5. Hyttysiä ja muurahaisia 12 p.

Huoneen pituus on 6 m, leveys 5 m ja korkeus 3 m. Laske lyhin reitti katon nurkasta lattian keskipisteeseen

5.1. hyttyselle 6 p.

5.2. muurahaiselle. 6 p.

5.1

Hyttynen lentää suoraan lähtöpaikastaan lattian keskipisteeseen. Tällöin sijainnin korkeus muuttuu 3m, pituus 3m ja leveys 2,5 m. Kuljettu matka on tälllöin:

Tarkka arvo: $\sqrt{3^2+3^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} \blacktriangleright \frac{\sqrt{97}}{2}$

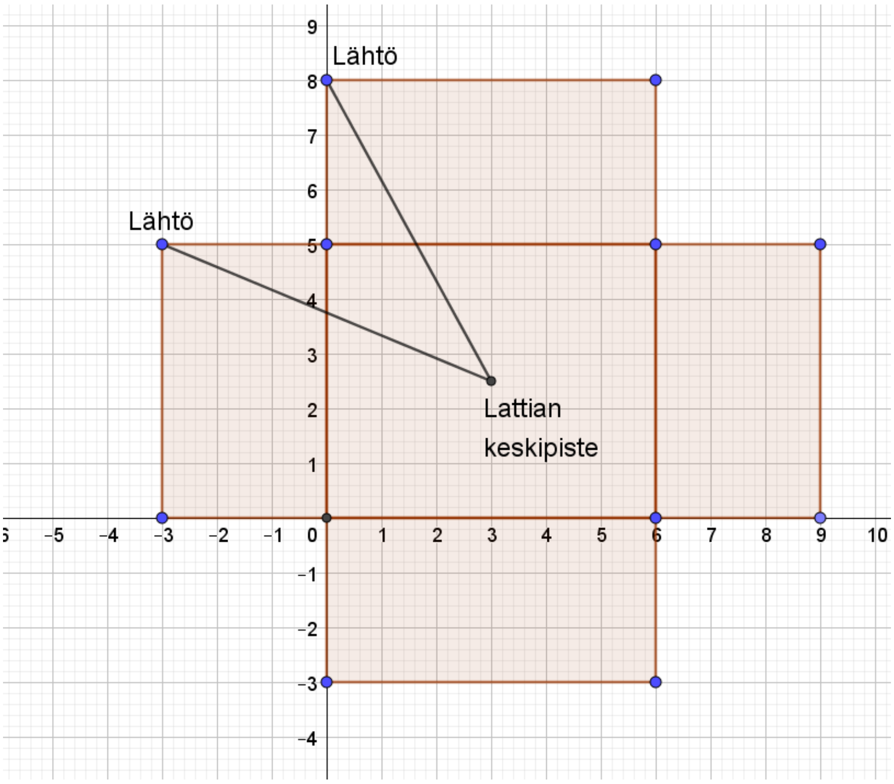
Likiarvo: $\sqrt{3^2+3^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} \blacktriangleright 4.92443$

Vastaus: Hyttysen lyhimmän reitin pituus on noin 4,9 metriä.

Pisteytys:
Oikea päätelmä 2p
Oikea lasku 4p
Pyöristysvirhe -2p
Neliöjuuri puuttuu: max 3p
Laskettu pelkkä avaruuslävistäjä: max 3p

5.2

Levitetään huoneen seinät tasoksi, jolloin kahden pisteen (lähtöpiste ja lattian keskipiste) lyhin etäisyys toisistaan on pisteiden välinen jana.



Eri vaihtoehdot:

Tarkka arvo: $\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+3^2} \blacktriangleright \frac{\sqrt{157}}{2}$

Likiarvo: $\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+3^2} \blacktriangleright 6.26498$

Toinen reitti:

Tarkka arvo: $\sqrt{6^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} \blacktriangleright \frac{13}{2}$

Likiarvo: $\sqrt{6^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} \blacktriangleright 6.5$

Vastaus: Lyhin reitti on noin 6,3 metriä.

