ovat yhdensuuntaisia.
 - Samansuuntaiset vektorit ovat yhdensuuntaisia.
 - Jos kaksi vektoria on toistensa vastavektoreita, niillä on sama pituus.

8. Jos $A = (-2, 3)$ ja $B = (8, 10)$,

- $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 7\vec{j}$
- $\overrightarrow{AB} = 10\vec{i} + 7\vec{j}$
- $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} - 7\vec{j}$
- $\overrightarrow{AB} = -10\vec{i} - 7\vec{j}$.

9. Mikä seuraavista väitteistä pitää paikkansa?

- $\vec{a} = \vec{b}$
- $\vec{a} \parallel \vec{c}$
- $\vec{a} = \vec{b}$
- $\vec{a} \nparallel \vec{c}$



10. Vektorin $\vec{c} = 6\vec{i} - \vec{j}$ pituus on

- 7
- $\sqrt{7}$
- $\sqrt{35}$
- $\sqrt{37}$.

11. Vektorit $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 7\vec{j}$ ja $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Tällöin pisteen B koordinaatit ovat

- (2, 7)
- (3, 10)
- (1, 3)
- (1, 4).

12. Pisteen $(-1, 3, -2)$ paikkavektori on

- $\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$
- $-\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$
- $\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$
- $-\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

13. Vektorien $\vec{a} = -2\vec{i} + 9\vec{j}$ ja $\vec{b} = -5\vec{i} - 3\vec{j}$ pistetulo on

- a) -37
- b) 17
- c) -17
- d) 37 .

14. Seuraavilla kulmilla, yhtä lukuun ottamatta, on sama kehäpiste. Mikä kulmista eroaa näin muista?

- a) 50°
- b) -50°
- c) 310°
- d) 670°

15. Yhtälön $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tarkka ratkaisu välillä $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on

- a) $\beta = \frac{\pi}{3}$
- b) $\beta = \frac{2\pi}{3}$
- c) $\beta = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$
- d) $\beta = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$.

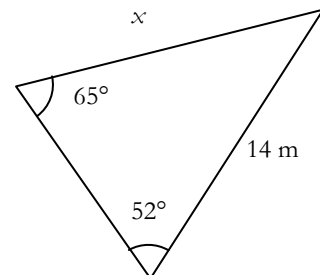
16. Funktio $g(t) = 0,90 \cos \frac{\pi t}{12} + 3,5$ kuvaa veden syvyyttä metreinä satamassa. Aika t on tunteja

hetkestä, jolloin syvyys on suurimmillaan. Mikä on suurin syvyys?

- a) $3,5$ m
- b) $0,90$ m
- c) $4,4$ m
- d) $2,6$ m

17. Minkä yhtälön avulla voidaan ratkaista sivun pituus x ?

- a) $\frac{x}{\sin 65^\circ} = \frac{14}{\sin 52^\circ}$
- b) $\frac{x}{\sin 52^\circ} = \frac{14}{\sin 65^\circ}$
- c) $65^2 = 14^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot 14 \cdot \cos 52^\circ$
- d) $52^2 = 14^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot 14 \cdot \cos 65^\circ$



18. Vektorille $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ on

- a) $\vec{a}^0 = \vec{i} - \vec{j}$
 b) $\vec{a}^0 = \frac{1}{5}\vec{i} - \frac{1}{5}\vec{j}$
 c) $\vec{a}^0 = 1$
 d) $\vec{a}^0 = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$.

19. Mikä seuraavista vektoreista ei ole yhdensuuntainen vektorin $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ kanssa?

- a) $-\vec{a} - \vec{b}$
 b) $\vec{a} + 2\vec{b}$
 c) $3\vec{a} + 3\vec{b}$
 d) $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

20. Mikä seuraavista väitteistä ei pidä paikkaansa vektorille $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$?

- a) \vec{v} on pisteen $(1, -1, -5)$ paikkavektori.
 b) \vec{v} on yhdensuuntainen vektorin $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$ kanssa.
 c) $|\vec{v}| = 7$
 d) \vec{v} on kohtisuorassa vektoria $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ vastaan.

21. Vektorien \vec{a} ja \vec{b} pituudet ovat 10 ja 15, ja niiden välinen kulma on 60° . Tällöin

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 75$
 b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 150$
 c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
 d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 130$.

22. Neljäkkään sivun pituus 7,0 cm. Sivujen välinen kulma on 38° , eli neljäkkään ala on likimain

- a) 30 cm^2
 b) 49 cm^2
 c) 15 cm^2
 d) 60 cm^2 .

