Aineisto: MAA_Preli_K2026_Pisteytysohje_MFKA

1. Alkupaloja

1.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

1. Millä vakion a arvolla yhtälön $(a-6)\,x+6=-2$ ratkaisu on negatiivinen?

PERUSTELU
Ratkaistaan yhtälö.
$(a-6)\,x+6=-2$
$(a-6)\,x=-8$
Jaetaan yhtälö puolittain lausekkeella $(a-6)\neq 0$, josta seuraa ehto $a-6\neq 0$.
Saadaan $x=-\frac{8}{a-6}$.
Tästä nähdään, että ratkaisu on negatiivinen kun $a-6>0$, joten $a>6$.

PISTEYTYS
- oikea vastaus (2 p.)

2. Mitä tarkoitetaan funktiolla $f:\ x\rightarrow y$?

PERUSTELU
Funktio on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon alkioon täsmälleen yhden arvon. Kaikki funktion arvot muodostavat funktion arvojoukon.
Oikea vastaus on siis: "Sääntö, joka liittää jokaiseen sallittuun x -arvoon täsmälleen yhden y -arvon.

PISTEYTYS
- oikea vastaus (2 p.)

3. Neljä opiskelijaa haravoivat koulun piha-alueen viidessä tunnissa. Kuinka monta opiskelijaa tarvitaan, jotta sama työ saadaan tehdyksi kahdessa tunnissa? Oletetaan, että jokainen opiskelija haravoi yhtä nopeasti.

PERUSTELU
Työmäärä on vakio, koska koulun piha-alue on vakio. Sen seurauksena työaika ja opiskelijamäärä ovat kääntäen verrannolliset.
Neljä opiskeiljaa: $5\ \cdot\ 4\ =\ 20\ (\mathrm{h})$
Kaksi opiskeiljaa: $2\ \cdot\ x\ =\ 20\ \Rightarrow\ x=10$
Tarvitaan siis kymmenen opiskelijaa.

PISTEYTYS
- oikea vastaus (2 p.)

4. Maanantaiaamuna rahastossa oli 256 euroa. Torstaiaamuna rahaston arvo oli 814 euroa. Oletetaan, että rahaston arvo kasvaa joka päivä samalla kasvukertoimella. Kuinka monta prosenttia rahaston arvo kasvoi päivittäin keskimäärin? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

PERUSTELU
Idea: $\mathrm{loppuarvo}=\mathrm{alkuarvo}\cdot k^t$

$k=\mathrm{päivittäinen\ kasvukerroin}$
$t=\mathrm{päivien\ määrä}$

Sijoitetaan annetut arvot ja saadaan
$256\cdot k^3=814$
$k^3=\frac{814}{256}$

$k = \sqrt[3]{\frac{814}{256}} = 1{,}470... \approx 1{,}47$

Rahaston arvo kasvaa siis päivittäin keskimäärin $47\ \%$.

PISTEYTYS
- oikea vastaus (3 p.)

5. Opiskelijakunta korotti pullien hintaa lukion kahvilassa $15\ \%$, jolloin pullien menekki väheni $25\ \%$. Kuinka pullista saatavat myyntitulot muuttuivat?
Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

PERUSTELU
Olkoon myytyjen pullien lukumäärä alussa x ja yksikköhinta p euroa.
Myyntitulot ovat siis $x \cdot p$ € .
Korotuksen jälkeen myytyjen pullien lukumäärä on $0{,}75x$ ja pullien yksikköhinta on $1{,}15p$.
Uudet myyntitulot ovat $0{,}75x \cdot 1{,}15p \ = 0{,}8625xp \approx 0{,}86xp$.

Myyntitulot muuttuivat kertoimella $0{,}86$.
Myyntitulot vähenivät noin $14\ \%$.

PISTEYTYS
- oikea vastaus (3 p.)

2. Juuri- ja polynomiyhtälön ratkaiseminen

2.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

1. Ratkaise polynomiyhtälö $(x+1)^4-(x-1)^4=0$.

RATKAISU
$x^4+4x^3+6x^2+4x+1-\left(x^4-4x^3+6x^2-4x+1\right)=$
$x^4+4x^3+6x^2+4x+1-x^4+4x^3-6x^2+4x-1=$
$8x^3+8x=0$
$8x\left(x^2+1\right)=0$
$8x=0\ \lor\ x^2=-1\ \|\ \sqrt{}$, jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja, koska parillista juurta ei voi ottaa negatiivisesta luvusta.
Yhtälön ainoa ratkaisu on $x=0$

PISTEYTYS
- On korotettu binomit 4. potenssiin. (2 p.)
- On sievennetty yhtälö. (1 p.)
- On saatu oikea ratkaisu. (1 p.)

KOMMENTTI
- Kompleksilukujen $\mathbb{C}$ joukossa on myös ratkaisut $x=\pm i$.
- Pieni laskuvirhe (max. 2 p.)
- Yhtälö voidaan myös ratkaista: $(x+1)^4=(x-1)^4\ \ \|\ \sqrt[4]{}$, $|x+1|=|x-1|$ jne.

2. Ratkaise juuriyhtälö $\sqrt[3]{x+2}=x+2$ laskemalla.

RATKAISU
$\sqrt[3]{x+2}=x+2$
Kirjoitetaan yhtälö muodossa $(x+2)^{\frac{1}{3}}-(x+2)=0$.
Otetaan yhteinen tekijä, jolloin $(x+2)^{\frac{1}{3}}\left(1-(x+2)^{\frac{2}{3}}\right)=0$.
Tulon nollasäännön perusteella
$(x+2)^{\frac{1}{3}}=0$ tai $1-(x+2)^{\frac{2}{3}}=0$,
eli $x=-2$ tai $(x+2)^{\frac{2}{3}}=1\quad \|\,()^3$
$(x+2)^2=1$
$x^2+4x+4=1$
$x^2+4x+3=0$
$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm2}{2}$
Siis $x=-1$ tai $x=-3$

Vastaus: $x=-1$ tai $x=-2$ tai $x=-3$

PISTEYTYS
- On oivallettu saattaa yhtälö yhteisen tekijän muotoon. (2 p.)
- On hyödynnetty tulon nollasääntöä (1 p.)
- Kustakin oikeasta ratkaisuta yksi piste. (3 p.)

KOMMENTTI
- Tehtävä voidaan myös ratkaista kuutioon korottamalla ja jakamalla polynomi sen jälkeen tekijöihin jakokulmassa. Tällöin voidaan käyttää esimerkiksi binomia $(x-1)$ jakajana.
- Kokeilemalla voidaan huomata, että $x=-1$ tai $x=-2$ tai $x=-3$ ovat yhtälön ratkaisuja. (max. 3 p.)
- Vaihtoehtoisesti
$(x+2)^{\frac{1}{3}}=(x+2)\quad \|\,()^3$
$x+2=(x+2)^3$
$(x+2)\left(1-(x+2)^2\right)=0$

3. Yhtälö ja vektorin komponentit

3.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

1. Ratkaise yhtälö $|5x-7|=|2-4x|$.

RATKAISU
Ratkaistaan yhtälö:
$|5x-7|=|2-4x|$

$5x-7=2-4x$ tai $5x-7=-(2-4x)=4x-2$
$9x=9$ tai $x=5$
$x=1$ tai $x=5$

Vastaus: $x=1$ tai $x=5$

PISTEYTYS
- Poistettu itseisarvot ja saatu kaksi eri yhtälöä (2 p.)
- Ratkaistu yhtälö $5x-7=2-4x$ oikein (2 p.)
- Ratkaistu yhtälö $5x-7=-(2-4x)$ oikein (2 p.)

KOMMENTTI
Yhtälö voidaan myös neliöidä puolittain jolloin saadaan

$|5x-7|=|2-4x|$
$(5x-7)^2=(2-4x)^2$
$25x^2-70x+49=4-16x+16x^2$
$9x^2-54x+45=0$ (jaetaan tämä 9:llä)
$x^2-6x+5=0$
$x=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm4}{2}$
Saadaan siis samat juuret ja sama vastaus.

