WIKIPEDIA
Vapaa tietosanakirja

Etusivu
Tietoja Wikipediasta
Kaikki sivut
Satunnainen artikkeli

Osallistuminen
Ohje
Kahvihuone
Ajankohtaista
Tuoreet muutokset

Työkalut
Tänne viittaavat sivut
Linkitettyjen sivujen muutokset
Toimintosivut
Ikilinkki
Sivun tiedot
Wikidata-kohde
Viitetiedot

Muissa hankkeissa
Wikimedia Commons

Tulosta tai vie
Luo kirja
Lataa PDF-tiedostona
Tulostettava versio

Muilla kielillä
العربية
Bahasa Indonesia
Deutsch
English
Español
हिन्दी
Русский
Svenska
中文
37 muuta kieltä
Muokkaa linkkejä

L'Hôpitalin sääntö

Tähän artikkeliin tai osioon ei ole merkitty lähteitä, joten tiedot kannattaa tarkistaa muista tietolähteistä.
Voit lisätä artikkeliin tarkistettavissa olevia lähteitä ja merkitä ne ohjeen mukaan.

Tarkennus: *Vain yksi lähde*

Guillaume de l'Hôpital, jonka mukaan l'Hôpitalin sääntö on nimetty.

L'Hôpitalin sääntö (joskus muodossa **l'Hospitalin**) on 1600-luvun lopulla kehitetty, ranskalaisen matemaatikon Guillaume de l'Hôpitalin mukaan nimetty matemaattinen menetelmä, jossa epämääräistä muotoa olevia raja-arvoja laskettaessa käytetään apuna derivaattaa. L'Hôpital julkaisi säännön vuonna 1696 kirjassaan *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*. L'Hôpitalin säännön on itse asiassa kehittänyt l'Hôpitalin opettaja, sveitsiläinen matemaatikko Johann Bernoulli[1]. L'Hôpital ja Bernoulli kirjoittivat sopimuksen, jonka mukaan l'Hôpital sai korvausta vastaan käyttää Bernoullin matemaattisia tuloksia vapaasti omissa nimissään.

Olkoot funktiot f ja g jatkuvia ja derivoituvia välillä $A \setminus \{a\}$, missä A on avoin väli, joka sisältää pisteen a. Oletetaan lisäksi, että

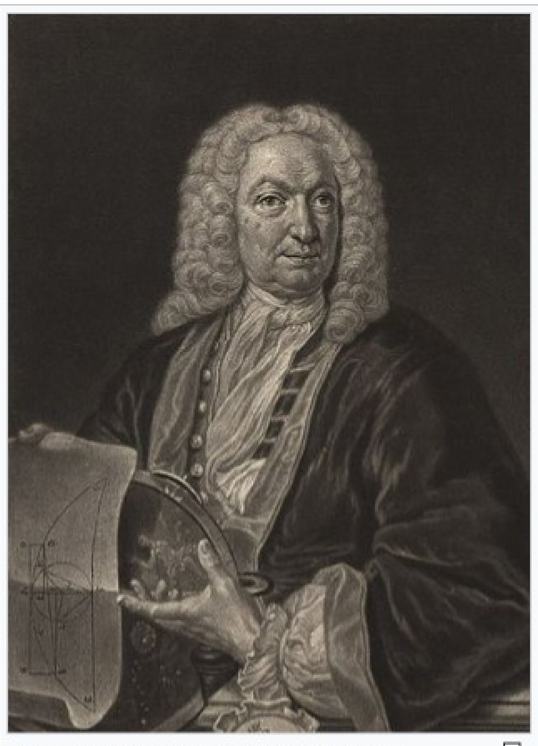
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ tai } \pm\infty$ ja

$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ on olemassa (äärellisenä tai äärettömänä) ja

$g'(x) \neq 0$ kaikille $x \in A \setminus \{a\}$.

Nyt l'Hôpitalin säännön mukaan seuraava on tosi: näiden funktioiden osamäärän raja-arvo L kohdassa a on sama kuin funktioiden derivaattojen osamäärän raja-arvo samassa kohdassa. Matemaattisin merkinnöin ilmaistuna saamme jälkimmäisestä lauseesta

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$



Johann Bernoulli, jonka uskotaan kehittäneen l'Hôpitalin säännön.

Sääntöä voidaan soveltaa useita kertoja peräkkäin, mutta säännön soveltamisen ehdot on tarkastettava tällöin joka sovelluskerralla uudelleen. Sääntö muun muassa helpottaa raja-arvojen laskemista, kun funktioiden derivaattojen raja-arvot on helpompi laskea kuin itse funktioiden, etenkin kun derivaattojen arvot pisteessä a poikkeavat nollasta. Sääntö voidaan laajentaa myös koskemaan toispuoleisia sekä äärettömiä raja-arvoja.

Sisällysluettelo [piilota]

1 l'Hôpitalin säännön todistus
2 Esimerkkejä l'Hôpitalin säännön käytöstä
2.1 Ongelmatapauksia
3 Lähteet

l'Hôpitalin säännön todistus [muokkaa | muokkaa wikitekstiä]

Todistetaan l'Hôpitalin sääntö differentiaalilaskennan väliarvolauseen avulla.

- Tapaus 1: Oletetaan, että piste a on äärellinen.

Määritellään $f(a) = g(a) = 0$, jolloin funktiot f ja g ovat jatkuvia pisteessä a. Valitaan nyt piste x niin läheltä pistettä a, että funktiot f ja g toteuttavat differentiaalilaskennan väliarvolauseen oletukset välillä $[a, x]$ (tai $[x, a]$, jos $x < a$).