Monivalintakysymysten oikea rivi:

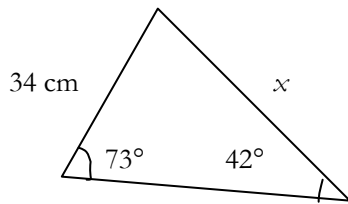
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	B	A	D	A	B	D	D	B	D

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
C	A	A	C	B	D	B	C	A	A	

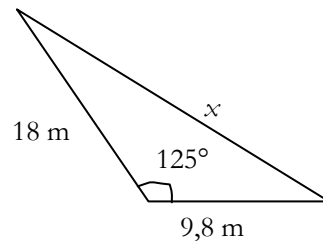
Koe 1

- Ratkaise yhtälöt radiaaneina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
 - $\sin x = 0,282$
 - $\tan 2x = 12$
- Piirrä xy -koordinaatistoon vektorit $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ ja $\vec{b} = -\vec{i} - 4\vec{j}$. Laske näiden vektorien pituudet (tarkat arvot). Määritä lisäksi summavektori $\vec{a} + \vec{b}$ ja erotusvektori $\vec{a} - \vec{b}$.
- Ratkaise kuviosta sivun pituus x .

a)



b)



Valitse tehtävä 4 tai 5.

- Määritä vektorien $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ välinen kulma asteen tarkkuudella.
- Määritä vakio q siten, että vektorien $\vec{x} = q\vec{i} - 15\vec{j}$ ja $\vec{y} = (q+5)\vec{i} + 3\vec{j}$ pistetulo on 21.

Valitse kaksi tehtävistä 6, 7 ja 8.

- Piste Q jakaa janan AB suhteessa 1:2. Määritä pisteen Q koordinaatit, kun $A = (2, 3, -2)$ ja $B = (-5, 8, 4)$.
- Funktio $h(t) = 1,3 \cos \frac{\pi t}{12} + 3,6$ kuvaa veden korkeutta metreinä satamassa. Muuttuja t ilmaisee ajan tunteina alkaen keskiyöstä ja t saa arvoja välillä $[0, 24]$.
 - Mikä on veden korkeus suurimmillaan?
 - Mikä on veden korkeus pienimmillään?
 - Mikä on veden korkeus kello 5.30?
- Jaa vektori $-3\vec{a} - 12\vec{b}$ vektorien $\vec{a} - 2\vec{b}$ ja $4\vec{a} + \vec{b}$ suuntaisiin komponentteihin.

Koe 2

Vastaa yhteensä 8 tehtävään!

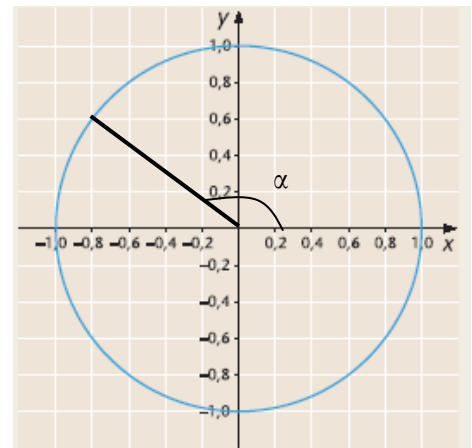
Trigonometria

Vastaa neljään (4) tehtävään.

1. a) Muuta kulmat suluisissa annettuun yksikköön. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

- I) 42° (rad)
- II) $2,1\pi$ ($^\circ$)
- III) 190 ($^\circ$)

b) Määritä viereisen kuvan avulla kulman α sinin, kosinin ja tangentin arvo yhden desimaalin tarkkuudella.



2. Ratkaise yhtälöt. Anna vastaus asteen tarkkuudella.

- a) $\sin \alpha - 0,8 = 0$
- b) $\tan 2\alpha + 13 = 6$

3. Määritä taulukkokirjan avulla yhtälöiden tarkat ratkaisut radiaaneina.

- a) $\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$
- b) $2 \sin 2x - \sqrt{3} = 0$

4. Piirrä funktion $f(x) = \sin 2x$ kuvaaja. Mikä on funktion jakso? (Muuttujan x yksikkönä voit käyttää joko asteita tai radiaaneja.)

5. Maailmanpyörässä olevan vaunun etäisyyttä maan pinnasta metreinä kuvaa funktio

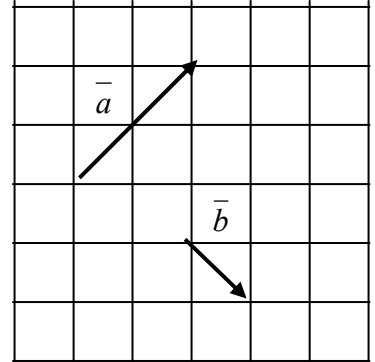
$$h(x) = 15 \sin\left(\frac{\pi}{14}x\right) + 18, \text{ jossa } x \text{ on aika sekunteina tarkastelun alusta lukien.}$$

- a) Mikä on vaunun etäisyys maan pinnasta, kun aikaa on kulunut 10 sekuntia?
- b) Kuinka korkealla vaunu käy?
- c) Milloin vaunun korkeus maan pinnasta on ensimmäisen kerran 5 m?