- Neliöity oikein (1 p.)
- Poistettu sulut oikein ja saatu oikea 2. asteen yhtälö (2 p.)
- Ratkaistu 2. asteen yhtälö (1p. oikeasta sijoituksesta kaavaan + 2p. ratkaisuista)

2. Jaa vektori $\overline{a}=13\overline{\imath}-5\overline{\jmath}$ vektoreiden $\overline{u}=2\overline{\imath}-\overline{\jmath}$ ja $\overline{v}=3\overline{\imath}-\overline{\jmath}$ suuntaisiin komponentteihin.

RATKAISU
$\overline{a}=s\overline{u}+t\overline{v}$, missä s ja t ovat reaalilukuja.
$13\overline{\imath}-5\overline{\jmath}=s(2\overline{\imath}-\overline{\jmath})+t(3\overline{\imath}-\overline{\jmath})$
$13\overline{\imath}-5\overline{\jmath}=(2s+3t)\,\overline{\imath}+(-s-t)\,\overline{\jmath}$

Verrataan yksikkövektoreiden $\overline{\imath}$ ja $\overline{\jmath}$ kertoimia yhtälön kummallakin puolella ja saadaan yhtälöpari
$\begin{cases}13=2s+3t\\-5=-s-t\end{cases}$
Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä ratkaisemalla ensin alemmasta yhtälöstä
$s=5-t$.
Sijoitetaan saatu lauseke ylempään yhtälöön jolloin saadaan
$13=2(5-t)+3t$
$13=-2t+10+3t$
$-t=-3$
$t=3.$
Sijoitetaan takaisin yhtälöön $s=5-t$, jolloin saadaan
$s=5-t=5-3=2.$
Siten saadaan $\overline{a}=2\overline{u}+3\overline{v}.$

Vastaus: $\overline{a}=2\overline{u}+3\overline{v}$ tai pidempi vastaus $\overline{a}=2\left(2\overline{i}-\overline{\jmath}\right)+3\left(3\overline{i}-\overline{\jmath}\right)$

PISTEYTYS
- Muodostettu yhtälö $13\overline{\imath}-5\overline{\jmath}=s(2\overline{\imath}-\overline{\jmath})+t(3\overline{\imath}-\overline{\jmath})$. (1 p.)
- Avattu sulkeet ja yhdistetty termejä oikealla puolella. (1p.)
- Saatu oikea yhtälöpari. (1 p.)
- Saatu oikeat tarkat arvot $t=3$ ja $s=2$. (1 p. + 1 p.)
- Kirjoitettu vastaus jommassakummassa muodossa. (1p.)

4. Derivaatan jäänteet ja ympyrän jänteet

4.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

1. Toisen asteen funktion f derivaatan nollakohta on $x=2$. Lisäksi $f(-1)=\ 10$ ja $f(3)=2$. Määritä funktion f lauseke.

RATKAISU
Toisen asteen funktio on muotoa $f(x)=ax^2+bx+c$.
Funktion derivaatta on $f'(x)=2ax+b$ ja $f'(2)=4a+b=0$ eli $b=-4a$.
Siis $f(x)=ax^2-4ax+c$
Saadaan $\begin{cases}f(-1)=a+4a+c=10\\f(3)=9a-12a+c=2\end{cases}$ eli $\begin{cases}-5a-c=-10\\-3a+c=2\end{cases}$,
joten $-8a=-8$ eli $a=1$ ja $c=5$ ja edelleen $b=-4\cdot1=-4$.

Vastaus: Funktio on $f\left(x\right)=x^2-4x+5$

PISTEYTYS
- On löydetty parametrien a ja b välille yhteys derivaatan nollakohdan avulla. (2 p.)
- On ratkaistu yhtälöryhmällä parametrit a, b ja c. (2 p.)
- On saatu oikea ratkaisu. (2 p.)

2. Ympyrän sisään on piirretty kaksi jännettä, joiden pituudet ovat 6 ja 8. Pitempi jänne puolittaa lyhyemmän jänteen aineistossa olevan kuvan mukaisesti. Missä suhteessa jänteiden leikkauspiste P jakaa pitemmän jänteen?

RATKAISU
Ympyrän kaarta DB vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret eli $\sphericalangle DAB=\sphericalangle PCB$.
Lisäksi $\sphericalangle APD=\sphericalangle BPC$, joten kolmiot PAD ja PCB ovat yhdenmuotoiset, eli$\Delta PAD\sim\Delta PCB$.

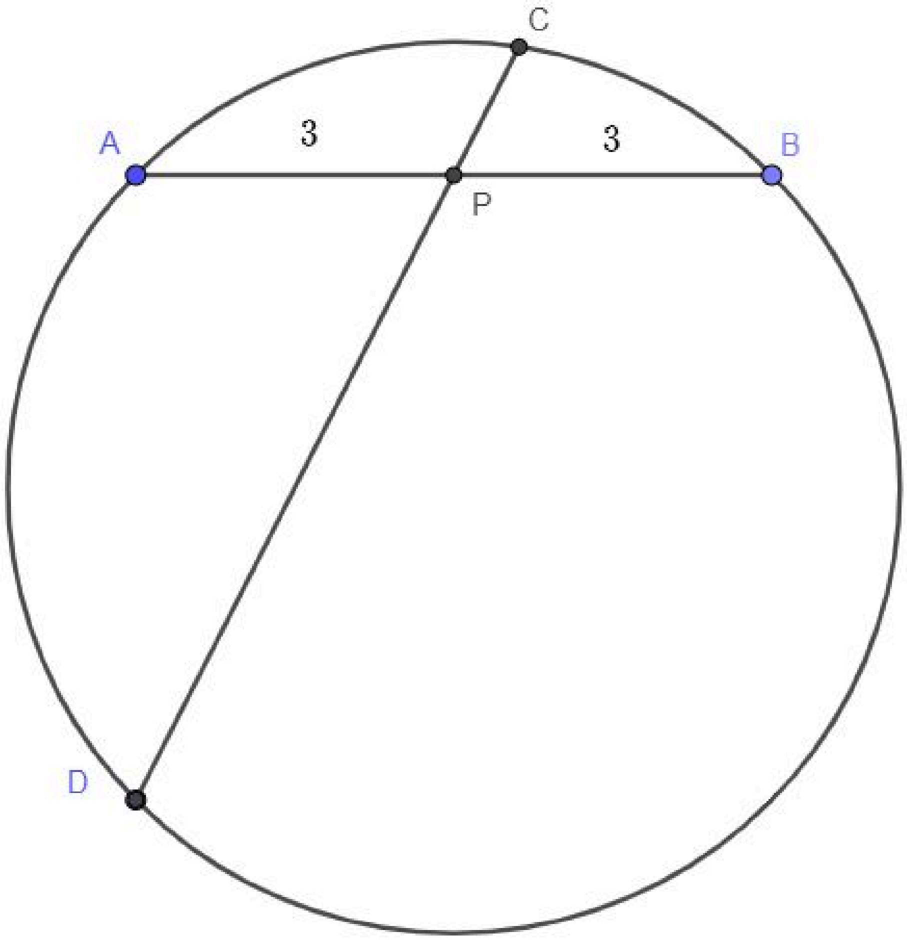
Olkoon $PC=x$ jolloin $DP=8-x$.
Yhdenmuotoisuuden perusteella
$\frac{3}{8-x}=\frac{x}{3}$
$8x-x^2=9$
$x^2-8x+9=0$
$x=\frac{8\pm\sqrt{\left(-8\right)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{8\pm2\sqrt{7}}{2}$,
joten $x=4-\sqrt{7}$ tai $x=4+\sqrt{7}$.
Koska juurten summa on $4-\sqrt{7}+4+\sqrt{7}=8$, niin
piste P jakaa pitemmän jänteen suhteessa $\frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}$.

