FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä, preliminäärikoe

Ylioppilaskoe 2020

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää taulukkokirjaa ja koejärjestelmän tarjoamia perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jäljessä olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Lisäksi saat käyttöön oman laskimesi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Joissain tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Sisällys

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

Pakolliset tehtävät.

1. Kombinatoriikkaa ja todennäköisyyksiä 12 p.

Valitse kussakin kohdassa oikea vaihtoehto.

1.1. Kuinka moneen eri järjestykseen voidaan asettaa seitsemän eriväristä palloa? **2 p.**

- 70
- 720
- 7
- 5040
- 49
- 700

1.2. 20 opiskelijan ryhmästä valitaan 5 opiskelijaa opintomatkalle ulkomaille. Kuinka monella eri tavalla 5 opiskelijan ryhmä voidaan muodostaa? **2 p.**

- 95 367 431 640 625
- 4
- 3 200 000
- 15 504
- 25

1.3. Laatikossa on sekaisin 25 erilaista sukkaparia eli 50 sukkaa. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti nostetut sukat ovat samaa paria? **2 p.**

- $\frac{1}{50}$
- 0,49 %
- 49 %
- 2,04 %
- 50 %

1.4. Sievennä lauseke $\binom{n+1}{n}$ kun n on positiivinen kokonaisluku. **2 p.**

- n
- 1
- $n!$
- $n+1$
- $(n+1)!$

1.5. Erään normaalijakautuneen lintulajin siipivälin odotusarvo on 24 cm ja keskihajonta 3 cm. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti bongatun linnun siipiväli on korkeintaan 30 cm? **2 p.**

- 99,18 %
- 97,72 %
- 57,93 %
- 50 %
- 50,80 %
- 99,87 %

1.6. Funktio

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2, & 0\leq x\leq\sqrt[3]{3}\\ 0, & \text{muulloin}\end{cases}$$

on satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Tämän perusteella $P\left(X<1\right)$ on **2 p.**

- $\frac{1}{2}$
- 1
- $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
- $\frac{3}{3}$
- 0
- $\frac{1}{3}$

2. Derivaatta **12 p.**

2.1. Määritä funktion $f\left(x\right)=-5x^2-100x$ derivaatan nollakohta. **4 p.**

2.2. Määritä funktion $f\left(x\right)=-5x^2-100x$ suurin arvo. **4 p.**

2.3. Määritä funktion $f\left(x\right)=-5x^2-100x$ kuvaajalle kohtaan $x=1$ piirretyn tangentin yhtälö. **4 p.**

3. Trigonometria 12 p.

3.1. Määritä $\sin(\alpha)$, kun $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$ ja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **6 p.**

3.2. Määritä yhtälön $2\cos^2(x) = 1$ ne ratkaisut, jotka ovat välillä $[2\pi, 4\pi]$. **6 p.**

4. Yhtälölle ratkaisut 12 p.

Määritä vakion a arvo/arvot siten, että yhtälöllä $4x^3 + ax^2 + x = 0$ on täsmälleen kaksi ratkaisua. Määritä tätä vakiota vastaavan yhtälön ratkaisut.

Saat estetyt laskinohjelmat käyttöön palautettuasi A-osan.

Palauta A-osa

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

Ratkaise kolme tehtävistä 5–9. Tässä osassa saat käyttää kaikkia koejärjestelmän ohjelima ja omaa laskintasi, kun olet palautettanut A-osan vastaukset.

5. Hyttysiä ja muurahaisia **12 p.**

Huoneen pituus on 6 m, leveys 5 m ja korkeus 3 m. Laske lyhin reitti katon nurkasta lattian keskipisteeseen

5.1. hyttyselle **6 p.**

5.2. muurahaiselle. **6 p.**

6. Käyrän ja x-akselin välinen pinta-ala **12 p.**

Funktiosta $f(x)$ tiedetään seuraavat tiedot:

$f(2) = 4$ $f(3) = 3$ $f(4) = 4$ $f(5) = 5$ $f(6) = 4$ $f(7) = 5$ $f(8) = 5$

Tarkastellaan funktion $f(x)$ kuvaajan ja x-akselin rajoittamaa pinta-alaa välillä $[2, 8]$. Olkoon S_n puolisuunnikassäännön määräämä pinta-ala, kun n on puolisuunnikkaiden lukumäärä.

