MAA8-Harjoituskoe

RATKAISUT

A-OSA

1. Derivoi funktio $f(x)=x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{x^5}$ ja sievennä vastaus. **(3 p.)**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{x^5} \\ &= x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}} \\ &= x^{\frac{2}{3}+\frac{5}{3}} \\ &= x^{\frac{7}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} \\ &= \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} \\ &= \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^3x} \\ &= \underline{\underline{\frac{7}{3}x\sqrt[3]{x}}} \end{aligned}$$

2. Derivoi funktio $f(x)=\ln(3x^2+x)$. **(2 p.)**

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(3x^2+x) \\ f'(x) &= \frac{1}{3x^2+x}\cdot \mathrm{D}(3x^2+x) \\ &= \underline{\underline{\frac{6x+1}{3x^2+x}}} \end{aligned}$$

3. Ratkaise yhtälö $\log_2(2-\sqrt{x})+\log_2(2+\sqrt{x})=1$, missä $0\le x<4$. **(3 p.)**

$$\begin{aligned} \log_2(2-\sqrt{x})+\log_2(2+\sqrt{x}) &= 1 \\ \log_2(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x}) &= 1 \\ \log_2(2^2-\sqrt{x}^2) &= 1 \\ \log_2(4-x) &= 1 \,\|\, 2^{(\,)} \\ 4-x &= 2^1 \\ -x &= -2 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 2}} \end{aligned}$$

4. Ratkaise yhtälö $\ln(x+1)-\ln x = 2$, missä $x>0$. **(4 p.)**

$$\ln(x+1)-\ln x = 2$$
$$\ln\frac{x+1}{x} = 2 \; \| \, e^{(\;)}$$
$$\frac{x+1}{x} = e^2 \; \| \cdot x \quad (x>0)$$
$$x+1 = e^2 x$$
$$x - e^2 x = -1$$
$$x(1-e^2) = -1$$
$$x = \frac{-1}{1-e^2}$$
$$x = \frac{\cancel{-}1}{\cancel{-}(-1+e^2)}$$
$$\underline{\underline{x = \frac{1}{e^2-1}}} \quad \left.\begin{matrix} >0 \\ >0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x>0 \;\; \text{OK!}$$

B-OSA

1. Ilari aloittaa Instagramin käytön ja hän saa ensimmäisenä päivänä 2 seuraajaa. Jos hän onnistuu kasvattamaan uusien seuraajien määrää keskimäärin 5 % päivittäin, niin

a) kuinka monta seuraajaa hänellä on kahden viikon päästä aloittamisesta?
b) kuinka monen päivän kuluttua hänellä on 7,5 miljardia seuraajaa (maapallon väkiluku)?

a) Kahden viikon eli 14 päivän päästä seuraajia on $1{,}05^{14}\cdot 2 = 3{,}959863... \approx \underline{\underline{4 \text{ seuraajaa}}}$.

b) Olkoon x = tarvittavat päivät.

$$1{,}05^x \cdot 2 = 7{,}5\cdot 10^9 \; \| : 2$$
$$1{,}05^x = 3{,}75\cdot 10^9 \; \| \lg$$
$$x = 451{,}8333... \approx \underline{\underline{450 \text{ päivän kuluttua}}} \quad (\sim \text{vuosi ja 3 kk!!})$$

2. Kofeiinin puoliintumisaika elimistössä on n. 5 h. Kuinka pitkän ajan jälkeen kahvikupillisesta saatu kofeiinin määrä on pienentynyt alle yhteen prosenttiin?

$a =$ kahvikupillisesta saadun kofeiinin määrä.

$k =$ elimistössä olevan kofeiinin hajoamiskerroin

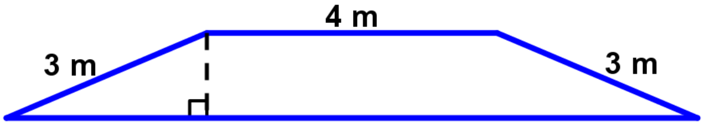
$x =$ kysytty aika

$$a \cdot k^5 = 0{,}5a \;\|: a$$
$$k^5 = 0{,}5$$
$$k = \sqrt[5]{0{,}5} = 0{,}8705...$$

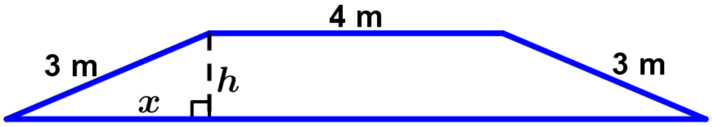
$$a \cdot k^x < 0{,}01a$$
$$a \cdot \left(\sqrt[5]{0{,}5}\right)^x < 0{,}01a \;\|: a$$
$$\left(\sqrt[5]{0{,}5}\right)^x < 0{,}01$$
$$x > 33{,}2192...(h)$$

Vastaus: Kofeiinin määrä on pienentynyt alle 1%:iin n. 33 tunnin kuluttua.