Vektorit

Vastaa neljään (4) tehtävään.

6. Piirrä annettujen vektoreiden avulla vektorit $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ ja $\vec{d} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$. Määritä kuvan avulla perustellen vektorien \vec{a} ja \vec{b} välinen kulma.



7. Koordinaatistoon on merkitty kolme pistettä: $A = (4, 3)$, $B = (-3, 7)$ ja $C = (3, -6)$.

- Muodosta paikkavektori \vec{OA} sekä vektorit \vec{AB} ja \vec{BC} .
- Muodosta vektorin \vec{OA} yksikkövektori.
- Laske vektorien \vec{AB} ja \vec{BC} pistetulo. Ovatko vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan?

8. Millä vakioiden s ja t arvoilla vektorit $-7\vec{a} + 8\vec{b}$ ja $t(\vec{a} - 2\vec{b}) + s(4\vec{a} - 5\vec{b})$ ovat samat?

9. Jaa vektori $-\vec{i} + 8\vec{j}$ vektorien $2\vec{i} - \vec{j}$ ja $\vec{i} + \vec{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

10. Kolmion ABC kaksi pisteestä A lähtevää sivuvektoria ovat $\vec{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ ja $\vec{AC} = -5\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$. Piste P jakaa sivun BC suhteessa 2:3. Määritä pisteen P koordinaatit, kun $A = (1, -3, 6)$.

Koe 3

Tehtävät 1–4 ovat pakollisia.

- Ratkaise yhtälö. Määritä ratkaisut asteina yhden desimaalin tarkkuudella.
 - $\sin 2x = 0,6$
 - $\tan x = 0,7$
 - $\cos(-x) + 2 = 2,6$
- Määritä lausekkeen $3\sin(-x) + \frac{5}{6}$ nollakohdat. Anna vastaus radiaaneina kahden desimaalin tarkkuudella.
- Olkoon $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ja $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j}$. Laske
 - $\vec{a} + \vec{b}$
 - $\vec{a} - 2\vec{b}$
 - $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- Jaa vektori $\vec{p} = -\vec{a} - 7\vec{b} + 5\vec{c}$ vektoreiden $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ ja $\vec{v} = -\vec{b} + \vec{c}$ suuntaisiin komponentteihin.

Tehtävistä 5–7 valitaan kaksi.

- Tasossa on annettu pisteet $A = (-2, 4)$, $B = (3, 5)$ ja $C = (2, -1)$. Esitä vektorit \vec{AB} ja \vec{AC} yksikkövektoreiden \vec{i} ja \vec{j} avulla sekä päättele vektoreiden pituuksien neliöiden nojalla, kumpi pisteistä B ja C on lähempänä pistettä A .
- Laske vektoreiden $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ välinen kulma. Määritä lisäksi \vec{a}° ja \vec{b}° .
- Kartalla olevat kaksi kaupunkia A ja B sijaitsevat pisteissä $A = (-13, 6)$ ja $B = (5, 12)$. Kaupunkeja yhdistää suora moottoritie. Tiehen valmistuu uusi liittymä, joka jakaa moottoritien AB suhteessa 3:4. Miten kaukana liittymä on huonekaluliikkeestä, joka sijaitsee kartan pisteessä $C = (4, -5)$? Kartan yksikkö on kilometri.

Koe 1

1. a)

$$\sin x = 0,282$$

$$x = 0,285\dots + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - 0,285\dots + n \cdot 2\pi$$

$$x \approx 0,29 + n \cdot 2\pi$$

$$x \approx 2,86 + n \cdot 2\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

b)

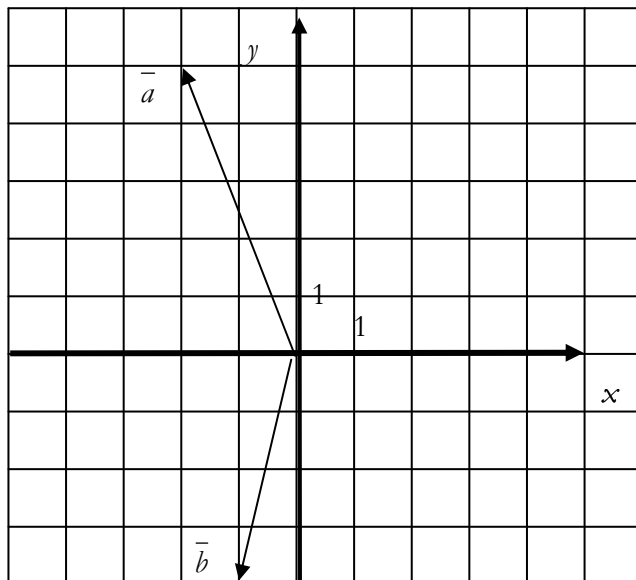
$$\tan 2x = 12$$

$$2x = 1,487\dots + n \cdot \pi$$

$$x = 0,743\dots + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$x \approx 0,74 + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2.



