1. Kombinatoriikkaa ja todennäköisyyksiä 12 p.

Valitse kussakin kohdassa oikea vaihtoehto.

1.1. Kuinka moneen eri järjestykseen voidaan asettaa seitsemän erivaristä palloa? **2 p.**

- ○ 70
- ○ 720
- ○ 7
- ○ 5040
- ○ 49
- ○ 700

1.2. 20 opiskelijan ryhmästä valitaan 5 opiskelijaa opintomatkalle ulkomaille. Kuinka monella eri tavalla 5 opiskelijan ryhmä voidaan muodostaa? **2 p.**

- ○ 95 367 431 640 625
- ○ 4
- ○ 3 200 000
- ○ 15 504
- ○ 25

1.3. Laatikossa on sekaisin 25 erilaista sukkaparia eli 50 sukkaa. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti nostetut sukat ovat samaa paria? **2 p.**

- ○ $\frac{1}{50}$
- ○ 0,49 %
- ○ 49 %
- ○ 2,04 %
- ○ 50 %

1.4. Sievennä lauseke $\binom{n+1}{n}$ kun n on positiivinen kokonaisluku. **2 p.**

- ○ n
- ○ 1
- ○ $n!$
- ○ $n+1$
- ○ $(n+1)!$

1.5. Erään normaalijakautuneen lintulajin siipivälin odotusarvo on 24 cm ja keskihajonta 3 cm. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti bongatun linnun siipiväli on korkeintaan 30 cm? **2 p.**

- ○ 99,18 %
- ○ 97,72 %
- ○ 57,93 %
- ○ 50 %
- ○ 50,80 %
- ○ 99,87 %

1.6. Funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \sqrt[3]{3} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

on satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Tämän perusteella $P(X < 1)$ on **2 p.**

- ○ $\frac{1}{2}$
- ○ 1
- ○ $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
- ○ $\frac{3}{3}$
- ○ 0
- ○ $\frac{1}{3}$

2. Derivaatta (12 p.)

2.1. Määritä funktion $f\left(x\right)=-5x^{2}-100x$ derivaatan nollakohta. **4 p.**

2.2. Määritä funktion $f\left(x\right)=-5x^{2}-100x$ suurin arvo. **4 p.**

2.3. Määritä funktion $f\left(x\right)=-5x^{2}-100x$ kuvaajalle kohtaan $x=1$ piirretyn tangentin yhtälö. **4 p.**

2.1

Funktion derivaatta:

$$f'(x) = -10x - 100$$

Merkitään derivaatta nollaksi ja ratkaistaan yhtälö:

$$-10x - 100 = 0$$

$$x = -10$$

Derivaatta: 2p
Derivaatta merkitty nollaksi: 1p
Oikea derivaatan nollakohta: 1p

2.2

Funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion suurin arvo löytyy sen derivaatan nollakohdasta.
Edellisen kohdan perusteella funktion derivaatan nollakohta on $x = -10$.
Funktion suurin arvo siis:

$$f(-10) = -5 \cdot (-10)^2 - 100 \cdot (-10) = -500 + 1000 = 500$$

Oikea päättely: 2p
$f(-10)$ 1p
Vastaus 1p
(Jos vastauksena annettu -10, max 2p)

2.3

Kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin saadaan funktion derivaatasta kohdassa $x = 1$:

$$f'(1) = -10 \cdot 1 - 100 = -110$$

Kohdan $x = 1$ y-koordinaatti on $f(1)$:

$$f(1) = -5 \cdot 1^2 - 100 \cdot 1 = -105$$

Tangentin yhtälö saadaan nyt yhtälöstä

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - (-105) = -110(x - 1)$$

$$y + 105 = -110x + 110$$

$$y = -110x + 5$$

$f(1)$ laskettu oikein 1p
Tangentin runko oikein 1p
Oikea vastaus 2p

3. Trigonometria 12 p.

3.1. Määritä $\sin(\alpha)$, kun $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$ ja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 6 p.

3.2. Määritä yhtälön $2\cos^2(x) = 1$ ne ratkaisut, jotka ovat välillä $[2\pi, 4\pi]$. 6 p.

3.1

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$ (valitaan positiivinen vaihtoehto, koska kulma kuuluu välille $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{4}{9}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

1p per rivi

3.2

$$2\cos^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$ 1p

Tutkitaan erikseen positiivinen ja negatiivinen ratkaisu.
Positiivinen ratkaisu:

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$ 1p

Annetun välin ratkaisut ovat:

$$\frac{9\pi}{4}\ ja\ \frac{15\pi}{4}$$ 1p

Negatiivinen ratkaisu:

$$\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$ 1p

Annetun välin ratkaisut ovat:

$$\frac{11\pi}{4}\ ja\ \frac{13\pi}{4}$$ 1p

Vastaus:

$$x \in \left\{\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\right\}$$ 1p

Pisteytys merkitty ratkaisun eri vaiheisiin
Ratkaisussa käytetty asteita: max 3p
Vastauksessa ei huomioitu annettua väliä: max 3p
Ratkaisun alussa ± puuttuu ja tutkittu vain positiivista ratkaisua: max 3p

4. Yhtälölle ratkaisut 12 p.

Määritä vakion a arvo/arvot siten, että yhtälöllä $4x^3 + ax^2 + x = 0$ on täsmälleen kaksi ratkaisua. Määritä tätä vakiota vastaavan yhtälön ratkaisut.

$$4x^3 + a \cdot x^2 + x = 0$$

1p $$x\left(4x^2 + a \cdot x + 1\right) = 0$$

1p $$x = 0 \ tai \ 4x^2 + a \cdot x + 1 = 0$$

Ratkaisuja on kaksi, jos toisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu (1p). Toisen asteen yhtälön diskriminantti

2p $$D = a^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$$

2p Oltava D=0, joten

$$a^2 - 16 = 0$$

$$a^2 = 16$$

2p $$a = 4 \ tai \ a = -4$$

Jos a=4, niin

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$(2x+1)^2 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

2p

$$x = -\frac{1}{2}$$

ja toinen alkuperäisen yhtälön ratkaisu on x=0.

Jos a=-4, niin

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x-1)^2 = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

1p

$$x = \frac{1}{2}$$

ja toinen alkuperäisen yhtälön ratkaisu on x=0.

Pisteytys: merkitty laskujen viereen