PISTEYTYS
- Yhdenmuotoisuus on perusteltu. (1 p.)
- On muodostettu yhdenmuotoisuuden perusteella verranto. (1 p.)
- On ratkaistu muodostunut toisen asteen yhtälö. (2 p.)
- On saatu oikea ratkaisu. (2 p.)

KOMMENTTI
- Hyväksytään myös likiarvoilla annettu ratkaisu.
- Hyväksytään myös suhde $\frac{4+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}$.

4.2 Ympyrän sisään on piirretty kaksi jännettä, joiden pituudet ovat 6 ja 8. Pitempi jänne puolittaa lyhyemmän jänteen aineistossa olevan kuvan mukaisesti. Missä suhteessa jänteiden leikkauspiste   jakaa pitemmän jänteen?

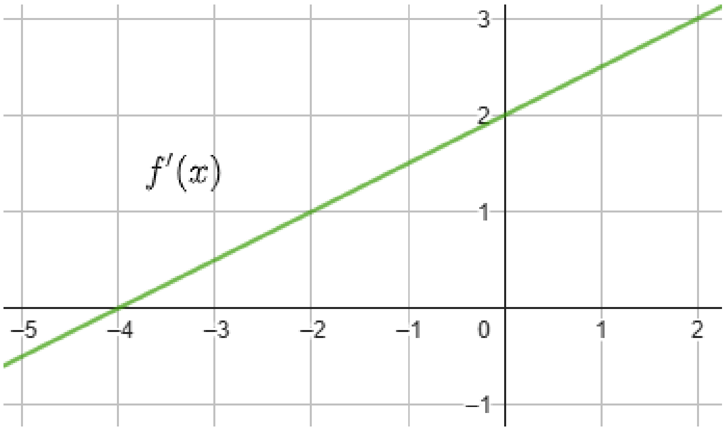
4.2.A Kuva: Ympyrän jänteet



5. Analysoi derivaattaa

5.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

1. Alla olevassa kuvassa on esitetty funktion f derivaattafunktion f' kuvaaja. Mikä vaihtoehdoista on funktio f, kun funktion f ainoa ääriarvo on -1?



PERUSTELU

Derivaattafunktio on muotoa $f'\left(x\right)=\frac{1}{2}x+2$ ja sen integraalifunktiot ovat muotoa

$f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)dx=\frac{x^2}{4}+2x+C,\ \text{missä }C\in\mathbb{R}.$

Funktion derivaatta saa arvon nolla funktion ääriarvokohdassa ja kuvaajan perusteella $f'\left(-4\right)=0.$

Siis $\frac{1}{2}x+2=0\ \Leftrightarrow\ x=-4$

$f\left(-4\right)=\frac{\left(-4\right)^2}{4}+2\cdot\left(-4\right)+C=-1\Leftrightarrow\ C=3$

PISTEYTYS

Tehtävässä on automaattipisteytys.

2. Tutki funktioiden monotonisuutta.
Mikä funktioista on monotoninen välillä $x \in [1,\ 3]$?

PERUSTELU
Jos $f(x) = x^2 - 2x + 3$, niin $f'(x) = 2x - 2$.
Saadaan $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1$
Funktio on siis monotoninen, kun $x \geq 1$.

PISTEYTYS
Tehtävässä on automaattipisteytys.

3. Tutki kulkukaavion avulla, milloin funktio $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$ on kasvava.

RATKAISU
Funktion määrittelyjoukko on $M_f:\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}$.
Osamäärän derivoimissäännön avulla saadaan
$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1)-(x-2)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2}$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0$ eli $x = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{2\cdot(-1)} = 2 \pm \frac{\sqrt{12}}{2}$
Saadaan $x = 2 - \sqrt{3}$ tai $2 + \sqrt{3}$,
joten $f'(x) = \frac{-(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}$.
Kulkukaavio:

		-1		$2-\sqrt{3}$		1		$2+\sqrt{3}$	
-1	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$
$(x-2+\sqrt{3})$	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$(x-2-\sqrt{3})$	$-$		$-$		$-$		$-$		$+$
$(x^2-1)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		-1		$2-\sqrt{3}$		1		$2+\sqrt{3}$	

Vastaus: Funktio on kasvava, kun $x \in [2-\sqrt{3},\ 1[$ tai $x \in]1,\ 2+\sqrt{3}]$.

PISTEYTYS
- Määrittelyehto tai määrittelyjoukko oikein (2 p.)
- Funktion lauseke on oikein derivoitu osamäärän derivoimissäännöllä. (2 p.)
- On osattu muodostaa kulkukaavio. (2 p.)
- On saatu oikea vastaus. (1 p. + 1 p.)

KOMMENTTI
- Määrittelyjoukkoa ei ole otettu huomioon. (max. 6 p.)

6. Määritä funktio

6.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Määritä funktion $I(a) = \int_1^3 |2x-a|\,dx$ lauseke, kun $|2x-a| = \begin{cases} 2x-a, & x \geq \frac{a}{2} \\ -2x+a, & x < \frac{a}{2} \end{cases}$ ja $1 \leq a \leq 3$.

RATKAISU

$$|2x-a| = \begin{cases} 2x-a, & x \geq \frac{a}{2} \\ -2x+a, & x < \frac{a}{2} \end{cases}$$

Itseisarvon nollakohta on $x = \frac{a}{2}$.

Jos $1 \leq a \leq 2$, niin $\frac{a}{2} \leq 1$ ja $2x - a \geq 0$ koko välillä, joten

$I(a) = \int_1^3 (2x-a)\,dx = \Big/_{1}^{3} (x^2 - ax) = 9 - 3a - (1-a) = 8 - 2a$.

Jos $2 \leq a \leq 3$ jaetaan kahdeksi eri integraaliksi kohdassa $x = \frac{a}{2}$.
Saadaan

$I(a) = \int_1^{\frac{a}{2}} (a-2x)\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^3 (2x-a)\,dx$.

$I(a) = \Big/_{1}^{\frac{a}{2}} (ax - x^2) + \Big/_{\frac{a}{2}}^{3} (x^2 - ax)$

$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} - (a-1) + 9 - 3a - \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right)$

$= \frac{a^2}{2} - 4a + 10$

Kysytty funktion lauseke on

$$I(a) = \begin{cases} 8-2a, & 1 \leq a \leq 2 \\ \frac{a^2}{2} - 4a + 10, & 2 \leq a \leq 3 \end{cases}$$

PISTEYTYS

- Integroitavan nollakohta oikein. (1p.)
- Jos $1 \leq a \leq 2$, niin $\frac{a}{2} \leq 1$ ja $2x - a \geq 0$ koko välillä. (2 p.)
- Välillä $1 \leq a \leq 2$ saadaan $I(a) = \int_1^3 (2x-a)\,dx$. (1p.)
- $I(a) = \Big/_{1}^{3} (x^2 - ax)$ (1p.)
- Sijoitukset oikein ja saatu $8 - 2a$ (1p.)
- Jos $2 \leq a \leq 3$, jaetaan kahteen eri integraaliin kohdassa $x = \frac{a}{2}$
- Muodostettu oikeat integraalit väleillä $1 \leq x \leq \frac{a}{2}$ ja $\frac{a}{2} \leq x \leq 3$. (2p.)
- Sijoitukset molemmissa integraaleissa oikein ja saatu $\frac{a^2}{2} - 4a + 10$ (2p. sij. + 1p. sievennyksestä)
- Esitetty oikea vastaus paloittain määriteltynä funktiona (1p.)

7. Vuorovesi

7.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Eräässä satamassa tarkkaillaan vedenkorkeutta vuorokauden aikana. Vedenkorkeutta mallinnetaan funktiolla $h(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$, missä x on aika tunteina keskiyön jälkeen ja $c \in [0,\ 2\pi]$.