Pisteytys:
Ajatus tasoon levittämisestä 2p
Oikeat laskut 2p
Oikea vastaus 2p
Pyöristysvirhe -2p
Vain toinen matka laskettu ilman perusteluja: max 3p

6. Käyrän ja x-akselin välinen pinta-ala 12 p.

Funktiosta $f(x)$ tiedetään seuraavat tiedot:

$f(2) = 4$ $f(3) = 3$ $f(4) = 4$ $f(5) = 5$ $f(6) = 4$ $f(7) = 5$ $f(8) = 5$

Tarkastellaan funktion $f(x)$ kuvaajan ja x-akselin rajoittamaa pinta-alaa välillä $[2, 8]$. Olkoon S_n puolisuunnikassäännön määräämä pinta-ala, kun n on puolisuunnikkaiden lukumäärä.

6.1. Määritä S_1 **4 p.**

6.2. Määritä S_6 **4 p.**

6.3. Määritä funktion $f(x)$ kuvaajan ja x-akselin välinen pinta-ala approksioimalla funktio $f(x)$ kuudennen asteen polynomifunktioksi. **4 p.**

Määritä

a) S_1

b) S_6

c) funktion $f(x)$ kuvaajan ja x-akselin välinen pinta-ala approksimoimalla $f(x)$ kuudennen asteen polynomifunktioksi.

6.1

$$S_1 = h\cdot\left(\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}f(x_1)\right) = (8-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 5\right) \blacktriangleright 27$$

2p 2p

6.2

$$S_6 = h\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+\frac{1}{2}\cdot f(x_6)\right) =$$

$$\frac{8-2}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4+3+4+5+4+5+\frac{1}{2}\cdot 5\right) \blacktriangleright \frac{51}{2}$$

2p 2p

6.3

$$f(x):=a\cdot x^6+b\cdot x^5+c\cdot x^4+d\cdot x^3+e\cdot x^2+m\cdot x+n \blacktriangleright \textit{Valmis}$$

1p

$$\text{solve}\left(\begin{cases} f(2)=4 \\ f(3)=3 \\ f(4)=4 \\ f(5)=5 \\ f(6)=4 \\ f(7)=5 \\ f(8)=5 \end{cases}, \{a,b,c,d,e,m,n\}\right)$$

1p

$$\blacktriangleright a=\frac{-19}{720} \text{ and } b=\frac{61}{80} \text{ and } c=\frac{-1265}{144} \text{ and } d=\frac{2465}{48} \text{ and } e=\frac{-7186}{45} \text{ and } m=\frac{14963}{60} \text{ and } n=-149$$

1p $\int_{2}^{8} \mathbf{f}(x) | a=\frac{-19}{720} \text{ and } b=\frac{61}{80} \text{ and } c=\frac{-1265}{144} \text{ and } d=\frac{2465}{48} \text{ and } e=\frac{-7186}{45} \text{ and } m=\frac{14963}{60}$

1p ▸ 26.2357142863

Pisteytys: laskujen vieressä

7. Ruletin voittostrategia 12 p.

Ruletti on yksi maailman suosituimpia uhkapelejä. Eurooppalaisessa ruletissa on käytössä 37 numeroa (0-36). Numeroista 1-36 puolet ovat mustia ja puolet punaisia, nolla on vihreä. Pelaajalla on erilaisia mahdollisuuksia veikata oikea luku, jonka määrittää pyöritettävässä ruletissa olevan kuulan pysähtymiskohta. Pelaaja voi halutessaan veikata esimerkiksi kuulan määrittämän luvun, luvun värin, luvun parillisuuden tai suuruusluokan (1-12, 13-24 tai 25-36). Pelaaja panostaa haluamansa rahasumman. Voittaessaan pelaaja saa panostamansa rahasumman takaisin määrätyllä kertoimella, hävitessään menettää panoksensa.