$$\bar{a} + \bar{b} = (-2\bar{i} + 5\bar{j}) + (-\bar{i} - 4\bar{j}) = -3\bar{i} + \bar{j}$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (-2\bar{i} + 5\bar{j}) - (-\bar{i} - 4\bar{j}) = -\bar{i} + 9\bar{j}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

3.

a) Sinilauseella saadaan

$$\frac{x}{\sin 73^\circ} = \frac{34}{\sin 42^\circ}$$

$$\sin 42^\circ x = 34 \cdot \sin 73^\circ \quad | : \sin 42^\circ$$

$$x = \frac{34 \cdot \sin 73^\circ}{\sin 42^\circ} = 48,59... \approx 49 \text{ (cm)}$$

Pituus on siis $x \approx 49$ cm.

b) Kosinilauseella saadaan

$$x^2 = 18^2 + 9,8^2 - 2 \cdot 18 \cdot 9,8 \cdot \cos 125^\circ$$

$$x^2 = 622,397...$$

$$x = \pm 24,947...$$

Koska x on pituus, niin $x \approx 25$ (m).Pituus on siis $x \approx 25$ m.

4. Vektoreiden välinen kulma saadaan pistetulolla.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{-18}{\sqrt{13} \sqrt{25}} = -0,998...$$

$$\alpha = 176,82...^\circ \approx 177^\circ$$

5.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = q(q+5) + (-15) \cdot 3 = q^2 + 5q - 45$$

Saadaan yhtälö

$$q^2 + 5q - 45 = 21$$

$$q^2 + 5q - 66 = 0$$

$$q = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (-66)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-5 \pm 17}{2}$$

$$q = 6 \quad \text{tai} \quad q = 11$$

6.

$$\text{Vektori } \vec{AB} = (-5 - 2)\vec{i} + (8 - 3)\vec{j} + (4 - (-2))\vec{k} = -7\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Määritetään pisteen Q paikkavektori $\vec{OQ} = \vec{OA} + \vec{AQ}$.

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} + \frac{1}{3}\vec{AB} \\ &= 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} + \frac{1}{3}(-7\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}) \\ &= 4\frac{2}{3}\vec{i} + 4\frac{2}{3}\vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{Siis piste } Q = \left(4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3}, 0\right).$$

7.

Korkeutta kuvaa funktio $b(t) = 1,3 \cos \frac{\pi t}{12} + 3,6$, t kuuluu välille $[0, 24]$.

- a) Koska $-1 \leq \cos x \leq 1$, niin funktio b on suurimmillaan, kun kosinin arvo on 1 eli $\cos \frac{\pi t}{12} = 1$. Korkeus on siis tällöin $1,3 \cdot 1 + 3,6 = 4,9$ (m).
- b) Koska $-1 \leq \cos x \leq 1$, niin funktio b on pienimmillään, kun kosinin arvo on -1 eli $\cos \frac{\pi t}{12} = -1$. Korkeus on siis tällöin $1,3 \cdot (-1) + 3,6 = 2,3$ (m).
- c) Veden korkeus klo 5.30 saadaan, kun keskiyöstä on kulunut 5,5 tuntia eli $b(5,5) = 1,3 \cos \frac{5,5\pi}{12} + 3,6 = 3,769\dots \approx 3,8$ (m).

Vastaus: a) 4,9 m b) 2,3 m c) 3,8 m

8.

Määritetään vakiot r ja t siten, että $-3\bar{a} - 12\bar{b} = r(\bar{a} - 2\bar{b}) + t(4\bar{a} + \bar{b})$.

Komponenttien pitää olla samat yhtälön molemmilla puolilla, joten saadaan ehdot

$$\begin{cases} -3 = r + 4t & | \cdot 2 \\ -12 = -2r + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 = 2r + 8t \\ -12 = -2r + t \end{cases}$$

$$\hline -18 = 9t$$

$$t = -2$$

Kun $t = -2$, niin saadaan $-3 = r + 4 \cdot (-2)$ eli $r = 5$.

