MAA9-Harjoituskoe

RATKAISUT

A-OSA

1. Integroi a) $\int 4-2x^4 dx$ b) $\int (4-2x)^4 dx$ c) $\int (4-2x)^{-1} dx$ (6 p.)

a) $\int 4-2x^4 dx = \underline{\underline{4x-\frac{2}{5}x^5+C}}$

b)

$$\begin{aligned}\int (4-2x)^4 dx &= -\frac{1}{2}\int -2\cdot(4-2x)^4 dx \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(4-2x)^5+C \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{10}(4-2x)^5+C}}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int (4-2x)^{-1} dx &= \int \frac{1}{4-2x}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{-2}{4-2x}dx \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{2}\ln|4-2x|+C}}\end{aligned}$$

2. Onko funktio $g(x)=x^2\ln x$ funktion $f(x)=x(2\ln x+1)$ integraalifunktio, kun $x>0$? (2 p.)

Funktio $g(x)$ on $f(x)$:n integraalifunktio, jos $g'(x)=f(x)$:

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2x\cdot\ln x + x^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} \qquad \text{(tulon derivointisääntö!)} \\ &= 2x\ln x + x \\ &= x(2\ln x+1) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Koska $g'(x)=f(x)$, niin $g(x)$ on $f(x)$:n integraalifunktio!

3. Integroi funktiot a) $g(x)=12x\cos(3x^2)$ b) $h(x)=\frac{1}{e^{5x}}$ (4 p.)

a) $\int g(x)\,dx = \int 12x\cos(3x^2)\,dx = 2\int 6x\cos(3x^2)\,dx = \underline{\underline{2\sin(3x^2)+C}}$

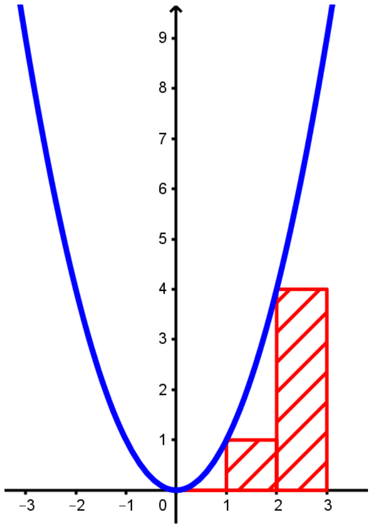
b) $\int h(x)dx = \int \frac{1}{e^{5x}} = \int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}\int -5e^{-5x}dx = \underline{\underline{-\frac{1}{5}e^{-5x}+C}}$ $\left(=-\frac{1}{5e^{5x}}+C\right)$.

B-OSA

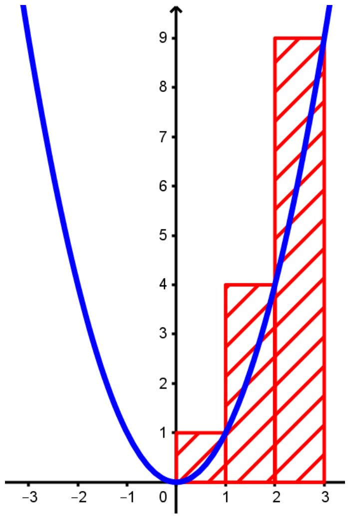
1. a) Laske ala- ja yläsumma funktiolle $f(x)=x^2$ välillä [0, 3] käyttäen kolmea jakoväliä. Piirrä tilanteista myös kuvat. **(4 p.)**

   b) Laske funktion $f(x)=x^2$ ja $x-$akselin rajoittaman alueen pinta-ala välillä [0, 3]. **(2 p.)**

a)



