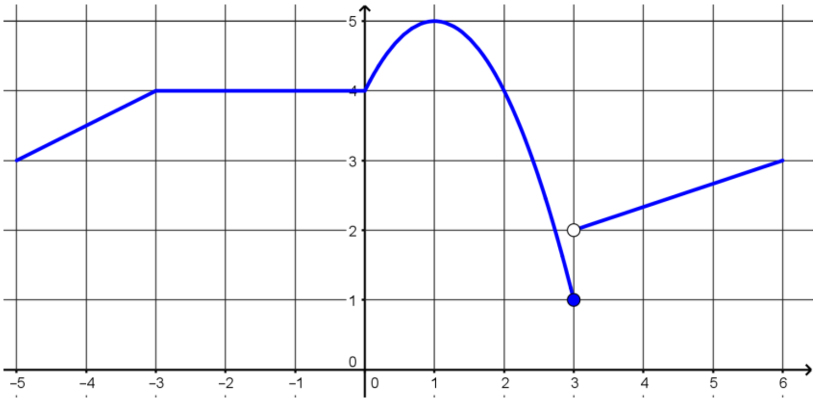
MAA6-harjoituskoe

RATKAISUT

A-OSA

1. Kuvassa on erään funktion $f(x)$ kuvaaja välillä $[-5,\ 6]$. Vastaa kuvaajan perusteella kysymyksiin.



a) Mitä on $f(-4)$?

$f(-4) = \underline{\underline{3{,}5}}$

b) Mitä on $f'(-4)$?

$f'(-4) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

c) Millä x:n arvoilla funktion derivaatta on nolla?

$\underline{\underline{-3 < x < 0 \text{ tai } x = 1}}$

d) Mitä on $\lim\limits_{x \to 3+} f(x)$?

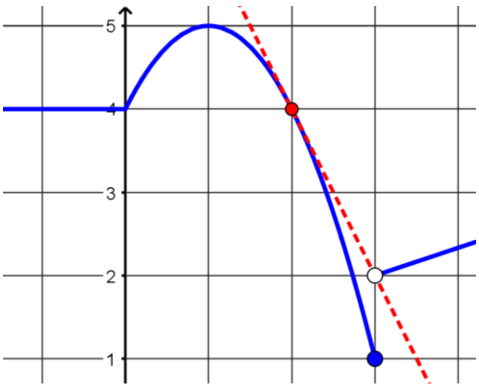
$\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \underline{\underline{2}}$

e) Perustele jatkuvuuden määritelmällä, onko funktio jatkuva kohdassa $x = 0$.

$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= 4 \\ f(0) &= 4 \end{aligned}\right\}$ samat, joten $f(x)$ $\underline{\underline{\text{on jatkuva}}}$ kohdassa $x = 0$.

f) Mitä on funktion derivaatta kohdassa $x = 2$?

Piirretään tangentti kohtaan $x = 2$:



$\Rightarrow \quad f'(2) \approx \underline{\underline{-2}}$

2. Olkoon funktio $f(x)=\dfrac{2x^2-8}{x^2-1}$.

a) Mikä on funktion f määrittelyjoukko?

Nimittäjän nollakohdat:

$$x^2-1=0$$
$$x^2=1 \,\|\, \sqrt{}$$
$$x=-1 \text{ tai } x=1$$

$\Rightarrow$ Määrittelyjoukko on $\underline{\underline{\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}}}$

b) Määritä funktion f nollakohdat.

$$2x^2-8=0$$
$$2x^2=8 \,\|:2$$
$$x^2=4 \,\|\, \sqrt{}$$
$$\underline{\underline{x=-2 \text{ tai } x=2}}$$

c) Määritä funktion f derivaattafunktio.

$$f(x)=\frac{2x^2-8}{x^2-1}$$
$$f'(x)=\frac{4x\cdot(x^2-1)-(2x^2-8)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{4x^3-4x-4x^3+16x}{(x^2-1)^2}$$
$$=\underline{\underline{\frac{12x}{(x^2-1)^2}}}$$

d) Määritä funktion f derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x)=0$$
$$\frac{12x}{(x^2-1)^2}=0$$
$$12x=0$$
$$\underline{\underline{x=0}}$$

e) Laadi funktion f kulkukaavio.

$$f'(x)=\frac{12x}{(x^2-1)^2} \quad >0$$

$f'(x)<0$, kun $12x<0$ eli $x<0$

$f'(x)>0$, kun $12x>0$ eli $x>0$

		-1		0		1	
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	↘		↘		↗		↗

f) Määritä funktion ääriarvot.

Kulkukaavion perusteella funktiolla on minimikohta $x=0$.

$\underline{\underline{\text{Minimiarvo on}}}$ $f(0)=\dfrac{2\cdot 0^2-8}{0^2-1}=\dfrac{-8}{-1}=\underline{\underline{8}}$

B-OSA

1. Määritä paraabelin $f(x) = -2x^2 - x + 5$ huipun koordinaatit sekä kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin yhtälö.