Komponentit ovat siis

$$r(\bar{a} - 2\bar{b}) = 5(\bar{a} - 2\bar{b}) \text{ ja } t(4\bar{a} + \bar{b}) = -2(4\bar{a} + \bar{b}).$$

Koe 2

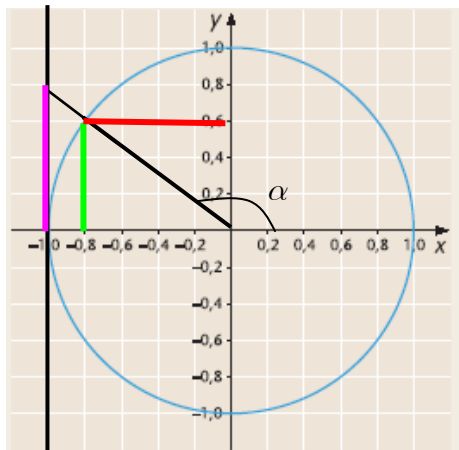
1. a) Asteiden ja radiaanien välillä on yhteys: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ (rad) ja $1(\text{rad}) = \frac{180^\circ}{\pi}$.

$$\text{I } 42^\circ = 42 \cdot \frac{\pi}{180} = 0,7330... \approx 0,733$$

$$\text{II } 2,1\pi = 2,1\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 378^\circ$$

$$\text{III } 190 = 190 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 10\,886,1...^\circ \approx 10\,900^\circ$$

b)



$$\sin \alpha \approx 0,6$$

$$\cos \alpha \approx -0,8$$

$$\tan \alpha \approx 0,8$$

2.

a)

$$\sin \alpha - 0,8 = 0$$

$$\sin \alpha = 0,8$$

$$\alpha = 53,13...^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\text{tai } \alpha = 180^\circ - 53,13...^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\alpha \approx 53^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\alpha \approx 127^\circ + n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

b)

$$\tan 2\alpha + 13 = 6$$

$$\tan 2\alpha = -7$$

$$2\alpha = -81,86...^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\alpha = -40,93...^\circ + n \cdot 90^\circ$$

$$\alpha \approx \underbrace{-41^\circ}_{319^\circ} + n \cdot 90^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3.

a)

$$\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \frac{7\pi}{4} + n \cdot 2\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

b)

$$2 \sin 2x - \sqrt{3} = 0$$

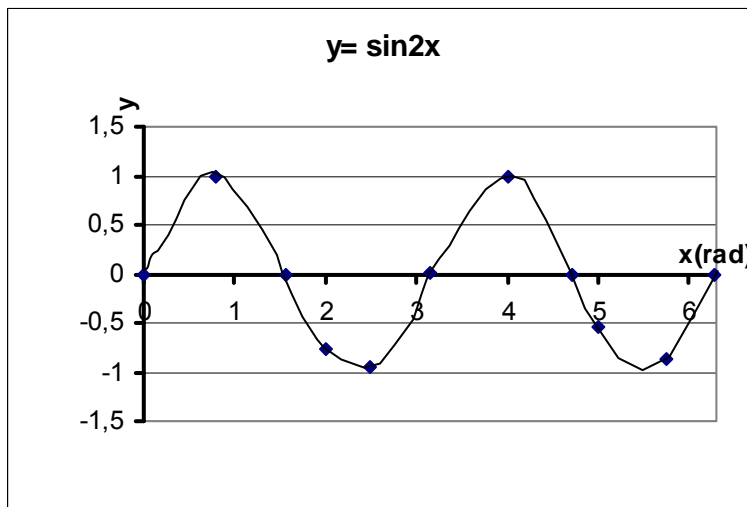
$$2 \sin 2x = \sqrt{3}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x = \frac{\pi}{6} + m\pi \quad \quad x = \frac{\pi}{3} + m\pi$$

4.

Funktio. $f(x) = \sin 2x$ 

Jakso nähdään kuvasta. Se on π .

5.

Etäisyyttä (m) kuvaa funktio $h(x) = 15 \sin\left(\frac{\pi}{14}x\right) + 18$, jossa x on aika sekunteina.

a) $h(10) = 15 \sin\left(\frac{\pi}{14} \cdot 10\right) + 18 = 29,727\dots \approx 30(\text{m})$

b) Vaunun korkeus on suurin, kun sinin arvo on suurin. Koska $\sin x = 1$ on sinin suurin arvo, niin suurin vaunun korkeus on $15 \cdot 1 + 18 = 33$ (m).

c) Tarkastelu alkaa hetkellä $t = 0$, jolloin vaunun korkeus on $h(0) = 15 \sin 0 + 18 = 18(\text{m})$.
Korkeus on 5 (m), kun $h(x) = 5$.