Tiedetään, että:

- matalin vedenkorkeus 1 m saavutetaan klo 06:00
- korkein vedenkorkeus 5 m saavutetaan klo 18:00
- kahden peräkkäisen maksimikorkeuksien välinen aika on 24 tuntia

1. Määritä luvut $a,\ b,\ c$ ja d . Anna vastaukset tarkkoina arvoina perusteluineen.

RATKAISU

Vedenkorkeus vaihtelee 1 ja 5 metrin välillä.

$d = \frac{1+5}{2} = 3$ ja $a = \frac{5-1}{2} = 2$

Vuorovesijakson pituus on 24 tuntia. Sinifunktion jakso on $\frac{2\pi}{b}$.

$b=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$

Matalin vedenkorkeus (1 m) saavutetaan klo 06:00, jolloin sinifunktion arvo on -1 .

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 6+c\right)=-1$, kun $c\in[0,\ 2\pi]$.

$\frac{\pi}{2}+c=\frac{3\pi}{2}+n2\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, josta seuraa $c=\pi$.

Vedenkorkeutta mallintava funktio on $h\left(x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{12}x+\pi\right)+3$.

Vaihtoehtoinen ratkaisu geometriaohjelmalla:

Mallinnetaan kysyttyä funktiota GeoGebran komennolla "SovitaSini".

Kuvakaappauksesta voi suoraan lukea likiarvot $b\approx 0{,}26$ ja $c\approx -3{,}14$ sekä tarkat arvot $a=2$ ja $d=3$.

Tässä on muistettava ehto $c\in[0,\ 2\pi]$, joten saadaan $c=-\pi+2\pi=\pi$.

Vastaus: $a=2,\ b=\frac{\pi}{12},\ c=\pi$ ja $d=3$.

PISTEYTYS

- Oikeat tarkat luvut $a,\ b,\ c$ ja d perusteluineen. (4 x 2 p.)
- Jos perustelut oikeille luvuille puuttuvat, voi saada max 4p. tästä tehtävästä.

Vaihtoehto 2 (max 6 p):

- Sijoitettu annetut 3 pistettä koordinaatistoon ja sovitettu sinifunktio geometriaohjelmalla (1p.)
- Kuvankaappaus kuvaajasta ja algebraikkunasta (1p.)
- Luettu kysytyt tarkat arvot luvuille a ja d funktion lausekkeesta (2 x 1p.)
- Luettu likiarvot luvuille b ja c funktion lausekkeesta (2 x 1p.)

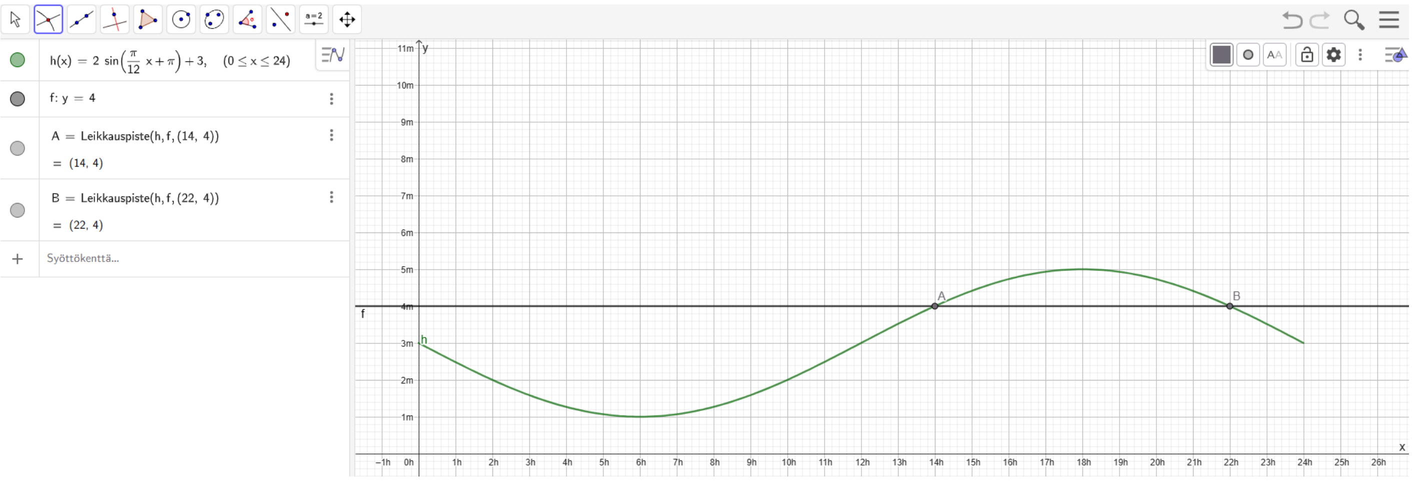
KOMMENTTI

Molemmat luvut b ja c saadaan tällä menetelmällä vain likiarvona. Tästä osatehtävästä voi tällä sovitusmenetelmällä siten saada **max 6 p** .

2. Piirrä funktion $h\left(x\right)$ kuvaaja sopivalla ohjelmalla välillä $x\in[0{,}24]$ ja selvitä ohjelmistoa käyttäen, minä kellonaikoina ensimmäisen vuorokauden aikana vedenkorkeus on vähintään 4 metriä.

RATKAISU

Ratkaisu GeoGebralla.



Komennolla "Leikkauspiste" kuvasta ilmenee, että leikkauspisteitä on kaksi ja vastaavat kellonajat ovat klo 14 ja klo 22.

Vastaus: Klo 14-22.

PISTEYTYS
- Piirretty oikea funktio oikealla välillä, koordinaattiakselit merkitty kuvaan ja komentorivit näkyvissä. (2 p.)
- Käytetty sopivaa "leikkaustoimintoa" tai ratkaistu yhtälö leikkauspisteiden x-koordinaattien selvittämiseksi. (1 p.)
- Oikea vastaus, klo 14-22. (1 p.)

8. Elvin unelma-asunto

8.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Elvin säästämisen tavoitteena on hankkia unelma-asunto. Tavoitteena on säästää kaupantekoa varten käsirahaa $100\ 000$ € tilille, jolle maksetaan korkoa $2\ \%$ p.a. Elvin ajatuksena on tallettaa 300 € säästötilille joka toinen kuukausi. Huomioi laskuissasi, että korosta peritään $30\ \%$ lähdeveroa.

1. Kuinka paljon Elvin säästötilillä on rahaa 5 vuoden kuluttua säästämisen aloittamisesta?

RATKAISU
Säästötilin nettokorko on $p_{netto} = 0{,}7 \cdot 2\ \% = 1{,}4\ \%$
ja korkotekijä on $q = 1 + \frac{1{,}4}{100} = 1{,}014$.
Ensimmäisen vuoden aikana tapahtuvat talletukset ehtivät vuoden loppuun mennessä kasvaa korkoa
$R = 300 \cdot 0{,}014 \left(\frac{12+10+8+6+4+2}{12} \right) = 300 \cdot 0{,}014 \cdot \frac{42}{12} = 14{,}7$ €.

Ensimmäisen vuoden jälkeen tilillä on $K_0 = 6 \cdot 300 + 14{,}7 = 1814{,}7$ €.
Tämä ilmiö toistuu joka vuosi. Nyt on huomioitava, että säästötilillä kunkin vuoden alussa oleva pääoma kasvaa korkoa korolle periaatteella:
$K_{1-5} = K_0 + K_0 q^1 + K_0 q^2 + \ \ldots \ + K_0 q^4 = \frac{K_0 (1-q^5)}{(1-q)}$

$$\frac{1814.7 \cdot \left(1-(1.014)^5\right)}{1-1.014} \qquad 9331.14$$

Vastaus: Elvin säätötilillä on siis rahaa $9331{,}14$ €.

PISTEYTYS
- On määritetty nettokorko. (1 p.)
- On määritetty korkotekijä. (1 p.)
- On laskettu yhden vuoden säästöt. (2 p.)
- On laskettu viiden vuoden säästöt. (2 p.)

KOMMENTTI
Tehtävän voi laskea myös taulukoimalla.

