PRELI pitkä matematiikka / Kevät 2023 Ratkaisut ja pisteet

Osa 1: A-osa

1. Funktiotehtäviä 12 p.

1.1 Mikä on funktion $f(x) = \sqrt{2-5x}$ määrittelyjoukko? **2 p.**

- ○ $x < \frac{2}{5}$
- ● $x \le \frac{2}{5}$
- ○ $x = \frac{2}{5}$
- ○ $x > \frac{2}{5}$

Ratkaisu: Oltava $2 - 5x \ge 0$ eli $x \le \frac{2}{5}$.

1.2 Funktion $f(x) = |3-x|$ arvot ovat aina **2 p.**

- ○ kokonaislukuja
- ● ei-negatiivisia
- ○ negatiivisia
- ○ positiivisia

Ratkaisu: Itseisarvo ei aina ole positiivinen, sillä itseisarvo nollasta on nolla.

1.3 Olkoon funktiot $f(x) = 2x^2 - x$ ja $g(x) = x^2 - x + 4$. Funktio $f(x)$ saa suuremman arvon kuin funktio $g(x)$ kun **2 p.**

- ○ kaikki muut vastausvaihtoehdot ovat vääriä
- ● $x > 2$ tai $x < -2$
- ○ $|x| \ge 2$
- ○ $|x| \le 2$

Ratkaisu: $2x^2 - x > x^2 - x + 4$

$x^2 > 4 \rightarrow |x| > 2$

1.4 Määritä aritmeettisen lukujonon $x,\ 2x+1,\ 4x-1,\ \ldots$ neljäs termi. **2 p.**

- ○ kaikki muut vastausvaihtoehdot ovat vääriä
- ● 15
- ○ 16
- ○ 14

Ratkaisu:
$4x - 1 - (2x + 1) = 2x + 1 - x$

$2x - 2 = x + 1$

$x = 3$

Erotus
$d = 2x + 1 - x = x + 1 = 3 + 1 = 4$

Neljäs termi =
$x + 3d = 3 + 3 \cdot 4 = 15$

1.5 Epäyhtälön

$\lg(3) + \lg\left(\frac{5}{3}\right) + \lg\left(\frac{7}{5}\right) + \ldots + \lg\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) > 10$ ratkaisu on

2 p.

- ○ $x \geq 10^9$
- ◉ $x > 5 \cdot 10^9 - \frac{1}{2}$
- ○ $x > 10^{10}$
- ○ $x \geq 5 \cdot 10^9$

Ratkaisu:

$$\lg\left(3 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2x-1}{2x-3} \cdot \frac{2x+1}{2x-1}\right) = \lg(2x+1) > 10$$

$$2x + 1 > 10^{10}$$

$$x > 5 \cdot 10^9 - \frac{1}{2}$$

1.6 Luvulla 13 jaollisten nelinumeroisten luonnollisten lukujen summa on **2 p.**

- ○ kaikki muut vastausvaihtoehdot ovat vääriä
- ○ 3 816 306
- ◉ 3 810 807
- ○ 3 805 308

Ratkaisu:

Pienin luvuista on $77 \cdot 13 = 1001$ ja suurin $769 \cdot 13 = 9997$. Lukujen summa on siis aritmeettinen erotuksella d=13:

$$S = 1001 + 1014 + \ldots + 9997 = (769 - 76) \cdot \frac{1001 + 9997}{2} = 3\,810\,807$$

2. Yhtälöitä ja derivaatan nollakohta 12 p.

2.1 Ratkaise $16^{3x} = \frac{1}{128}$. **4 p.**

$$\left(2^4\right)^{3x} = \frac{2^0}{2^7}$$

$$2^{12x} = 2^{0-7}$$

$$12x = -7$$

$$x = -\frac{7}{12}$$

- On muunnettu yhtälö luvun 2 potensseihin (2 p.)
- On ratkaistu *x* (2 p.)
- Tehtävä voidaan ratkaista myös logaritmeilla

2.2 Ratkaise funktion $f\left(x\right) = \frac{3x-\sqrt{x}}{2x^2}$ derivaatan nollakohdat. **4 p.**

$$f\left(x\right) = \frac{3x}{2x^2} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2x^2} = \frac{3}{2}x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$ Huomaa määrittelyehto: $x > 0$

$$f'\left(x\right) = -\frac{3}{2}x^{-2} + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}x^{-2} \cdot \left(-2 + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$f'\left(x\right) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{3}{4}x^{-2} = 0$ tai $-2 + x^{-\frac{1}{2}} = 0$