$$15 \sin\left(\frac{\pi}{14}x\right) + 18 = 5$$

$$15 \sin\left(\frac{\pi}{14}x\right) = -13 \quad | :15$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{14}x\right) = -\frac{13}{15}$$

$$\frac{\pi}{14}x = -1,048\dots + n \cdot 2\pi \quad \left| \cdot \frac{14}{\pi} \right. \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{14}x = \pi - (-1,048\dots) + n \cdot 2\pi$$

$$x = -4,672\dots + 28n$$

$$\frac{\pi}{14}x = 4,19\dots + n \cdot 2\pi \quad \left| \cdot \frac{14}{\pi} \right.$$

$$x = 18,672\dots + 28n$$

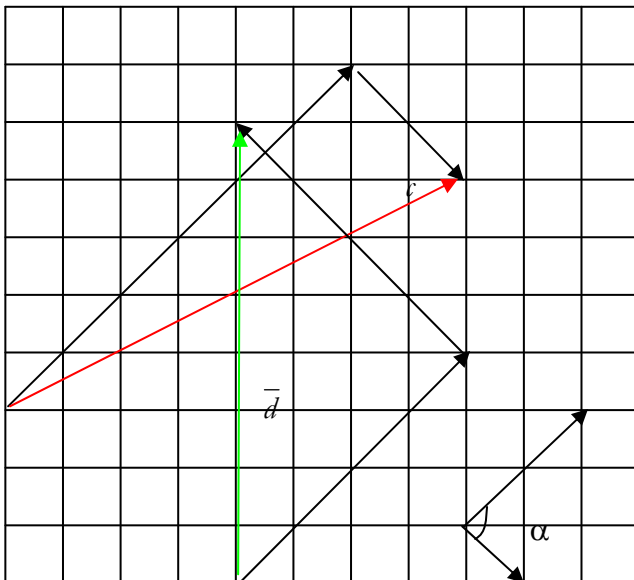
Koska tarkastelun alkuhetki on $t = 0$, niin $t > 0$. Lasketaan mahdollisia aikoja:

$$x = -4,672\dots + 28 \cdot 1 = 23,3\dots$$

$$x = 18,672\dots + 28 \cdot 0 = 18,672\dots < 23,3\dots$$

Ensimmäisen kerran vaunun korkeus on 5 m, kun aikaa on kulunut $18,672\dots \text{ s} \approx 19 \text{ s}$.

6.



Vektorin \vec{a} ja \vec{b} välinen kulma nähdään, kun vektorit asetetaan alkamaan samasta pisteestä. Koska ruudukko on suorakulmainen, ruudun lävistäjä on 45° kulmassa vaakatasoon nähden. Vektorit ovat ruudun lävistäjien suuntaisia. Kuvasta voidaan siis päätellä, että vektoreiden välinen kulma on $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

$$7. A = (4, 3), B = (-3, 7) \text{ ja } C = (3, -6)$$

$$a) \overline{OA} = 4\bar{i} + 3\bar{j}, \overline{AB} = (-3 - 4)\bar{i} + (7 - 3)\bar{j} = -7\bar{i} + 4\bar{j},$$

$$\overline{BC} = (3 - (-3))\bar{i} + (-6 - 7)\bar{j} = 6\bar{i} - 13\bar{j}$$

$$b) \overline{OA}^\circ = \frac{4\bar{i} + 3\bar{j}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}\bar{i} + \frac{3}{5}\bar{j}$$

$$c) \overline{AB} \cdot \overline{BC} = -7 \cdot 6 + 4 \cdot (-13) = -94 \neq 0$$

Koska pistetulo ei ole nolla, vektorit eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

8.

Vektoreiden yhtäsuuruus tarkoittaa

$$-7\bar{a} + 8\bar{b} = t(\bar{a} - 2\bar{b}) + s(4\bar{a} - 5\bar{b})$$

$$-7\bar{a} + 8\bar{b} = t\bar{a} - 2t\bar{b} + 4s\bar{a} - 5s\bar{b}$$

$$-7\bar{a} + 8\bar{b} = (t + 4s)\bar{a} + (-2t - 5s)\bar{b}$$

Yhtäsuuruudesta saadaan ehdot:

$$\begin{cases} -7 = t + 4s & | \cdot 2 \\ 8 = -2t - 5s \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14 = 2t + 8s \\ 8 = -2t - 5s \end{cases}$$

$$\hline -6 = 3s$$

$$s = -2$$

Kun $s = -2$, saadaan $-7 = t + 4 \cdot (-2)$ eli $t = 1$.

Vakiot ovat siis $s = -2$ ja $t = 1$.

9.