3. Kuinka pitkiä ovat kuvan tasakylkisen puolisuunnikkaan kanta ja korkeus, kun sen pinta-ala on suurin mahdollinen?



Merkitään korkeutta (hetkellisesti) h:lla ja kuvan kolmion kantaa x:llä.



$$x^2 + h^2 = 3^2$$
$$h^2 = 9 - x^2$$
$$h = \pm\sqrt{9 - x^2} \quad \text{(vain posit. käy!)}$$

Pinta-alafunktio:

A = $2 \cdot$ kolmio + suorakaide

$$A(x) = \cancel{2} \cdot \frac{x \cdot h}{\cancel{2}} + 4 \cdot h$$
$$= x\sqrt{9 - x^2} + 4\sqrt{9 - x^2}$$
$$= (x + 4)\sqrt{9 - x^2}$$

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left((x+4) \cdot \sqrt{9-x^2}\right) \blacktriangleright \sqrt{9-x^2} - \frac{x \cdot (x+4)}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$A'(x)=0$$

$$\text{solve}\left(\sqrt{9-x^2} - \frac{x \cdot (x+4)}{\sqrt{9-x^2}}=0,x\right)$$
$$\blacktriangleright\ x=\frac{-(\sqrt{22}+2)}{2} \text{ or } x=\frac{\sqrt{22}-2}{2}$$

Näistä vain positiivinen $x = \dfrac{\sqrt{22} - 2}{2} \approx 1{,}3452...$ käy!

Kulkukaavio:

$A'(1) = 1{,}06... > 0$
$A'(2) = -3{,}13... < 0$

		$\frac{\sqrt{22}-2}{2}$	
$A'(x)$	$+$		$-$
$A(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Kulkukaavion perusteella ala on suurin, kun $x = \frac{\sqrt{22}-2}{2} \approx 1{,}3452...$.

$$\text{Kanta} = 2x + 4 = \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{22}-2}{\cancel{2}} + 4 = \sqrt{22} + 2 = 6{,}69...$$

$$\text{Korkeus} = \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - \left(\frac{\sqrt{22}-2}{2}\right)^2} = 2{,}68...$$

Vastaus: Alaltaan suurimman puolisuunnikkaan kanta on 6,7 m ja korkeus 2,7 m.

4. Olkoon $f(x) = \frac{2\ln x + 1}{\ln x}$ ja $g(x) = 4 - \ln x$.

a) Mikä on funktion $f(x)$ määrittelyehto? **(1 pist.)**

b) Funktioilla on yksi yhteinen piste. Määritä sen koordinaatit. **(1 pist.)**

c) Osoita, että funktiot sivuavat toisiaan yhteisessä pisteessä. **(2 pist.)**

d) Mikä on sivuamispisteen yhteisen tangentin yhtälö? **(2 pist.)**

a) $f(x) = \frac{2\ln x + 1}{\ln x}$.

ln*x*:n määrittely: $x > 0$
Nimittäjän nollakohta: $\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^0 = 1$.

Vast. $f(x)$:n määrittelyehto on $x > 0$ ja $x \neq 1$.

b)

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{2\ln x + 1}{\ln x} = 4 - \ln x$$

$$x = e \quad \text{(laskimella!)}$$

$$g(e) = 4 - \ln e$$
$$= 4 - 1$$
$$= 3$$

Vast. Funktioiden yhteinen piste on $(e, 3)$

c)

$$f(x) = \frac{2\ln x + 1}{\ln x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2} \quad \text{(laskimella)}$$

$$f'(e) = -\frac{1}{e \cdot (\ln e)^2} = \underline{-\frac{1}{e}}$$

$$g(x) = 4 - \ln x$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$g'(e) = \underline{-\frac{1}{e}}$$

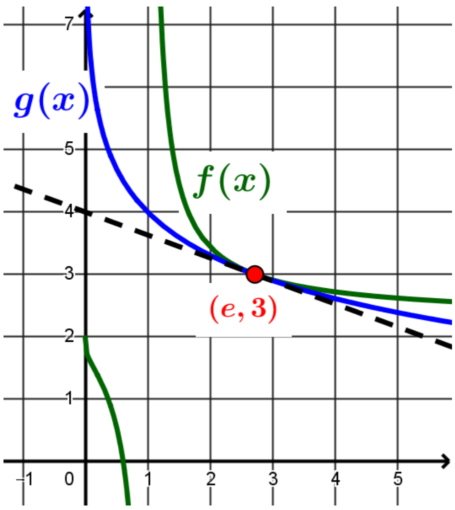
Yhteisessä pisteessä molempien funktioiden tangenttien kulmakertoimet ovat samat, $-\frac{1}{e}$, joten funktiot sivuavat toisiaan.