Yksi ruletin voittamisen strategia on ns. Martingaalistrategia. Strategian ideana on kaksinkertaistaa jokaisen häviön jälkeinen panos seuraavaan peliin niin kauan, kunnes voittaa ensimmäisen kerran. Käytännössä strategian käytön estävät mm. pelaajan rajallinen varallisuus sekä ruletin rajoitus maksimipanostuksessa.

Martingaalistrategiaa voidaan soveltaa yksinkertaiseen kolikonheittoon, jossa molemmat osapuolet asettavat yhtä suuren panoksen. Se pelaaja, jonka veikkaama kolikon puoli jää näkyviin, saa molempien panokset itselleen.

Heität kumppanisi kanssa kolikkoa ja asetatte ensimmäiseksi panokseksi a euroa. Päätät tuplata panoksesi joka kerta niin kauan, kunnes ensimmäisen kerran voitat.

7.1. Kuinka paljon jäät voitolle, jos voitat ensimmäisen kerran 5. kierroksella, jonka jälkeen lopetat pelin? **4 p.**

7.2. Osoita, että martingaalistrategiaa käyttämällä (eli tuplaamalla panoksesi jokaisen häviön jälkeen niin kauan, kunnes ensimmäisen kerran jäät voitolle) pääset kolikonheitossa varmasti voitolle. Määritä myös voiton suuruus. **4 p.**

7.3. Kaksinkertaistamisen sijaan päätät kolminkertaistaa panoksesi joka kerta. Muodosta funktio, joka kuvaa rahamäärääsi, kun ensimmäinen voitto tulee heitolla n. **4 p.**

7.1

Häviöt

1p $a+2\cdot a+4\cdot a+8\cdot a \blacktriangleright 15\cdot a$

Voitto 5. kierroksella

1p $16\cdot a$

1p Erotus $16\cdot a-15\cdot a \blacktriangleright a$

1p Vastaus; Jään voitolle a euroa

7.2

Ensimmäinen voitto kierroksella n

Häviöt

geometrinen summa

1p+1p $a+2a+\ldots+2^{n-2}a = a\cdot \frac{1-2^{n-1}}{1-2} \blacktriangleright \frac{a\cdot\left(2^{n}-2\right)}{2}$ (tai $\sum_{i=0}^{n-2}\left(2^{i}\cdot a\right) \blacktriangleright a\cdot\left(\frac{2^{n}}{2}-1\right)$)

Voitto kierroksella n

$2^{n-1}\cdot a$

1p Erotus $2^{n-1}\cdot a-\frac{a\cdot\left(2^{n}-2\right)}{2} \blacktriangleright a>0$ joten jään voitolle.

1p Vastaus: jään voitolle a euroa

7.3

Ensimmäinen voitto kierroksella n

Häviöt

geometrinen summa

1p+1p $a+3a+\ldots+3^{n-2}a= a\cdot\dfrac{1-3^{n-1}}{1-3} \blacktriangleright \dfrac{a\cdot(3^n-3)}{6}$ (tai $\sum_{i=0}^{n-2}(3^i\cdot a) \blacktriangleright a\cdot\left(\dfrac{3^n}{6}-\dfrac{1}{2}\right)$)

Voitto kierroksella n

$3^{n-1}\cdot a$

1p Jään voitolle $3^{n-1}\cdot a-\dfrac{a\cdot(3^n-3)}{6} \blacktriangleright a\cdot\left(\dfrac{3^n}{6}+\dfrac{1}{2}\right)$ euroa

Vastaus: Rahamäärää ensimmäisen voiton jälkeen kuvaa funktio $f(n)=a\cdot\left(\dfrac{3^n}{6}+\dfrac{1}{2}\right)$

1p

Pisteytys: laskujen vieressä

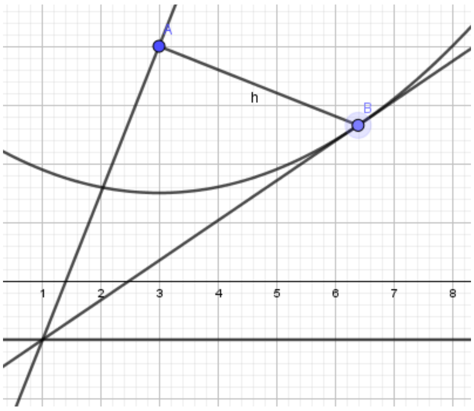
8. Paraabeli 12 p.