2. Elvi aloittaa säästämisen tammikuun alussa vuonna 2026. Minkä kalenterivuoden aikana hän saavuttaa 100 000 euron säästötavoitteensa?

RATKAISU

Tilin saldo n vuoden kuluttua on"
$K_n = \frac{K_0(1-q^n)}{(1-q)} = 100\ 000$

$$\text{solve}\left(\frac{1814.7\cdot\left(1-(1.014)^n\right)}{1-1.014}=100000,n\right) \quad n=41.1291$$

Joten $2026 + 41{,}1291 = 2067{,}1291$
Vastaus: Elvi pääsee säästötavoitteeseensa vuonna 2067.

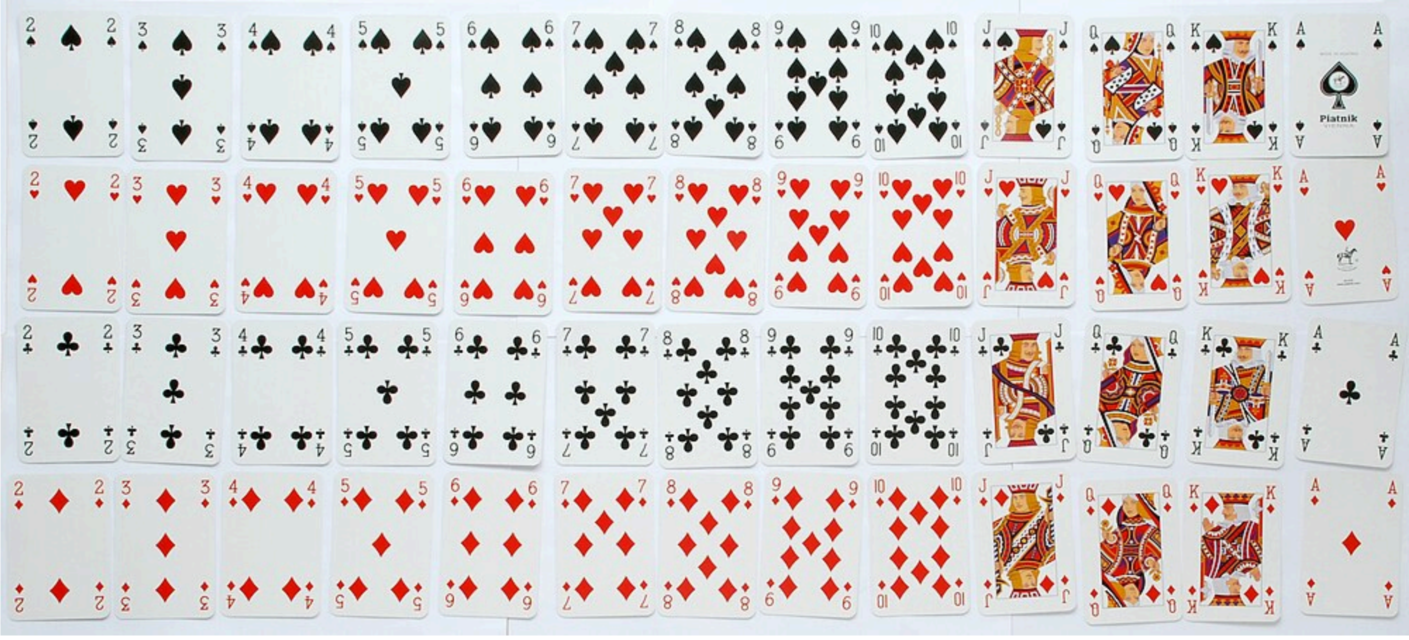
PISTEYTYS
- On muodostettu yhtälö tilin loppusaldon perusteella. (2 p.)
- Yhtälö on oikein ratkaistu. (2 p.)
- On päätelty kysytty vuosi. (2 p.)

KOMMENTTI
Tehtävän voi laskea myös taulukoimalla. Soluissa käytettyjen komentojen on käytävä ilmi ratkaisusta. Ensimmäisen vuoden talletusten korkolasku tehtävässä 8.1 voidaan suorittaa esim. kuvan mukaisesti.

	A	B	C	D	E	F
1				talletus		
2	Nettokorko	Talletus	Korkokaudet	300,00 €	korko R=kit	
3	I	1	12	300,00 €	4,20000	D3*A4*C3/12
4	0,014					
5		3	10	300,00 €	3,50000	
6		5	8	300,00 €	2,80000	
7		7	6	300,00 €	2,10000	
8		9	4	300,00 €	1,40000	
9		11	2	300,00 €	0,70000	
10						yht
11			yhteensä	1 800,00 €	14,70 €	1 814,70 €
12						SUMMA(D16:E16)

9. Taikurin korttitemput

9.A Kuva: Korttipakan kortit



Lähde: Trainler 2009: Piatnikcards. Wikimedia Commons 23.6.2009. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Piatnikcards.jpg. Viitattu: 22.10.2025.

9.B Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Taikurilla on käytössä perinteinen korttipakka. Laske osatehtävissä pyydetyt todennäköisyydet.

1. Taikurilla on pöydällä rivissä 8 korttia, joista 4 ovat patakortteja. Millä todennäköisyydellä rivin päädyissä olevat kortit ovat patakortteja?

RATKAISU

Patakorttien paikat voidaan valita $\binom{8}{4} = 70$ eri tavalla. Jos korttirivin päädyissä olevat kortit ovat patakortteja, niin kahden muun patakortin paikat voidaan valita $\binom{6}{2} = 15$ eri tavalla.
Olkoon p kysytty todennäköisyys.
Siis $p = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$
Vastaus: Rivin päädyissä olevat kortit ovat patakortteja todennäköisyydellä $\frac{3}{14} \approx 21{,}4\ \%$.

PISTEYTYS
- On hahmoteltu kaikki alkeistapaukset. (1 p.)
- On hahmoteltu kaikki suotuisat alkeistapaukset. (1 p.)
- On saatu oikea ratkaisu. (2 p.)

2. Taikurilla on kymmenen korttia pöydällä. Todennäköisyys sille, että taikuri nostaa peräkkäin kaksi herttakorttia on $p = \frac{1}{3}$, kun nostettua korttia ei palauteta pöydälle. Kuinka monta herttakorttia pöydällä on?

RATKAISU
Olkoon herttakorttien lukumäärä x.
Tällöin $\frac{x}{10} \cdot \frac{x-1}{9} = \frac{1}{3}$.

$$\text{solve}\left(\frac{x}{10}\cdot\frac{x-1}{9}=\frac{1}{3},x\right) \qquad x=-5 \text{ or } x=6$$

Vastaus: Herttakorttien lukumäärä on 6.

PISTEYTYS
- Järkevä yhtälö herttakorttien lukumäärän selvittämiseksi (2 p.)
- On saatu ratkaistua herttakorttien lukumäärä. (2 p.)

3. Korttipakasta on valittu 13 korttia ja ne on asetettu satunnaiseen järjestykseen riviin pöydälle kuvapuoli alaspäin. Kortit jaetaan taikurin, taikurin apulaisen ja vara-apulaisen kesken siten, että rivi jaetaan kolmeen peräkkäiseen osaan: vasempaan, keskimmäiseen ja oikeaan. Vasemmanpuoleinen osa menee taikurille, keskimmäinen apulaiselle ja oikeanpuoleinen vara-apulaiselle. Osat voivat olla eri pituisia, ja jokin osa voi olla jopa tyhjä. Millä todennäköisyydellä taikuri saa korkeintaan yhden kortin?