6.1. Määritä S_1 **4 p.**

6.2. Määritä S_6 **4 p.**

6.3. Määritä funktion $f(x)$ kuvaajan ja x-akselin välinen pinta-ala approksioimalla funktio $f(x)$ kuudennen asteen polynomifunktioksi. **4 p.**

7. Ruletin voittostrategia **12 p.**

Ruletti on yksi maailman suosituimpia uhkapelejä. Eurooppalaisessa ruletissa on käytössä 37 numeroa (0-36). Numeroista 1-36 puolet ovat mustia ja puolet punaisia, nolla on vihreä. Pelaajalla on erilaisia mahdollisuuksia veikata oikea luku, jonka määrittää pyöritettävässä ruletissa olevan kuulan pysähtymiskohta. Pelaaja voi halutessaan veikata esimerkiksi kuulan määrittämän luvun, luvun värin, luvun parillisuuden tai suuruusluokan (1-12, 13-24 tai 25-36). Pelaaja panostaa haluamansa rahasumman. Voittaessaan pelaaja saa panostamansa rahasumman takaisin määrätyllä kertoimella, hävitessään menettää panoksensa.

Yksi ruletin voittamisen strategia on ns. Martingaalistrategia. Strategian ideana on kaksinkertaistaa jokaisen häviön jälkeinen panos seuraavaan peliin niin kauan, kunnes voittaa ensimmäisen kerran. Käytännössä strategian käytön estävät mm. pelaajan rajallinen varallisuus sekä ruletin rajoitus maksimipanostuksessa.

Martingaalistrategiaa voidaan soveltaa yksinkertaiseen kolikonheittoon, jossa molemmat osapuolet asettavat yhtä suuren panoksen. Se pelaaja, jonka veikkaama kolikon puoli jää näkyviin, saa molempien panokset itselleen.

Heität kumppanisi kanssa kolikkoa ja asetatte ensimmäiseksi panokseksi a euroa. Päätät tuplata panoksesi joka kerta niin kauan, kunnes ensimmäisen kerran voitat.

7.1. Kuinka paljon jäät voitolle, jos voitat ensimmäisen kerran 5. kierroksella, jonka jälkeen lopetat pelin? **4 p.**

7.2. Osoita, että martingaalistrategiaa käyttämällä (eli tuplaamalla panoksesi jokaisen häviön jälkeen niin kauan, kunnes ensimmäisen kerran jäät voitolle) pääset kolikonheitossa varmasti voitolle. Määritä myös voiton suuruus. **4 p.**

7.3. Kaksinkertaistamisen sijaan päätät kolminkertaistaa panoksesi joka kerta. Muodosta funktio, joka kuvaa rahamäärääsi, kun ensimmäinen voitto tulee heitolla n. **4 p.**

8. Paraabeli **12 p.**

Olkoon paraabelin polttopiste $(3, 4)$ ja johtosuora $y = -1$. Olkoon suora y_1 paraabelille kohtaan (x, y) piirretty tangentti ja suora y_2 se polttopisteen kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa polttopisteen ja pisteen (x, y) välistä janaa vastaan.

8.1. Tarkastele graafisesti: Minkä pistejoukon suorien y_1 ja y_2 leikkauspisteet muodostavat? **6 p.**

8.2. Osoita tehtävässä 8.1. saamasi tulos algebrallisesti. **6 p.**

Voit hyödyntää ratkaisussasi paraabelin määritelmää: Paraabeli muodostuu niistä pisteistä (x, y), jotka ovat yhtä kaukana tunnetusta pisteestä (polttopiste) ja annetusta suorasta (johtosuora).

9. Välivaiheiden selvittäminen **12 p.**

Löydät Villen muistiinpanoista seuraavat merkinnät:

1. Tiedetään $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 5, 7)$, $C = (3, 1, 5)$ ja $P = (7, 5, 1)$.
2. $\begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + 3s - t \\ z = 3 + 4s + 2t \end{cases}$
3. $\overline{PQ} = (1 + s + 2t - 7)\,\overline{i} + (2 + 3s - t - 5)\,\overline{j} + (3 + 4s + 2t - 1)\,\overline{k}$

4. $\overline{PQ} = (s+2t-6)\,\bar{i} + (3s-t-3)\,\bar{j} + (4s+2t+2)\,\bar{k}$.