Huipussa derivaatta on nolla:

$$f(x) = -2x^2 - x + 5$$
$$f'(x) = -4x - 1$$

$$f'(x) = 0$$
$$-4x - 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{4}$$

$$y = f\left(-\frac{1}{4}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) + 5$$
$$= \frac{41}{8}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Huippu on pisteessä } \left(-\frac{1}{4}, \frac{41}{8}\right)}}$

Tangentin kulmakerroin:

$$k = f'(1) = -4\cdot 1 - 1 = -5$$

Sivuamispisteen $y-$koordinaatti:

$$y = f(1) = -2\cdot 1^2 - 1 + 5$$
$$= 2$$

Tangentin yhtälö:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - 2 = -5(x - 1)$$
$$y - 2 = -5x + 5$$
$$\underline{\underline{y = -5x + 7}}$$

2. Olkoon funktio $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^4 + x^3 + 3x^2 - 3$.

a) Määritä funktion maksimiarvot.

b) Määritä funktion suurin arvo.

c) Määritä funktion suurin arvo välillä $[-2,\ 0]$.

a) Laaditaan funktion kulkukaavio:

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + x^3 + 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = -3x^3 + 3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0$$

$$-3x^3 + 3x^2 + 6x = 0$$

$$x = -1 \text{ tai } x = 0 \text{ tai } x = 2$$

$$f'(-2) = 24$$

$$f'(-0,5) = -1,875$$

$$f'(1) = 6$$

$$f'(3) = -36$$

		-1		0		2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		max		min		max	

Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimiarvot

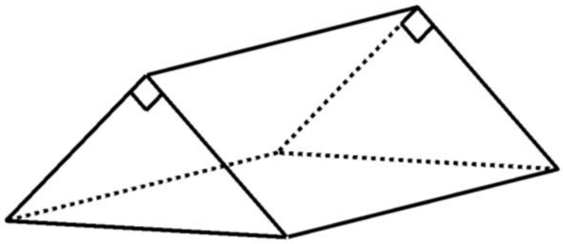
$$f(-1) = -\frac{3}{4}\cdot(-1)^4 + (-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 - 3 = \underline{\underline{-\frac{7}{4}}} \quad \text{ja}$$

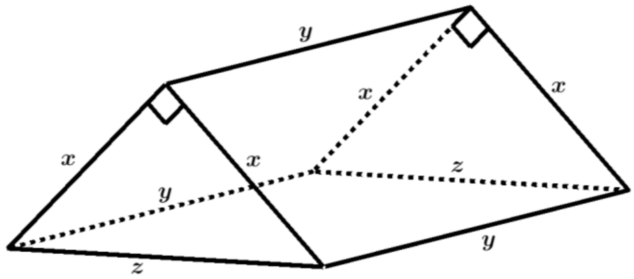
$$f(2) = -\frac{3}{4}\cdot 2^4 + 2^3 + 3\cdot 2^2 - 3 = \underline{\underline{5}}$$

b) Funktion suurin arvo on $f(2) = \underline{\underline{5}}$.

c) Kulkukaavion perusteella välillä $[-2,\ 0]$ funktion suurin arvo on $f(-1) = \underline{\underline{-\dfrac{7}{4}}}$

3. Sadekatokselle tehdään teräsputkesta kuvan mukainen kehikko, jonka päädyt ovat samanlaisia tasakylkisiä suorakulmaisia kolmioita. Sadekatoksen tilavuuden on oltava 250 m^3. Kehikkoon tarvitaan kolmenmittaisia putkia. Suunnittele, kuinka pitkiä putkia on valmistettava, jotta putkea yhteensä tarvittaisiin mahdollisimman vähän halutunlaisen kehikon rakentamiseen. Anna vastaukset senttimetrin tarkkuudella.





Nimetään tarvittavat putket x, y ja z.

Ilmaistaan kokonaisputkimäärä muuttujan x avulla:

$$z^2 = x^2 + x^2$$
$$z^2 = 2x^2 \; \| \sqrt{}$$
$$(z = -\sqrt{2}x) \text{ tai } z = \sqrt{2}x$$

Tilavuus = päätykolmion ala $\cdot$ pituus

$$250 = \frac{x \cdot x}{2} \cdot y$$
$$250 = \frac{1}{2}x^2 y \;\; \| \cdot 2 \;\; \| : x^2$$
$$y = \frac{500}{x^2}$$

Kokonaisputkentarve $P(x) = 4x + 3y + 2z$

$$= 4x + 3 \cdot \frac{500}{x^2} + 2 \cdot \sqrt{2}x$$
$$= (4 + 2\sqrt{2})x + 1500x^{-2}$$

$$P'(x) = 4 + 2\sqrt{2} - 3000x^{-3}$$

$$P'(x) = 0$$
$$4 + 2\sqrt{2} - 3000x^{-3} = 0$$

$$x = -5 \cdot \left(6 \cdot \left(\sqrt{2} - 2\right)\right)^{\frac{1}{3}} \qquad x = 7.6020990752$$

$$P'(1) = -2993{,}17\ldots < 0$$
$$P'(10) = 3{,}82\ldots > 0$$

		7,60...	
$P'(x)$	$-$		$+$
$P(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Kulkukaavion perusteella putkentarve on pienin, kun $x = 7{,}60209\ldots$ (m).