RATKAISU
Valitut kortit voidaan jakaa kolmen kesken $n = \binom{15}{2} = 105$ eri tavalla. Seuraava kaavio selventää jakotilannetta:

$Paikat$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Sisältö$	K	J	K	J	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K

. Tässä K on kortti ja J on jakopalkki. Tässä yksittäistapauksessa taikurille ja taikurin apulaiselle menisi yksi kortti ja loput kortit menisivät taikurin vara-apulaiselle. Huomaa, että jakopalkkien paikat voidaan valita $n = \binom{15}{2} = 105$ eri tavalla.
Jos taikuri ei saa yhtään korttia, niin vastaavasti apulaiset jakavat 13 korttia $n = \binom{14}{1} = 14$ eri tavalla.
Jakotilanne:

$Paikat$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$Sisältö$	K	J	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K

Jos taikuri saa vain yhden kortin, niin apulaiset jakavat 12 korttia $n = \binom{13}{1} = 13$ eri tavalla.
Yhteenlaskusäännön nojalla $p = \frac{14}{105} + \frac{13}{105} = \frac{27}{105} = \frac{9}{35}$ eli $p \approx 25{,}7\ \%$.

PISTEYTYS
- On laskettu todennäköisyys. $k = 0$. (1 p.)
- On laskettu todennäköisyys. $k = 1$. (1 p.)
- On päätelty kysytty todennäköisyys. (2 p.)

10. Akkuja

10.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Yritys Eikunmenox valmistaa kahta tuotetta: sähköskootterin akkuja (tuote A) ja sähköpyörän akkuja (tuote B).

Kuva: chatgpt.com

- **Akun myyntihinta:**
  - Sähköskootterin akku (A): $50\ €$ / kpl
  - Sähköpyörän akku (B): $40\ €$ / kpl
- **Tuotantokustannukset:**
  Akut vaativat litiumkennoja ja elektroniikkaa. Koska molemmat tuotteet käyttävät samoja osia, niiden valmistusmäärät vaikuttavat toisiinsa.
  Kustannukset voidaan mallintaa seuraavasti:
  $K\,(x,y) = 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2 + 0{,}05xy$ (euroa), missä
  x = valmistettujen sähköskootterin akkujen määrä (kpl),
  y = valmistettujen sähköpyörän akkujen määrä (kpl).

  Tässä:

  - Termi $0{,}2x^2$ kuvaa skootteriakkujen tuotannon kasvaessa syntyviä kasvavia kustannuksia (esim. erikoistyökalujen ja laadunvalvonnan lisäresurssit).
  - Termi $0{,}1y^2$ vastaa pyöräakkujen kohdalla samaa ilmiötä, mutta lievempänä.

- Sekatermi $0{,}05xy$ kuvaa sitä, että jos molempia tuotetaan paljon samanaikaisesti, ne kilpailevat samoista raaka-aineista ja työvoimasta, mikä lisää kustannuksia.

1. Määritä yrityksen voittofunktio $f\left(x{,}y\right)$. Anna vastaus sievennetyssä muodossa.

RATKAISU
Voittofunktio = tulofunktio - kustannusfunktio.
Voittofunktio on
$f\left(x{,}y\right) = 50x + 40y - \left(0{,}2x^2 + 0{,}1y^2 + 0{,}05xy\right) =$
$50x + 40y - 0{,}2x^2 - 0{,}1y^2 - 0{,}05xy$

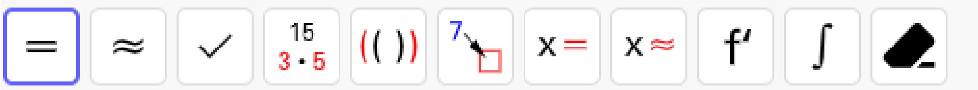
Vastaus: $f\left(x{,}y\right) = 50x + 40y - 0{,}2x^2 - 0{,}1y^2 - 0{,}05xy$

PISTEYTYS
- Muodostettu tulofunktio ja kustannusfunktio oikein. (1 p.)
- Muodostettu ja sievennetty voittofunktio. (1 p.)

2. Määritä voittofunktion kriittinen piste. Anna tarkka vastaus. Määritä lisäksi voittofunktion arvo kyseisessä kriittisessä pisteessä. Pyöristä vastaus kymmenen euron tarkkuuteen.

RATKAISU
Kriittisessä pisteessä molemmat osittaisderivaatat ovat nollia.

Kyseessä on kahden muuttujan funktio, joten derivoidaan osittain CAS-laskimella:



1
$\mathrm{f(x, y)} := 50x + 40y - 0.2x^2 - 0.1y^2 - 0.05 \cdot x \cdot y$
$\rightarrow \mathrm{f(x, y)} := \frac{-1}{5} x^2 - \frac{1}{10} y^2 - \frac{1}{20} x\, y + 50\, x + 40\, y$

2
Derivaatta(f, x)
$\rightarrow \frac{-2}{5} x - \frac{1}{20} y + 50$

3
Derivaatta(f, y)
$\rightarrow \frac{-1}{20} x - \frac{1}{5} y + 40$

Muodostetaan yhtälöryhmä ja asetetaan derivaatat nolliksi.

1
$-\frac{2}{5} x - \frac{1}{20} y + 50 = 0$
$\rightarrow \frac{-2}{5} x - \frac{1}{20} y + 50 = 0$

2
$-\frac{1}{20} x - \frac{1}{5} y + 40 = 0$
$\rightarrow \frac{-1}{20} x - \frac{1}{5} y + 40 = 0$

3
{$1, $2}
Ratkaise: $\left\{\left\{x = \frac{3200}{31}, y = \frac{5400}{31}\right\}\right\}$

Likiarvoiksi saadaan

1 $-\frac{2}{5}x - \frac{1}{20}y + 50 = 0$

$\rightarrow \frac{-2}{5}x - \frac{1}{20}y + 50 = 0$

2 $-\frac{1}{20}x - \frac{1}{5}y + 40 = 0$

$\rightarrow \frac{-1}{20}x - \frac{1}{5}y + 40 = 0$

3 $\{\$1, \$2\}$

RatkaiseNumeerisesti: $\{x = 103.23, y = 174.19\}$

Koska
x = tuotettujen skootterin akkujen määrä (kpl)
y = tuotettujen sähköpyörän akkujen määrä (kpl),
niin pyöristetään kriittisen pisteen koordinaatit kokonaislukuarvoihin.

Funktion arvo:

4 $f(x, y) := 50x + 40y - 0.2x^2 - 0.1y^2 - 0.05 \cdot x \cdot y$

$\rightarrow f(x, y) := \frac{-1}{5}x^2 - \frac{1}{10}y^2 - \frac{1}{20}xy + 50x + 40y$