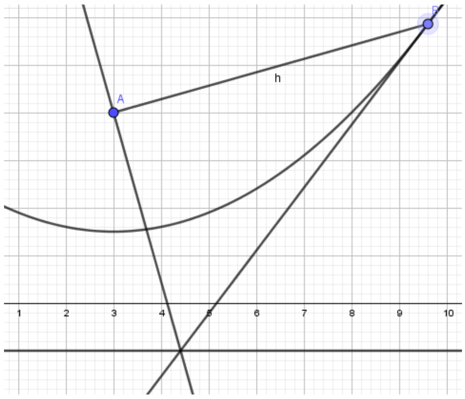
Olkoon paraabelin polttopiste $(3,4)$ ja johtosuora $y=-1$. Olkoon suora y_1 paraabelille kohtaan (x,y) piirretty tangentti ja suora y_2 se polttopisteen kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa polttopisteen ja pisteen (x,y) välistä janaa vastaan.

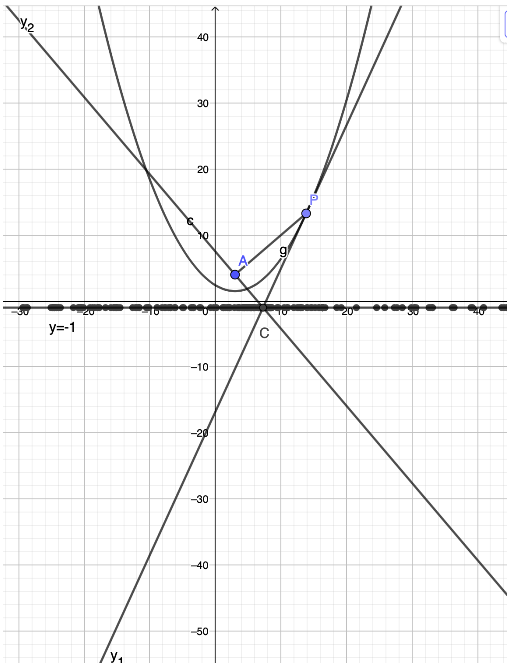
8.1. Tarkastele graafisesti: Minkä pistejoukon suorien y_1 ja y_2 leikkauspisteet muodostavat? **6 p.**

8.2. Osoita tehtävässä 8.1. saamasi tulos algebrallisesti. **6 p.**

8.1







Vastaus: Leikkauspisteet muodostavat suoran y = - 1

Pisteytys:
Tilannetta kuvaava kuvankaappaus 3p
Vastaus 3p

8.2

1p Paraabelin yhtälö on $\text{solve}\left(\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=|y--1|,y\right) \blacktriangleright y=\frac{x^2-6\cdot x+24}{10}$ ⚠

1p Kohtaan x=a piirretty tangentti $y=\text{tangentLine}\left(\frac{x^2-6\cdot x+24}{10},x,a\right) \blacktriangleright y=\frac{(a-3)\cdot x}{5}-\frac{a^2-24}{10}$

Janan kulmakerroin $\frac{\frac{x^2-6\cdot x+24}{10}-4}{x-3}|x=a \blacktriangleright \frac{a^2-6\cdot a-16}{10\cdot (a-3)}$

1p Suoran y_2 kulmakerroin $\frac{-1}{\frac{a^2-6\cdot a-16}{10\cdot (a-3)}} \blacktriangleright \frac{-10\cdot (a-3)}{a^2-6\cdot a-16}$ ⚠

Suoran y_2 yhtälö

1p $y-4=\frac{-10\cdot (a-3)}{a^2-6\cdot a-16}\cdot (x-3) \blacktriangleright y-4=\frac{-10\cdot (a-3)\cdot (x-3)}{a^2-6\cdot a-16}$

Suorien y_1 ja y_2 leikkauspiste

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y=\frac{(a-3)\cdot x}{5}-\frac{a^2-24}{10} \\ y-4=\frac{-10\cdot (a-3)\cdot (x-3)}{a^2-6\cdot a-16}\end{cases},\{x,y\}\right) \blacktriangleright x=\frac{a^2-34}{2\cdot (a-3)} \text{ and } y=-1 \text{ and } a+2\neq 0 \text{ and } a-8\neq 0$$

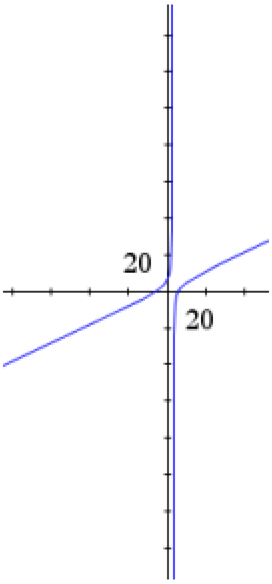
1p

Koko suora y=−1 täyttyy pisteillä, sillä

$f(a):=\frac{a^2-34}{2\cdot (a-3)} \blacktriangleright \mathit{Valmis}$

$\lim_{a\to\infty}(f(a)) \blacktriangleright \infty$ ja $\lim_{a\to-\infty}(f(a)) \blacktriangleright -\infty$ ja $\lim_{a\to 3^+}(f(a)) \blacktriangleright -\infty$ ja $\lim_{a\to 3^-}(f(a)) \blacktriangleright \infty$

ja f on määrittelyjoukossaan jatkuva

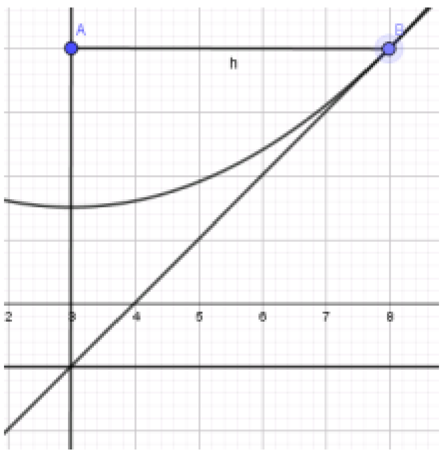


ja kun a=8 tai a=−2, niin

$y=\dfrac{x^2-6\cdot x+24}{10}|x=8 \blacktriangleright y=4$ ja $y=\dfrac{x^2-6\cdot x+24}{10}|x=-2 \blacktriangleright y=4$

jolloin suora y_2 on pystysuora ja saavutetaan suoralta y=−1 kohta x=3 (kuva)

1p



Toinen ratkaisuvaihtoehto suorien leikkauspisteen selvittämiseen:

$\mathbf{x_0}:=3$ ▸ 3

$\mathbf{y_0}:=4$ ▸ 4

$\mathbf{johto}:={}^{-}1$ ▸ ${}^{-}1$

$$\text{solve}\left(\frac{|y-\mathbf{johto}|}{1}=\sqrt{(x-\mathbf{x_0})^2+(y-\mathbf{y_0})^2},y\right) ▸ y=\frac{x^2-6\cdot x+24}{10}$$

$$\mathbf{f}(x):=\frac{x^2-6\cdot x+24}{10} ▸ \mathit{Valmis}$$

$$\mathbf{d}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) ▸ \mathit{Valmis}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y-\mathbf{f}(x_1)=\mathbf{d}(x_1)\cdot(x-x_1) \\ y-\mathbf{y_0}=\left(\dfrac{\mathbf{f}(x_1)-\mathbf{y_0}}{\mathbf{x_0}-x_1}\right)^{-1}\cdot(x-\mathbf{x_0}) \end{cases},\{x,y\}\right) ▸ x=\frac{x_1^2-34}{2\cdot(x_1-3)} \text{ and } y={}^{-}1 \text{ and } x_1+2\neq 0 \text{ and } x_1-8\neq 0$$

9. Välivaiheiden selvittäminen 12 p.

Löydät Villen muistiinpanoista seuraavat merkinnät:

1. Tiedetään $A=(1,2,3)$, $B=(2,5,7)$, $C=(3,1,5)$ ja $P=(7,5,1)$.
2. $\begin{cases} x=1+s+2t \\ y=2+3s-t \\ z=3+4s+2t \end{cases}$
3. $\overline{PQ}=(1+s+2t-7)\,\overline{i}+(2+3s-t-5)\,\overline{j}+(3+4s+2t-1)\,\overline{k}$
4. $\overline{PQ}=(s+2t-6)\,\overline{i}+(3s-t-3)\,\overline{j}+(4s+2t+2)\,\overline{k}.$
5. $\begin{cases} 1\cdot(s+2t-6)+3\cdot(3s-t-3)+4\cdot(4s+2t+2)=0 \\ 2\cdot(s+2t-6)-1\cdot(3s-t-3)+2\cdot(4s+2t+2)=0 \end{cases}$
6. Laskin: $s=\dfrac{28}{185}$ ja $t=\dfrac{81}{185}$
7. Sijoitetaan ja saadaan $Q=\left(\dfrac{75}{37},\dfrac{373}{185},\dfrac{829}{185}\right)$
8. $\sqrt{\left(\dfrac{75}{37}-7\right)^2+\left(\dfrac{373}{185}-5\right)^2+\left(\dfrac{829}{185}-1\right)^2}=\dfrac{92}{\sqrt{185}}$
9. Vastaus: $\dfrac{92\sqrt{185}}{185}$

9.1. Selvitä perustellen, mitä Ville on laskenut. Kerro, mitä eri vaiheissa tapahtuu. Kerro myös, mikä on koko laskun tarkoitus. Voit käyttää rivinumeroita viitatessasi eri välivaiheisiin. **9 p.**

9.2. Muodosta tehtävänanto, jonka vastaukseksi Villen vastaus sopisi. **3 p.**

9.1

1. Ville on kopioinut tehtäväksiannosta annetut pisteet A,B,C ja P.

2. Ville on laskenut tason ABC yhtälön. 1p

3. Q on tasossa ABC oleva mielivaltainen piste.

Ville on laskenut vektorin PQ. 1p

4. Ville on siventänyt vektorin PQ.

5. Ville vaatii, että PQ on kohtisuorassa tason ABC suuntavektoreita vastaan

eli pistetulon pitää olla nolla molempien suuntavektoreiden kanssa.

PQ on kohtisuorassa siten tasoa ABC vastaan. 1p

6. Ville on ratkaissut edellisen kohdan yhtälöparin laskimella. 1p

7. Ville on sijoittanut kohtaan 2 kohdassa 6 saadut luvut s ja t

ja saanut pisteen Q koordinaatit. Q on tasossa ABC lähinnä pistettä

P oleva piste. 1p

8. Ville on sieventänyt janan PQ pituuden. 1p

9. Janan PQ pituus sievennettynä laskimella.

Ville on laskenut pisteen P etäisyyden siitä tasosta, jonka pisteet A, B ja C muodostavat. (1p)

Ratkaisussa Ville on määrittänyt tasolta pisteen Q siten, että vektori PQ on tason normaali. (1p)

Tällöin vektorin PQ pituus on kysytty etäisyys. (1p)

9.2

Määritä pisteen P etäisyys tasosta ABC, kun

3p $\boldsymbol{A} = (1,2,3)$, $\boldsymbol{B} = (2,5,7)$, $\boldsymbol{C} = (3,1,5$ ja $\boldsymbol{P} = (7,5,1)$.

Pisteytys: laskujen vieressä