Alasumma



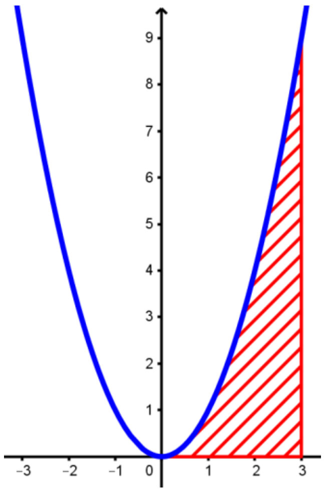
Yläsumma

$f(x)=x^2$ Jakovälin pituus $d_3=\dfrac{3-0}{3}=1.$

$$
\begin{aligned}
\text{Alasumma} &= f(0)\cdot d_3+f(1)\cdot d_3+f(2)\cdot d_3\\
&=0\cdot 1\ +\ 1\cdot 1\ +\ 4\cdot 1\\
&=\underline{\underline{5}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Yläsumma} &= f(1)\cdot d_3+f(2)\cdot d_3+f(3)\cdot d_3\\
&=1\cdot 1\ +\ 4\cdot 1\ +\ 9\cdot 1\\
&=\underline{\underline{14}}
\end{aligned}
$$

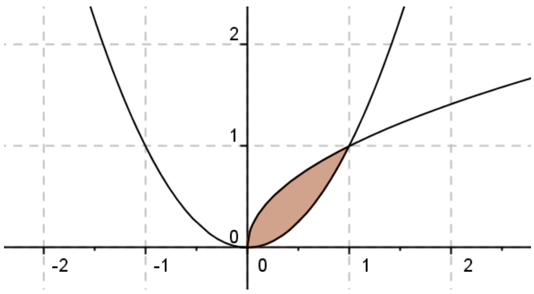
b) $\text{A} = \displaystyle\int_0^3 x^2dx = \Big/_{\!0}^{3}\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3 = \underline{\underline{9}}$



2. Funktiot $f(x) = x^2$ ja $g(x) = \sqrt{x}$ rajaavat yhdessä koordinaatiston 1. neljännekseen ”pensaan lehden”. Laske lehden ala.

Funktioiden leikkauspisteet:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
x^2 &= \sqrt{x} \quad \|\,()^2 \quad \text{mol.puolet} \geq 0! \\
x^4 &= x \\
x(x^3 - 1) &= 0 \\
x = 0 \quad &\text{tai} \quad x = 1
\end{aligned}
$$



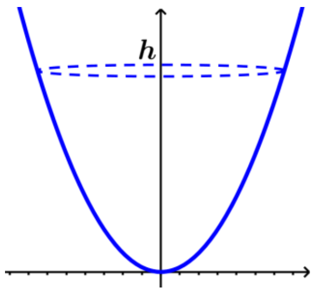
Välillä [0, 1] funktion $g(x)$ kuvaaja on ylempänä, sillä

$g(0,5) = \sqrt{0,5} \approx 0,7 \ > \ f(0,5) = 0,5^2 = 0,25$.

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \Big/_0^1 (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3) = (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \quad \text{(pinta-alayksikköä)}$$

3. Paraabeli $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri muodostaen origossa seisovan ”(inte)Graalin maljan”. Määritä maljan korkeus h, kun maljan tilavuus on 32π?

Pyörähdys y-akselin ympäri, joten x ratkaistaan y:n suhteen:



$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{4}x^2 \quad \|\cdot 4 \\
4y &= x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{y}
\end{aligned}
$$

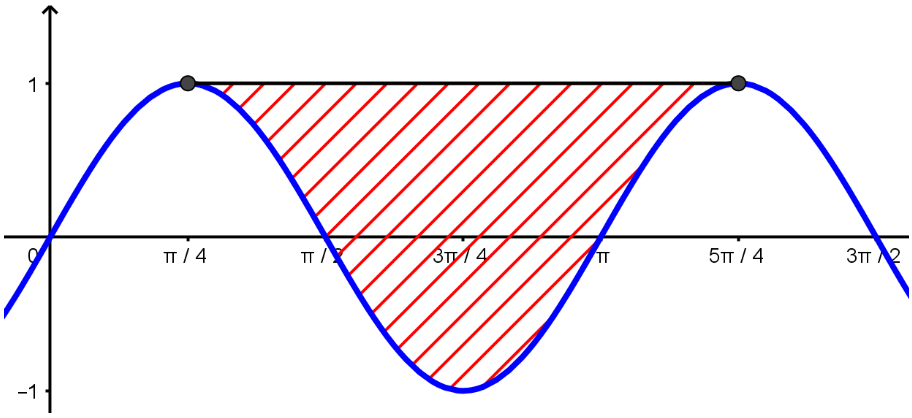
Symmetrian takia riittää tarkastella, kun haaroista toinen, esim. $x = 2\sqrt{y}$, pyörähtää y-akselin ympäri välillä [0, h].