d) Sivuamispisteessä oleva tangentti:

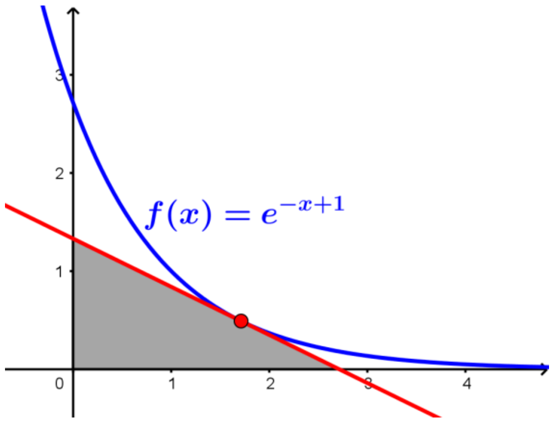
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{e}(x - e)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{e}x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = -\frac{1}{e}x + 4}}$$



5. Funktion $f(x)=e^{-x+1}$ kuvaajalle piirretään koordinaatiston 1. neljänneksessä tangentti sellaiseen pisteeseen, jossa se rajaa positiivisten koordinaattiakselien kanssa pinta-alaltaan suurimman mahdollisen suorakulmaisen kolmion. Mihin pisteeseen tangentti on piirrettävä?



Olkoon kysytty funktion piste $(a,\ f(a))=(a,\ e^{-a+1})$, missä $a\geq 0$.

Tangenttisuoran yhtälö:

$$
\begin{aligned}
y-y_0 &= k(x-x_0)\\
y-e^{-a+1} &= k(x-a) \quad \| \; f'(x)=-e^{-x+1} \quad \Rightarrow \; k=f'(a)=-e^{-a+1}\\
y-e^{-a+1} &= -e^{-a+1}(x-a)\\
y-e^{-a+1} &= -e^{-a+1}x+ae^{-a+1}\\
y &= -e^{-a+1}x+ae^{-a+1}+e^{-a+1}\\
y &= -e^{-a+1}x+(a+1)e^{-a+1} \qquad (\Rightarrow y=kx+b)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ kolmion korkeus on $(a+1)e^{-a+1}$.

Kolmion kanta on tangenttisuoran nollakohta:

$-e^{-a+1}x+(a+1)e^{-a+1}=0$

$\text{solve}\left(-\mathbf{e}^{-a+1}\cdot x+(a+1)\cdot \mathbf{e}^{-a+1}=0,x\right) \blacktriangleright x=a+1$

Kolmion pinta-alafunktio:

$$A(a)=\frac{(a+1)\cdot(a+1)e^{-a+1}}{2}=\frac{1}{2}(a+1)^2e^{-a+1}$$

$$\text{Define } f(a)=\frac{1}{2}\cdot(a+1)^2\cdot e^{-a+1} \blacktriangleright \textit{Valmis}$$

$$A'(a)=\frac{d}{da}\left(f(a)\right) \blacktriangleright \frac{-(a-1)\cdot(a+1)\cdot e^{1-a}}{2}$$

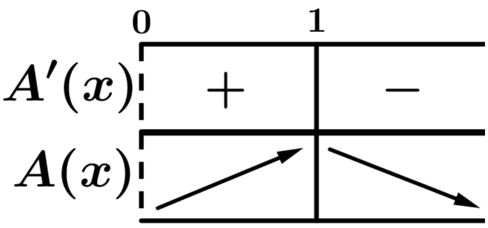
$A'(a)=0$

$$\text{solve}\left(\frac{-(a-1)\cdot(a+1)\cdot e^{1-a}}{2}=0,a\right) \blacktriangleright a=-1 \text{ or } a=1$$

Kulkukaavio:

$A'(0,5)\approx 0,62>0$

$A'(2)\approx -0,55<0$



Kulkukaaviosta nähdään, että kolmion ala on suurin, kun $a=1$.

$\Rightarrow$ Tangentti on piirrettävä pisteeseen $(a,\ e^{-a+1})=(1,\ e^{-1+1})=(1,\ e^{0})=\underline{\underline{(1,\ 1)}}$