5 $f(103, 174)$

$\rightarrow \frac{12129}{2}$

6 $\$7$

≈ 6064.5

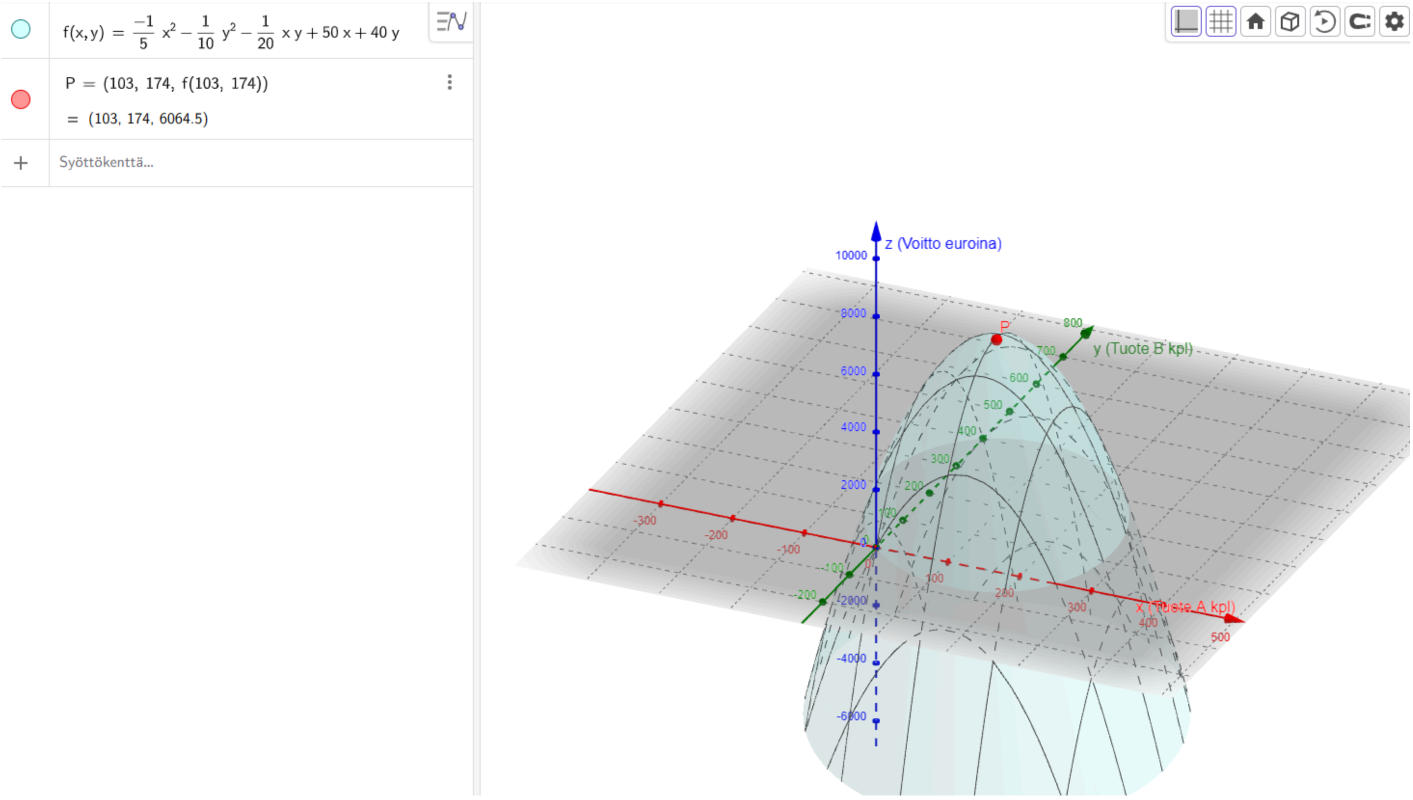
Vastaus: Kriittinen piste on siis $P = \left(\frac{3200}{31}, \frac{5400}{31}\right)$. Funktion arvo on n. 6060 € .

PISTEYTYS
- Muodostettu osittaisderivaatat oikein. (2 p.)
- Ratkaistu yhtälöpari kriittisen pisteen selvittämiseksi. (2 p.)
- Oikea tarkka kriittinen piste. (1 p.)
- Laskettu funktion arvo kriittisessä pisteessä ja pyöristetty oikeaan vastaukseen 6 060 €. (2 p.)

Huom. On ok laskea voittofunktion arvo pyöristetyssä kriittisessä pisteessä, jolloin saadaan sama pyöristetty vastaus.

3. Piirrä havainnollistava 3D-kuva funktiosta $f(x,y)$ ja merkitse siihen voittofunktion ääriarvopiste.

RATKAISU



PISTEYTYS
- Piirretty funktion kuvaaja oikein. (1 p.)
- Algebraikkuna näkyvissä. (1 p.)
- Merkitty voittofunktion ääriarvopiste kuvaan oikein. (1 p.)

11. Luvulla 7 jaolliset kokonaisluvut

11.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Laadi ohjelma, joka laskee luvulla 7 jaollisten kolminumeroisten kokonaislukujen lukumäärän. Esitä laatimasi ohjelmakoodi. Laita vastauksi loppuun myös ohjelman generoima tuloste.

Ohje: Käytä ohjelmakoodissa esimerkiksi for- tai while-silmukkaa. Esitä ratkaisussa myös ohjelman idea ja tuottama vastaus.

RATKAISU
Mahdollisia kokonaislukuja ovat luvut $\{-999,\ -998,\ \ldots,\ -101,\ -100\}$ ja $\{100,\ 101,\ \ldots,\ 998,\ 999\}$.

Eräs ratkaisu ohjelmakoodille:
```
def jaollisuus_luvulla_7():
    laskuri1 = 100
    laskuri2 = 0
    while laskuri1 < 1000:
        if laskuri1 % 7 == 0:
            laskuri2 = laskuri2 + 1
        laskuri1=laskuri1+1
    laskuri2 = laskuri2*2  #negatiiviset luvut mukaan!
    print("7:llä jaollisia kokonaislukuja on: ", laskuri2, "kappaletta.") #tuloste
jaollisuus_luvulla_7()
```

Tuloste:
```
7:llä jaollisia kokonaislukuja on:  256 kappaletta.
```

PISTEYTYS
- On hahmotettu kolminumeroiset kokonaisluvut. (2 p.)
- On käytetty for- tai while-silmukka. (2 p.)
- On käytetty esim. laskuria kokonaislukujen määrän selvittämisessä. (2 p.)
- On huomioitu sekä positiiviset että negatiiviset kokonaisluvut. (2 p.)
- Toimiva ohjelmakoodi, joka antaa oikeansuuntaisia tuloksia. (2 p.)
- Saatu oikea tulos (2 p.)

KOMMENTTI
- Kehno notaatio (max. 10 p.)

12. Todennäköisyyksiä

12.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Eräs yritys valmistaa ladattavia laitteita. Laitteen käyttöikää (vuosina) mallinnetaan satunnaismuuttujalla X , jonka tiheysfunktio on

$$f\left(x\right)=\begin{cases} cx\left(2-x\right), & 0\leq x\leq 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Tässä c on vakio.

1. Selitä, mitä tarkoittaa, että f on "tiheysfunktio", ja laske luvun c tarkka arvo. Piirrä funktion kuvaaja.

RATKAISU
Funktio f on tiheysfunktio, jos se toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:
$1.\ \ f\left(x\right)\geq 0$, kaikilla x
$2.\ \ \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx=1$

$$f\left(x\right)=\begin{cases} cx\left(2-x\right), & 0\leq x\leq 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

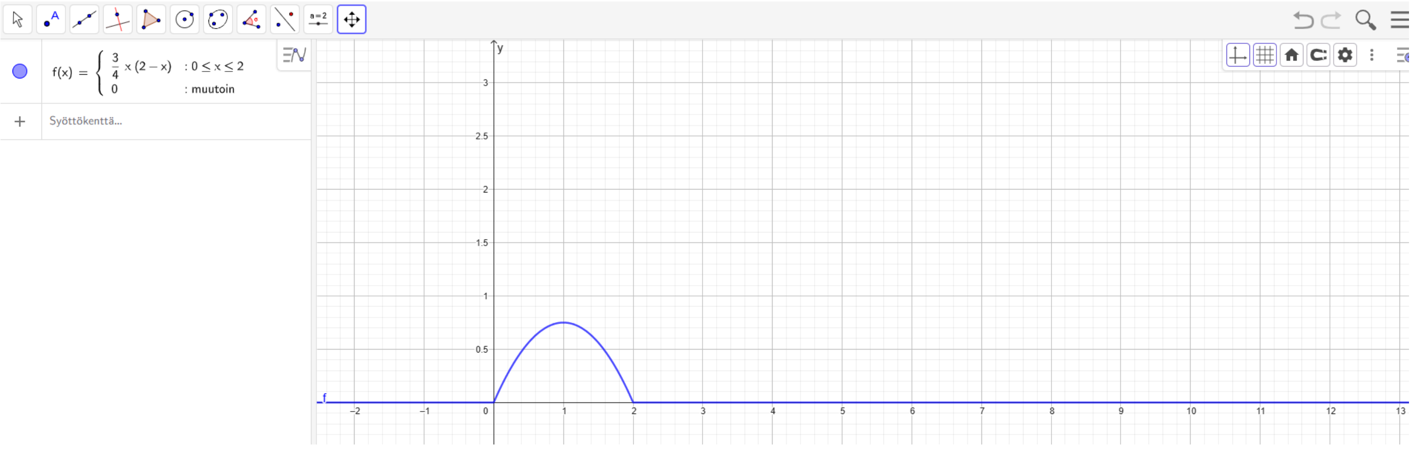
Koska funktion kuvaajan välillä $0\leq x\leq 2$ on oltava alaspäin aukeava paraabeli, saadaan ehto $c>0$.
Lasketaan integraali $\int_0^2 cx\left(2-x\right)dx$ CAS-laskimella:

$$\int_0^2 \left(c\cdot x\cdot (2-x)\right)dx \blacktriangleright \frac{4\cdot c}{3}$$

$$\text{solve}\left(\frac{4\cdot c}{3}=1,c\right) \blacktriangleright c=\frac{3}{4}$$

Saatiin $c=\frac{3}{4}$ ja siten funktion lauseke on $f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{3}{4}x\left(2-x\right), & 0\leq x\leq 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$.