Etsitään luvut r ja t , joille on voimassa yhtälö

$$-\bar{i} + 8\bar{j} = r(2\bar{i} - \bar{j}) + t(\bar{i} + \bar{j})$$

$$-\bar{i} + 8\bar{j} = 2r\bar{i} - r\bar{j} + t\bar{i} + t\bar{j}$$

$$-\bar{i} + 8\bar{j} = (2r + t)\bar{i} + (-r + t)\bar{j}$$

Komponenttien tulee olla samat molemmilla puolilla yhtälöä, joten

$$\begin{cases} -1 = 2r + t \\ 8 = -r + t & | \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 2r + t \\ -8 = -r - t \end{cases}$$

$$\hline -9 = r$$

Kun $r = -9$, niin saadaan $8 = -(-9) + t$ eli $t = -1$.

Komponentit ovat siis $-9(2\bar{i} - \bar{j})$ ja $-(\bar{i} + \bar{j})$.

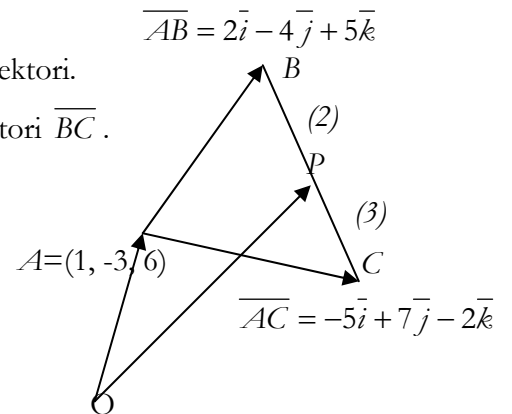
10.

Määritetään pisteen P koordinaatit laskemalla pisteen paikkavektori. $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{BP}$. Koska $\overline{BP} = \frac{2}{5}\overline{BC}$, niin lasketaan ensin vektori \overline{BC} .

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

$$= -5\bar{i} + 7\bar{j} - 2\bar{k} - (2\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k})$$

$$= -7\bar{i} + 11\bar{j} - 7\bar{k}$$



$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{2}{5}\overline{BC}$$

$$= \bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k} + \frac{2}{5}(-7\bar{i} + 11\bar{j} - 7\bar{k})$$

$$= -\frac{9}{5}\bar{i} + \frac{7}{5}\bar{j} + \frac{16}{5}\bar{k}$$

$$\text{Piste } P = \left(-\frac{9}{5}, \frac{7}{5}, \frac{16}{5}\right).$$

Koe 3

1.

a)

$$\sin 2x = 0,6$$

$$2x = 36,869\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x = 18,434\dots^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$x \approx 18,4^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$2x = 180^\circ - 36,869\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$2x = 143,13\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x = 71,56\dots^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$x \approx 71,6^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

b)

$$\tan x = 0,7$$

$$x = 34,99\dots^\circ + n \cdot 180^\circ, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x \approx 35,0^\circ + n \cdot 180^\circ$$

c)

$$\cos(-x) + 2 = 2,6$$

$$\cos(-x) = 0,6$$

$$-x = \pm 53,130\dots^\circ + n \cdot 360^\circ, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x = \pm 53,130\dots^\circ - n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx \pm 53,1^\circ + n \cdot 360^\circ$$

2.

$$3 \sin(-x) + \frac{5}{6} = 0$$

$$\sin(-x) = -\frac{5}{18}$$

$$-x = -0,281\dots + n \cdot 2\pi$$

$$x \approx -0,28 + n \cdot 2\pi$$

$$-x = \pi - (-0,281\dots) + n \cdot 2\pi$$

$$-x = 3,423\dots + n \cdot 2\pi$$

$$x = -3,423\dots - n \cdot 2\pi$$

$$x \approx 3,42 + n \cdot 2\pi$$

$$, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3.

$$a) \bar{a} + \bar{b} = (-\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) + (4\bar{i} - \bar{j}) = 3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$$

$$b) \bar{a} - 2\bar{b} = (-\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) - 2(4\bar{i} - \bar{j}) = -\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k} - 8\bar{i} + 2\bar{j} = -9\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$$

$$c) \bar{a} \cdot \bar{b} = (-\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) \cdot (4\bar{i} - \bar{j}) = (-1) \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 = -4 - 2 = -6$$

4. Määritetään, millä vakioiden s ja t arvoilla on voimassa $\vec{p} = t\vec{u} + s\vec{v}$.

$$\begin{aligned} -\vec{a} - 7\vec{b} + 5\vec{c} &= t(\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}) + s(-\vec{b} + \vec{c}) \\ &= t\vec{a} + 3t\vec{b} - t\vec{c} - s\vec{b} + s\vec{c} \\ &= t\vec{a} + (3t - s)\vec{b} + (-t + s)\vec{c} \end{aligned}$$