$$
\begin{aligned}
\pi \int_0^h (2\sqrt{y})^2 dy &= 32\pi \\
\pi \int_0^h (4y) dy &= 32\pi \\
4\pi \Big/_0^h \frac{1}{2}y^2 &= 32\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\pi(\frac{1}{2}h^2 - 0) &= 32\pi \quad \|: 4\pi \\
\frac{1}{2}h^2 &= 8 \quad \|\cdot 2 \\
h^2 &= 16 \\
(h = -4) \quad &\text{tai} \quad \underline{\underline{h = 4}}
\end{aligned}
$$

Vastaus: InteGraalin maljan korkeus on 4.

4. Funktion $f(x) = \sin 2x$ kaksi peräkkäistä huippua yhdistetään janalla. Laske funktion ja janan välisen alueen pinta-ala.



Huippukohdat:

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad \text{tai} \quad x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

Kaksi peräkkäistä huippua on esimerkiksi kohdissa $x = \frac{\pi}{4}$ ja $x = \frac{5\pi}{4}$.

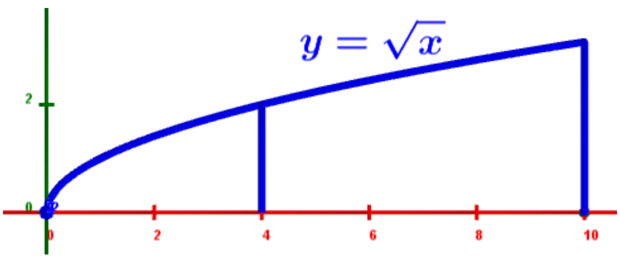
Alue muodostuu käyrien $g(x) = 1$ ja $f(x) = \sin 2x$ väliin. Alueen pinta-ala:

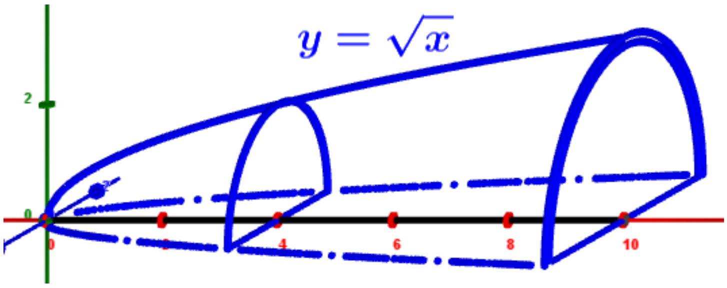
$$\text{A} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 - \sin 2x)dx = \Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (x + \frac{1}{2}\cos 2x) = \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos(2 \cdot \frac{5\pi}{4}) - (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}))$$

$$= \frac{5\pi}{4} + 0 - (\frac{\pi}{4} + 0)$$

$$= \underline{\underline{\pi}} \quad \text{(pinta-alayksikköä)}$$

5. Venekatos on sivusta katsottuna käyrän $y=\sqrt{x}$ muotoinen, missä $0 \le x \le 10$. Katoksen pituussuuntaa vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat puoliympyröitä. Koordinaatiston yksikkönä on metri. Kuinka suuri on venekatoksen tilavuus?





Selvitetään kohdassa x, $0 \le x \le 10$, olevan puoliympyrän ala:

$$A(x)=\frac{1}{2}\cdot \pi r^2=\frac{1}{2}\cdot \pi \cdot \sqrt{x}^2=\frac{1}{2}\pi x$$

Tilavuus saadaan integroimalla yhteen poikkileikkausympyröiden alat välillä $0 \le x \le 10$:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{10} (\frac{1}{2}\pi x)\,dx = \Big/_0^{10} \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{2}x^2 \\ &= \Big/_0^{10} \frac{1}{4}\pi x^2 \\ &= \frac{100\pi}{4} - 0 \\ &= 25\pi \\ &= 78{,}5398... \\ &\approx \underline{\underline{78{,}5\ (\mathrm{m}^3)}} \end{aligned}$$