Tässä $x = 0$ tai $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \quad |\,()^2$ eli $\frac{1}{x} = 4$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{1}{4}$

Vastaus: $x = \frac{1}{4}$

- Funktion derivoiminen (2 p.)
- Määrittelyehto (1 p.)
- Oikea derivaatan nollakohta (1 p.)
- Vastauksessa on annettu myös ratkaisu x=0, (maks. 3 p.)
- Derivoinnin voi tehdä myös osamäärän derivoimiskaavalla

2.3 Ratkaise $\log_5\left(2x+4\right) - \log_5\left(x+3\right) = \log_5\left(x+2\right)$. **4 p.**

Ratkaisu:

Koska logaritmoitavan luvun tulee olla aidosti positiivinen: $2x+4>0 \quad ja \quad x+3>0 \quad ja\ x+2>0$,

niin $Mf:\ x\in]-2,\infty[$

$$\log_5\frac{2x+4}{x+3}=\log_5(x+2)$$

$$\frac{2x+4}{x+3}=x+2$$

$$2x+4=(x+2)(x+3)$$

$$x^2+5x+6=2x+4$$

$$x^2+3x+2=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$ (tai SpeedCruncilla)

$x=-1$ tai $x=-2$

Vastaus: $x=-1$

- Määrittelyehto (1 p.)
- logaritmien laskusääntöjen soveltaminen (1 p.)
- Saadaan kaksi ratkaisua (1 p.)
- Toisen ratkaisun hylkääminen (1 p.)

3. Integraaleja 12 p.

3.1 Määritä $\int(\sin x+\sin 2x)\,dx$. 3 p.

Ratkaisu: $-\ cos(x)\ -\frac{1}{2}\cos cos\ (2x)\ +\ C$ +1p per oikea termi

3.2 Määritä $\int_1^5|x-3|\,dx$. 3 p.

Ratkaisu:

$$|x-3|=\begin{cases}x-3, & kun\ x\geq 3\\ 3-x, & kun\ x<3\end{cases}$$

$$\int_1^5|x-3|\,dx=\int_1^3(3-x)\,dx+\int_3^5(x-3)\,dx\ =$$

$$\Big/_1^3\left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)+\Big/_3^5\left(-3x+\frac{1}{2}x^2\right)=$$

$$-\frac{9}{2}+9-\left(-\frac{1}{2}+3\right)-15+\frac{25}{2}-\left(-9+\frac{9}{2}\right)=$$

$$-4+6-15+9+8=4$$

- oikea idea ja saatu molemmat osalausekkeet (1p)

- integraalifunktiot oikein (1p)
- sijoitukset ja vastaus oikein (1p)

3.3 Määritä funktion $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ integraalifunktioista se, joka on jaollinen binomilla $x + 2$. 3 p.

Ratkaisu:

$$F(x) = \int (3x^2 - 4x + 1)\, dx \; = x^3 - 2x^2 + x + C$$

Binomi $x + 2$ on $F(x)$:n tekijä jos ja vain jos -2 on sen nollakohta, eli

$$F(-2) = -8 - 8 - 2 + C = 0$$

$$C = 18$$

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + x + 18$$

- oikein integroitu lauseke (1p)
- oikea idea nollakohdasta (1p)
- saatu C=18 ja oikea funktio (1p)

3.4 Laske käyrien $y = 4\sqrt{x}$ ja $y = x\sqrt{x}$ väliin jäävän alueen pinta-alan tarkka arvo. 3 p.

Ratkaisu:

Leikkauspisteet yhtälöllä

$$x\sqrt{x} = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow (x-4)\sqrt{x} = 0$$

$$x = 0 \; tai \; x = 4$$

Kun $0 \leq x \leq 4$, on $4\sqrt{x} \geq x\sqrt{x}$. Testipiste: $x = 1 \rightarrow 4 \cdot \sqrt{1} > 1 \cdot \sqrt{1}$

$$A = \int_0^4 (4\sqrt{x} - x\sqrt{x})\, dx = \int_0^4 \left(4x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$= \Big/_0^4 \left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{8}{3} \cdot 8 - \frac{2}{5} \cdot 32 - \left(\frac{8}{3} \cdot 0 - \frac{2}{5} \cdot 0\right)$$

$$= 8\,\frac{8}{15}$$

- Leikkauspisteet oikein (1p)
- Saatu oikea integraali (1p)
- Integroitu oikein + vastaus oikea (1p)

4. