MAA10-harjoituskoe

RATKAISUT

1. Villellä on kaksi karkkipussia. Ensimmäisessä pussissa on 3 salmiakkiufoa, 2 merkkaria ja 5 liitulakua. Toisessa pussissa on 5 merkkaria, 3 liitulakua ja 4 hedelmäkarkkia.

   a) Ville valitsee umpimähkään karkkipussin ja sieltä sattumanvaraisen karkin. Millä todennäköisyydellä hän saa merkkarin?

   b) Jos Ville kaataisikin karkit samaan pussiin ja valitsisi sieltä sattumanvaraisen karkin, niin millä todennäköisyydellä hän saisi merkkarin?

a)

$$
\begin{aligned}
\text{P(Saa merkkarin)} &= \text{P(Valitsee 1. pussin ja sieltä merkkarin tai valitsee 2. pussin ja sieltä merkkarin)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3+2+5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5+3+4} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12} \\
&= \frac{37}{120} \\
&= 0,30833... \\
&\approx \underline{\underline{0,3083}}
\end{aligned}
$$

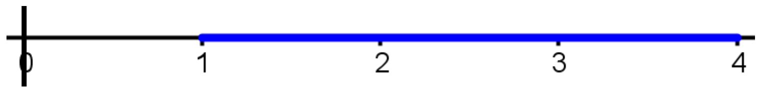
b)

$$
\begin{aligned}
\text{P(Saa merkkarin)} &= \frac{2+5}{3+2+5+5+3+4} \\
&= \frac{7}{22} \\
&= 0,31818... \\
&\approx \underline{\underline{0,3182}}
\end{aligned}
$$

2. **a)** Väliltä [0, 4] valitaan umpimähkään yksi luku x. Millä todennäköisyydellä se on suurempi kuin 1?

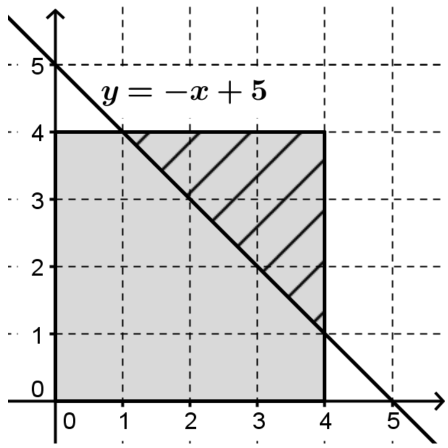
b) Väliltä [0, 4] valitaan umpimähkään kaksi lukua x ja y. Millä todennäköisyydellä $x+y>5$?

a) $\mathrm{P}(x>1)=\underline{\underline{\frac{3}{4}}}$.



b)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(x+y>5)&=\mathrm{P}(y>-x+5)\\&=\frac{4,5}{16}\\&=0,28125\\&\approx \underline{\underline{0,28}}\end{aligned}$$



3. **a)** Kuinka monella eri tavalla on mahdollista vastata sellaiseen monivalintakokeeseen, jossa on 10 kysymystä ja jokaisessa kysymyksessä 3 vastausvaihtoehtoa a, b, ja c? Mitään kohtaa ei jätetä vastaamatta.

b) Kuinka monella eri tavalla voit valita ne 6 tehtävää, jotka teet tässä kurssikokeessa?

a) Jokaisessa vastauksen valintavaiheessa, joita on 10, on 3 vastausvaihtoehtoa. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia vastausrivejä on siten $\underline{\underline{3^{10}=59049}}$ kappaletta.

b) 6 tehtävää voidaan valita tämän kokeen 8 tehtävän joukosta $\underline{\underline{\binom{8}{6}=28}}$ eri tavalla.

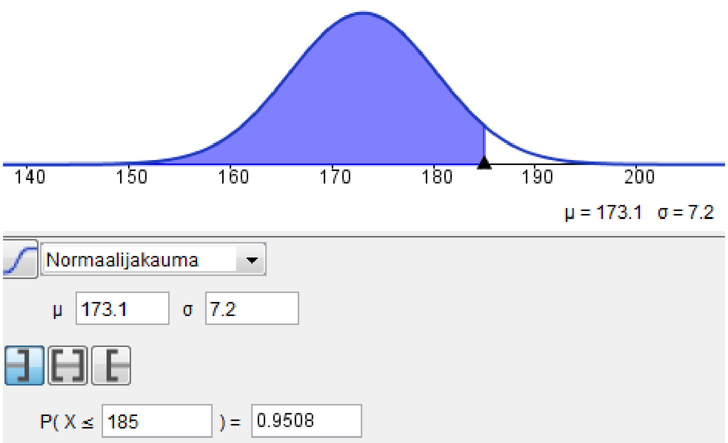
4. Pussissa on 6 mustaa palloa ja 4 valkoista palloa. Pussista nostetaan 3 palloa. Satunnaismuuttuja *X* on saatavien valkoisten pallojen lukumäärä. Laske satunnaismuuttujan *X* odotusarvo.

Valkoisten pallojen määrä	Todennäköisyys
0	$\mathrm{P(m\ ja\ m\ ja\ m)}=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$
1	$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{4\cdot 15}{120}=\frac{1}{2}$
2	$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{6\cdot 6}{120}=\frac{3}{10}$
3	$\mathrm{P(v\ ja\ v\ ja\ v)}=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{30}$

Odotusarvo $E(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{30}=\underline{\underline{\frac{6}{5}=1,2.}}$

5. 16-vuotiaiden poikien pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa keskiarvon ollessa 173,1 cm ja keskihajonnan 7,2 cm. Koripallojoukkueen aloitusviisikkoon arvotaan viisi 16-vuotiasta poikaa. Millä todennäköisyydellä aloitusviisikkoon tulee ainakin yksi yli 185 cm pitkä pelaaja?

Lasketaan todennäköisyys, että yksittäinen poika on **alle** 185 cm:



$$
\begin{aligned}
P(\text{tulee ainakin yksi yli 185 cm pitkä}) &= 1-P(\text{kaikki viisi ovat alle 185 cm})\\
&= 1-0,9508^5\\
&= 0,22295...\\
&\approx \underline{\underline{0,22}}
\end{aligned}
$$

6. Fysiikan ylioppilaskokeessa jaettiin keväällä 2017 oheisen taulukon mukaisesti arvosanoja. Eri arvosanoille annetaan taulukon mukaiset lukuarvot.

Fysiikka, kevät 2017, arvosanajakauma (f)						
I (0)	A (2)	B (3)	C (4)	M (5)	E (6)	L (7)
64	416	779	1343	1517	1266	469

Lähde: www.ylioppilastutkinto.fi, 2018.

a) Muodosta arvosanojen suhteellinen jakauma prosentin kymmenyksen tarkkuudella. **(1 p.)**

b) Havainnollista sekä absoluuttista että suhteellista jakaumaa pylväsdiagrammein. **(2 p.)**

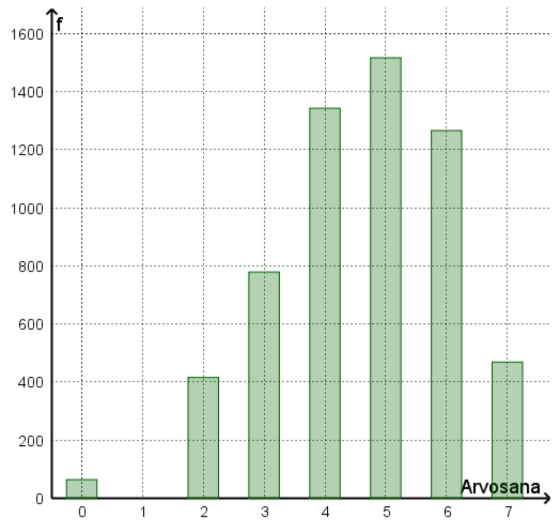
c) Määritä arvosanojen keskiarvo, keskihajonta ja mediaaniarvosana. **(3 p.)**

a) Arvosanojen suhteellinen jakauma on merkitty oheiseen kuvankaappaukseen:

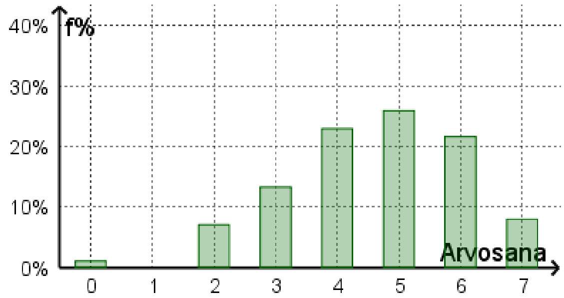
Arvosana	Arvosanan lukuarvo	f	a) f%
I (0)	0	64	1.1
A (2)	2	416	7.1
B (3)	3	779	13.3
C (4)	4	1343	22.9
M (5)	5	1517	25.9
E (6)	6	1266	21.6
L (7)	7	469	8
	Yhteensä:	5854	100

n	5854
Keskiarvo	4.6131
σ	1.4358
s	1.436
Σx	27005
Σx²	136645
Min	0
Q1	4
Mediaani	5
Q3	6
Max	7

b) Arvosanojen absoluuttisen ja suhteellisen jakauman pylväsdiagrammit:



Absoluuttinen jakauma



Suhteellinen jakauma

c) a-kohdan kuvankaappauksesta nähdään:

Keskiarvo $\bar{x} = 4,6131 \approx \underline{\underline{4,6}}$

Keskihajonta $\sigma = 1,4358 \approx \underline{\underline{1,44}}$

Mediaaniarvosana on lukuarvoltaan 5 eli $\underline{\underline{\text{M}}}$.

7. Monivalintatestissä on 25 väitettä ja kussakin kaksi vastausvaihtoehtoa. Opiskelija tietää oikean vastauksen 10 väitteeseen, mutta joutuu arvaamaan loput. Millä todennäköisyydellä hän läpäisee testin, kun läpipääsyyn vaaditaan 15 oikeaa vastausta? (yo-koe/s2010)

$$P(\text{läpäisee testin})$$

$$= P(\text{lopuista 15 väitteestä arvaa vähintään 5 oikein})$$

$$= 1 - P(\text{lopuista 15 väitteestä arvaa vain 0, 1, 2, 3 tai 4 oikein})$$

$$= 1 - \left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{15}}_{\text{0 oikein}} + \underbrace{\binom{15}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14}}_{\text{tasan 1 oikein}} + \underbrace{\binom{15}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13}}_{\text{tasan 2 oikein}} + \underbrace{\binom{15}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}_{\text{tasan 3 oikein}} + \underbrace{\binom{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}_{\text{tasan 4 oikein}} \right)$$

$$= \frac{7707}{8192}$$

$$= 0{,}940795...$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}94}}$$

8. Funktio $f(x)=\begin{cases} a\sin(x), & \text{kun } 0\le x\le \pi \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$ on satunnaismuuttujan X tiheysfunktio.

a) Määritä luku a.

b) Muodosta satunnaismuuttujan X kertymäfunktio $F(x)$.

c) Määritä todennäköisyys $P(X\le 1)$.

a)

$$f(x)=\begin{cases} a\sin(x), & \text{kun } 0\le x\le \pi \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

1) Koska $f(x)$ on tiheysfunktio, on oltava $f(x)\ge 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Koska $\sin(x)\ge 0$ välillä $0\le x\le \pi$, niin on oltava sen kertoimen $a\ge 0$.

2) Tiheysfunktiolle pätee, että sen ja $x-$ akselin väliin jäävä pinta-ala on tasan 1. Siten on oltava

$$\int_0^{\pi} a\sin(x)dx = 1$$

$$a\Big/_0^{\pi} -\cos(x) = 1$$

$$a(-\cos\pi-(-\cos 0)) = 1$$

$$a(1-(-1)) = 1$$

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Ehdoista 1) ja 2) seuraa, että $\underline{\underline{a=\frac{1}{2}}}$

b)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x), & \text{kun } 0\le x\le \pi \\ 0, & \text{muulloin}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0 & \text{(todennäköisyyttä ei kerry ennen 0:aa)} \\ \int_0^x \frac{1}{2}\sin(t)dt, & \text{kun } 0\le x\le \pi & \text{(todennäköisyys kertyy 0:n ja } \pi\text{:n välillä)} \\ 1, & \text{kun } x>\pi & \text{(kaikki todennäköisyys on kertynyt } \pi\text{:n mennessä)}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0 \\ \Big/_0^x -\frac{1}{2}\cos t, & \text{kun } 0\le x\le \pi \\ 1, & \text{kun } x>\pi\end{cases}$$

$$\underline{\underline{F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0 \\ -\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}, & \text{kun } 0\le x\le \pi \\ 1, & \text{kun } x>\pi\end{cases}}}$$

c)

$$\begin{aligned}P(X\le 1) &= F(1) \\ &= -\frac{1}{2}\cos(1)+\frac{1}{2} \\ &= 0,22984... \\ &\approx \underline{\underline{0,2298}}\end{aligned}$$