Piirretään kuvaaja geometriaohjelmalla.



Vastaus: $c = \frac{3}{4}$

PISTEYTYS
- Selitetty "tiheysfunktio" (1 p.)
- Saatu $c = \frac{3}{4}$ (1 p.)
- Piirretty funktion kuvaaja oikein (1 p.)

Huom!. Tämän piirtopisteen saamiseksi on oltava algebraikkuna näkyvillä sekä akselit nimetty.

2. Muodosta kertymäfunktio $F(x)$. Selitä omin sanoin, mitä kertymäfunktio kertoo laitteen käyttöiästä. Piirrä kertymäfunktion kuvaaja.

RATKAISU

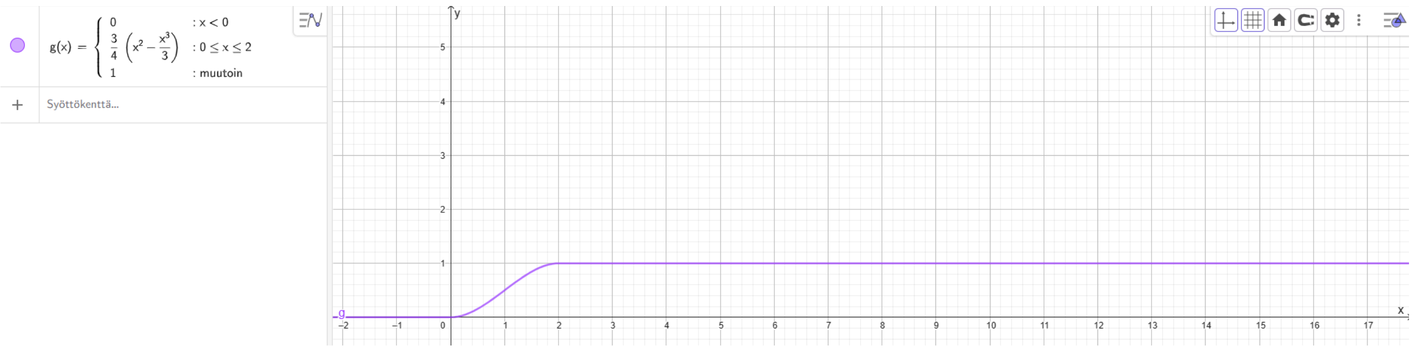
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)\,dt, \text{ kun } 0 \leq x \leq 2$$

$$\int_0^x \left(\frac{3}{4}\cdot t\cdot(2-t)\right)dt \;\blacktriangleright\; \frac{-x^2\cdot(x-3)}{4}$$

Koko kertymäfunktion lauseke on silloin $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right), & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$

Kertymäfunktion arvo kohdassa x kertoo todennäköisyyden sille, että laitteen käyttöikä on korkeintaan x vuotta.

Piirretään kuvaaja geometriaohjelmalla.



Vastaus: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right), & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

PISTEYTYS

- Kertymäfunktio oikein muodostettu (1 p.)
- Oikea selitys käyttöiästä (1 p.)
- Piirretty funktion kuvaaja oikein (1 p.)

Huom.! Tämän piirtopisteen saamiseksi on oltava algebraikkuna näkyvillä sekä akselit nimetty.

3. Laske todennäköisyys $P(1 < X < 1{,}5)$.
Selitä, mitä tulos tarkoittaa yrityksen tuotteiden kannalta.

RATKAISU

Käytetään kertymäfunktiota hyväksi:

$$P(1 < X < 1{,}5) = F(1{,}5) - F(1)$$

$$\mathbf{kert}(x) := \frac{-x^2 \cdot (x-3)}{4} \blacktriangleright \textit{Valmis}$$

$$\mathbf{kert}(1.5) - \mathbf{kert}(1) \blacktriangleright 0.34375$$

Tulkinta: Noin 34 % laitteista kestää yli 1 vuoden mutta alle 1,5 vuotta.

Vastaus: Todennäköisyys on noin 34 %.

PISTEYTYS
- Laskettu todennäköisyys oikein (1 p.)
- Merkinnät oikein laskuissa (1p.)
- Selitys oikein (1 p.)

4. Laske todennäköisyys $P(X > 1{,}5 \mid x > 1)$. Selitä sanallisesti, mistä on kysymys, kun ajatellaan laitteen toimivuutta.

RATKAISU

$$P(X > 1{,}5 \mid x > 1) = \frac{P(X>1{,}5 \text{ ja } X>1)}{P(X>1)} = \frac{P(X>1{,}5)}{P(X>1)}$$
$$P(X > 1{,}5) = 1 - F(1{,}5) = 1 - 0{,}84375 = 0{,}15625$$
$$P(X > 1) = 1 - F(1)$$

$$1 - \mathbf{kert}(1.5) \blacktriangleright 0.15625$$

$$1 - \mathbf{kert}(1) \blacktriangleright 0.5$$

$$\frac{0.15625}{0.5} \blacktriangleright 0.3125$$

Selitys: Jos tiedetään, että laite on toiminut vuoden, todennäköisyys että se kestää ainkain puoli vuotta lisää on 31 %.

Vastaus: Todennäköisyys on noin 31 %.

PISTEYTYS
- Laskettu todennäköisyys oikein (1 p.)
- Merkinnät oikein laskuissa (1p.)
- Selitys oikein (1 p.)

13. Derivaatan määritelmä

13.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Johda kaikki välivaiheet esittäen funktion $f(x) = x + \sqrt{2x}$ derivaatta erotusosamäärän avulla, kun $M_f: \ x \in [0, \infty[$.

RATKAISU

Määritelmän mukaan $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, joten

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \frac{x+h+\sqrt{2(x+h)}-x-\sqrt{2x}}{h}$

$= \frac{h-\sqrt{2x}+\sqrt{2(x+h)}}{h} \parallel \text{ lavennus termillä } \left(h-\sqrt{2x}\right)-\sqrt{2\left(x+h\right)}$

$= \frac{h^2-2h\sqrt{2x}+2x-2x-2h}{h\left(h-\sqrt{2x}-\sqrt{2(x+h)}\right)}$

$= \frac{h^2-2h\sqrt{2x}-2h}{h\left(h-\sqrt{2x}-\sqrt{2(x+h)}\right)}$

$= \frac{h-2\sqrt{2x}-2}{h-\sqrt{2x}-\sqrt{2(x+h)}}$

$\text{Kun } h \to 0$

$\frac{h-2\sqrt{2x}-2}{h-\sqrt{2x}-\sqrt{2(x+h)}} \to \frac{-2\sqrt{2x}-2}{-2\sqrt{2x}}$

$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} + 1$

PISTEYTYS

- Aloitus erotusosamäärän avulla (2 p.)
- Sijoitus eroitusosamäärään oikein (3 p.)
- Järkevä lavennus (2 p.)
- Erotusosamäärä saatu muotoon, jossa nimittäjän raja-arvo ≠ 0. (3 p.)
- Saatu oikea tulos (2 p.)

KOMMENTTI

- Kehno notaatio (max. 10 p.)
- Derivointi CAS-laskimella tai derivoimissäännöillä (0 p.)