Nyt saadaan

$$f'(\xi)g(x) = g'(\xi)f(x),$$

missä $\xi \in (a, x)$ (tai $\xi \in (x, a)$, jos $x < a$). Lisäksi $g'(x) \neq 0$ jossain pisteen a ympäristössä ($x \neq a$). Differentiaalilaskennan väliarvolauseen mukaan

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

kun $|x - a| \neq 0$ on tarpeeksi pieni. Kun nyt $x \to a$, niin myös $\xi \to a$, joten väite seuraa yllä olevasta yhtälöstä. Sama on voimassa myös toispuoleisten raja-arvojen tapauksessa.

- Tapaus 2: Oletetaan, että $a = \pm\infty$.

Merkitään $t = \frac{1}{x}$, jolloin todistus menee vastaavasti kuin tapauksessa 1. Tällöin

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esimerkkejä l'Hôpitalin säännön käytöstä [muokkaa | muokkaa wikitekstiä]

Käytetään merkintää == osoittamaan l'Hôpitalin säännön soveltamista esimerkeissä.

- Varsin klassinen esimerkki lauseen käytöstä on funktioiden $\sin x$ ja x osamäärän raja-arvo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} == \lim_{x\to 0} \frac{D(\sin x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Vaikka tämä raja-arvo onkin oiva esimerkki lauseen käytöstä, se sisältää kehäpäätelmän. Tätä tulosta käytetään sinifunktion derivoimissäännön johdossa, joten l'Hôpitalin sääntö ei ole todistusvoimainen kyseisen raja-arvon kohdalla. Lauseen käytön kuvaamisessa se on kuitenkin klassinen esimerkki.

- Esimerkki tilanteesta, jossa osamäärä on epämääräistä muotoa $0/0$. L'Hôpitalin säännön soveltaminen ensimmäisen kerran antaa yhä epämääräistä muotoa olevan raja-arvon. Tämä saadaan kuitenkin lasketuksi soveltamalla sääntöä yhteensä kolme kertaa:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x - \sin x} &== \lim_{x\to 0} \frac{D(2\sin x - \sin 2x)}{D(x - \sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{1 - \cos x} \\ &== \lim_{x\to 0} \frac{D(2\cos x - 2\cos 2x)}{D(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{\sin x} \\ &== \lim_{x\to 0} \frac{D(-2\sin x + 4\sin 2x)}{D(\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{\cos x} = \frac{-2 + 8}{1} = 6.\end{aligned}$$

- Esimerkki säännön käytöstä tilanteessa, jossa osamäärä on epämääräistä muotoa ∞/∞:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} &== \lim_{x\to\infty} \frac{D(x^n)}{D(e^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = n \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} \\ &== n \lim_{x\to\infty} \frac{D(x^{n-1})}{D(e^x)} = n(n-1) \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-2}}{e^x} \\ &== \ldots == n! \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.\end{aligned}$$

Ongelmatapauksia [muokkaa | muokkaa wikitekstiä]

- Ennen l'Hôpitalin säännön käyttämistä on tärkeää tarkistaa, että osamäärä on varmasti epämääräistä muotoa. Tämä unohtuu helposti, jos l'Hôpitalin sääntöä käytetään raja-arvoa laskettaessa useita kertoja peräkkäin. Lasketaan raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x + x^2} == \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1 + 2x} == \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0.$$

Tämä on väärin, sillä $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1 + 2x}$ ei ole epämääräistä muotoa, joten siihen ei voi soveltaa l'Hôpitalin sääntöä.

Oikea tapa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x + x^2} == \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1 + 2x} = \frac{\lim_{x\to 0} \cos(x)}{\lim_{x\to 0} 1 + 2x} = \frac{1}{1} = 1.$$

- Joskus l'Hôpitalin säännön käyttäminen johtaa takaisin alkuperäiseen muotoon:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} &== \lim_{x\to\infty} \frac{D(e^x + e^{-x})}{D(e^x - e^{-x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &== \lim_{x\to\infty} \frac{D(e^x - e^{-x})}{D(e^x + e^{-x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ &== \lim_{x\to\infty} \frac{D(e^x + e^{-x})}{D(e^x - e^{-x})} = \ldots.\end{aligned}$$

Tämän tilanteen voi välttää sijoittamalla $y = e^x$, missä $y \to \infty$, kun $x \to \infty$. Nyt raja-arvon laskeminen on helppoa:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y + y^{-1}}{y - y^{-1}} == \lim_{y\to\infty} \frac{D(y + y^{-1})}{D(y - y^{-1})} = \lim_{y\to\infty} \frac{1 - y^{-2}}{1 + y^{-2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

- Toinen esimerkki tapauksesta, jossa l'Hôpitalin säännön käyttäminen ei johda mihinkään:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + x^2}}{x} &== \lim_{x\to\infty} \frac{D(\sqrt{2 + x^2})}{D(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}} \\ &== \lim_{x\to\infty} \frac{D(x)}{D(\sqrt{2 + x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + x^2}}{x} \\ &== \lim_{x\to\infty} \frac{D(\sqrt{2 + x^2})}{D(x)} = \ldots.\end{aligned}$$

Parempi tapa on sieventää lauseketta. Nyt ei tarvitse käyttää l'Hôpitalin sääntöä ja saadaan helposti:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2}{x^2} + 1} = \sqrt{0 + 1} = 1.$$

Lähteet [muokkaa | muokkaa wikitekstiä]

1. ↑ Boyer, Carl: *Tieteiden kuningatar: Matematiikan historia. Osa 2*, s. 592–594. (A history of mathematics). Suomentanut Kimmo Pietiläinen. Helsinki: Art House, 1994. ISBN 951-884-150-0.

Luokka: Differentiaalilaskenta