Tällöin $y = \frac{500}{x^2} = 8{,}6517\ldots$ (m) ja $z = \sqrt{2}x = 10{,}7509\ldots$ (m).

Vastaus. Putkea tarvitaan vähiten, kun tehdään neljä 760 cm:n, kolme 865 cm:n ja kaksi 106 cm:n pituista putkea.

4. Sanotaan, että funktio on tietyllä välillä *konveksi*, jos sen derivaatta on kasvava tällä kyseisellä välillä. Osoita, että funktio $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$ on konveksi, kun $x\neq 0$.

$$f(x)=\frac{2}{x^2}=2x^{-2} \quad\Rightarrow\quad f\,'(x)=-4x^{-3}$$

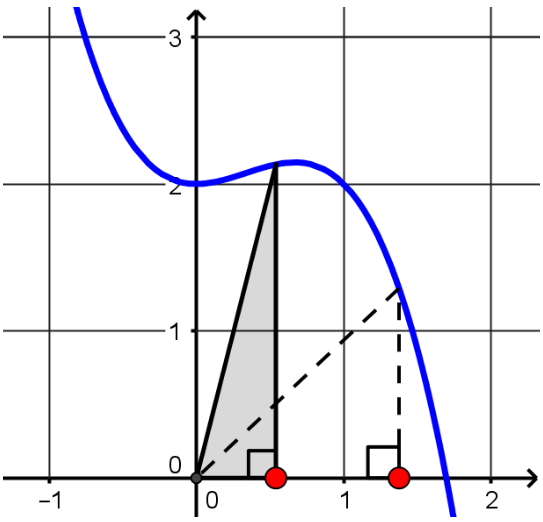
$$\Rightarrow\quad f\,''(x)=12x^{-4}=\frac{\overset{>0}{12}}{\underset{>0}{x^4}},\ \text{kun } x\neq 0.$$

Funktion $f(x)$ derivaattafunktion derivaattafunktio $f\,''(x)$ on siis aina positiivinen, kun $x\neq 0$, joten derivaattafunktio $f\,'(x)$ on tällöin kasvava.
Siispä funktio $f(x)$ on konveksi, kun $x\neq 0$.

5. Koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä on suorakulmainen kolmio, jonka yksi kärki on origossa, kanta positiivisella x-akselilla ja huippu käyrällä $f(x)=-x^3+x^2+2$.

a) Muodosta GeoGebralla kuvan mukainen konstruktio tilanteesta, jossa voit muuttaa kolmion kannan leveyttä kärkipisteestä, jossa on suorakulma. **(2 p.)**

b) Laske, mikä on pinta-alaltaan suurimman tällaisen kolmion ala. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella. **(4 p.)**



a) Toimiva oikeanlainen konstruktio GeoGebralla (2 p.)

b)

Merkitään $x =$ kolmion kanta, $x \geq 0$.

Kolmion pinta-alafunktio

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (-x^3 + x^2 + 2)$$
$$= -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x$$

$$A'(x) = -2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$$
$$A'(x) = 0$$
$$-2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 = 0$$

$$\text{solve}\left(-2 \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 1 = 0, x\right) \qquad x = \frac{(17-12\cdot\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \cdot \left((12\cdot\sqrt{2}+17)^{\frac{2}{3}} + (12\cdot\sqrt{2}+17)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{4}$$

$$\text{solve}\left(-2 \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 1 = 0, x\right) \qquad x = 1.13686116839$$

$$A'(1) = 0{,}5 \quad > 0$$
$$A'(1{,}2) = -0{,}296 \quad < 0$$

	0	**1,13...**
$A'(x)$	$+$	$-$
$A(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Kulkukaavion perusteella kolmion ala on suurin, kun $x = 1{,}1368...$

Suurimman kolmion ala:

$$\text{Define } a(x) = \frac{-1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^3 + x \qquad \textit{Valmis}$$

$$a\left(\frac{(17-12\cdot\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \cdot \left((12\cdot\sqrt{2}+17)^{\frac{2}{3}} + (12\cdot\sqrt{2}+17)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{4}\right)$$
$$1.03631337469$$

Vastaus. Suurimman mahdollisen kolmion ala on $1{,}036$ pinta-alayksikköä.