Komponenttien on oltava samat yhtälön molemmilla puolilla, joten saadaan ehdot

$$\begin{cases} -1 = t \\ -7 = 3t - s \\ 5 = -t + s \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7 = 3 \cdot (-1) - s \\ 5 = -(-1) + s \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7 = -3 - s \\ 5 = 1 + s \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 4 \\ s = 4 \end{cases}$$

Saadaan siis $s = 4$ ja $t = -1$, joten komponentit ovat

$$t(\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}) = -\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} \quad \text{ja} \quad s(-\vec{b} + \vec{c}) = -4\vec{b} + 4\vec{c}.$$

5. $A = (-2, 4)$, $B = (3, 5)$ ja $C = (2, -1)$.

$$\vec{AB} = (3 - (-2))\vec{i} + (5 - 4)\vec{j} = 5\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{AC} = (2 - (-2))\vec{i} + (-1 - 4)\vec{j} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$$

Vektoreiden pituudet ovat

$$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \quad \text{ja} \quad |\vec{AC}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$\text{Pituuksien neliöt ovat } |\vec{AB}|^2 = 26 \quad \text{ja} \quad |\vec{AC}|^2 = 41.$$

Koska $|\vec{AC}|^2 > |\vec{AB}|^2$, niin piste B on lähempänä pistettä A .

6. $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$

Vektoreiden välinen kulma saadaan pistetulon avulla:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2}{\sqrt{16+9} \sqrt{1+9+4}} = \frac{13}{\sqrt{25} \sqrt{14}}$$

$$\alpha = 45,98\dots^\circ \approx 46^\circ$$

$$\text{Yksikkovektorit ovat } \vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-4\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{25}} = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \quad \text{ja}$$

$$\vec{b}^\circ = \frac{-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{k}.$$

7.

Moottoritietä kuvaa vektori $\overline{AB} = (5 - (-13))\bar{i} + (12 - 6)\bar{j} = 18\bar{i} + 6\bar{j}$.

Liittymä jakaa tien AB suhteessa 3:4. Merkitään liittymäkohtaa pisteellä D .

Määritetään pisteen D koordinaatit laskemalla pisteen D paikkavektori.

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \frac{3}{7}\overline{AB} = -13\bar{i} + 6\bar{j} + \frac{3}{7}(18\bar{i} + 6\bar{j}) = -\frac{37}{7}\bar{i} + \frac{60}{7}\bar{j}.$$

Etäisyysvektori huonekaluliikkeestä liittymään on

$$\overline{CD} = \left(-\frac{37}{7} - 4\right)\bar{i} + \left(\frac{60}{7} - (-5)\right)\bar{j} = -\frac{65}{7}\bar{i} + \frac{95}{7}\bar{j}.$$

Etäisyys huonekaluliikkeeseen on siis

$$|DC| = \sqrt{\left(-\frac{65}{7}\right)^2 + \left(\frac{95}{7}\right)^2} = \sqrt{270,408\dots} = 16,444\dots \approx 16,4 \text{ (km)}.$$

CD-ROM-levy sisältää

- Sigma 8 Opettajan oppaan materiaalin pdf- ja doc-muodossa
- Sigma 8 Tehtävien ratkaisut pdf- ja doc-muodossa.

Levyn sisältö on jaoteltu seuraaviin alikansioihin:

Opas_PDF

- Kansio sisältää oppaan materiaalin pdf-muodossa.
- Pdf-muotoa suositellaan tulostamiseen ja tietokoneen näyttöruudulta katsomiseen.

Opas_DOC

- Kansio sisältää oppaan materiaalin doc-muodossa.
- Käytä doc-muotoa vain silloin, kun haluat muokata materiaalia.
- Tiedostot ovat ”vain luku” -tyyppiä. Kun muokkaat tiedostoa, tallenna se ensin omalle koneellesi.
- Tiedostot on tehty ohjelmalla Microsoft® Word 2002 SP3.

Ratkaisut_PDF

- Kansio sisältää tehtävien ratkaisut pdf-muodossa.
- Pdf-muotoa suositellaan tulostamiseen ja tietokoneen näyttöruudulta katsomiseen.

Ratkaisut_DOC

- Kansio sisältää tehtävien ratkaisut doc-muodossa.
- Käytä doc-muotoa vain silloin, kun haluat muokata materiaalia.
- Tiedostot ovat ”vain luku” -tyyppiä. Kun muokkaat tiedostoa, tallenna se ensin omalle koneellesi.
- Tiedostot on tehty ohjelmalla Microsoft® Word 2002 SP3.