5. $\begin{cases} 1\cdot(s+2t-6)+3\cdot(3s-t-3)+4\cdot(4s+2t+2)=0 \\ 2\cdot(s+2t-6)-1\cdot(3s-t-3)+2\cdot(4s+2t+2)=0 \end{cases}$

6. Laskin: $s = \dfrac{28}{185}$ ja $t = \dfrac{81}{185}$

7. Sijoitetaan ja saadaan $Q = \left(\dfrac{75}{37}, \dfrac{373}{185}, \dfrac{829}{185}\right)$

8. $\sqrt{\left(\dfrac{75}{37}-7\right)^2 + \left(\dfrac{373}{185}-5\right)^2 + \left(\dfrac{829}{185}-1\right)^2} = \dfrac{92}{\sqrt{185}}$

9. Vastaus: $\dfrac{92\sqrt{185}}{185}$

9.1. Selvitä perustellen, mitä Ville on laskenut. Kerro, mitä eri vaiheissa tapahtuu. Kerro myös, mikä on koko laskun tarkoitus. Voit käyttää rivinumeroita viitatessasi eri välivaiheisiin. **9 p.**

9.2. Muodosta tehtävänanto, jonka vastaukseksi Villen vastaus sopisi. **3 p.**

B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

Ratkaise kolme tehtävistä 10–13. Tässä osassa saat käyttää kaikkia koejärjestelmän ohjelmia ja omaa laskintasi, kun olet palauttanut A-osan vastaukset.

10. l'Hospitalin sääntö 12 p.

Tutustu kokeen liitteenä olevaan artikkeliin l'Hospitalin sääntö (L'Hospital_fi.pdf) ja määritä sen avulla raja-arvot

10.1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 3x - 1}{3x^5}$ **6 p.**

10.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{3x^6}$ **6 p.**

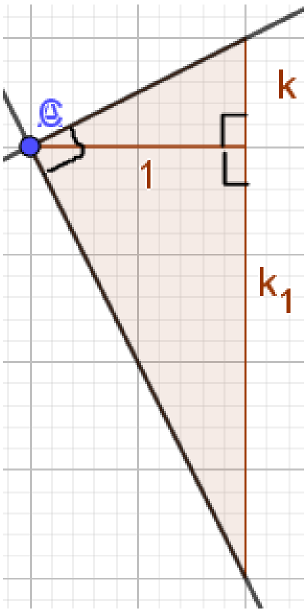
11. Keskeneräiset todistukset 12 p.

Janne ja Jaana saavat tehtäväkseen todistaa lauseen "Jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin niiden kulmakertoimien tulo on -1 tai toinen on x-akselin suuntainen ja toinen y-akselin suuntainen." Janne oli käynyt vektorilaskennan kurssin, mutta Jaanan oli selviydyttävä geometrian kurssin tiedoilla. Janne aloitti todistuksen seuraavasti:

Olkoon suoran s_1 *suuntavektori* $\overline{s_1} = \overline{i} + k_1\overline{j}$ *ja suoran* s_2 *suuntavektori* $\overline{s_2} = \overline{i} + k_2\overline{j}$

mutta hän ei osannut viedä sitä loppuun.

Jaana perehtyi asiaan tekemällä liitteenä olevan Geogebra-tiedoston (kohtisuoruus.ggb) ja siitä saamiensa ideoiden pohjalta aloitti todistuksen seuraavasti:



Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan...

Jaanalla loppui kuitenkin aika kesken. Viimeistele Jannen ja Jaanan todistukset. Perustele tarkasti.

12. Lammas niityllä 12 p.

Lammas sidotaan niityllä rautakankeen metrin pituisella köydellä, jolloin se syö ympyränmuotoisen alueen ruohoa. Seuraava rautakanki sijoitetaan syntyneen ympyrän kehälle. Kuinka pitkään köyteen lammas tulee nyt laittaa, jotta se pystyisi syömään saman verran ruohoa kuin aluksi?

13. Suuruusjärjestyksen osoittaminen 12 p.

Osoita, että $7^n > 4n$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Voit käyttää esimerkiksi induktiotodistusta.

Lähteet

10 Lähde: Wikipedia. Viitattu: 15.8.2019.

11 Lähde: MFKA.

Tarkista, että vastasit ohjeiden mukaiseen määrään tehtäviä. Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.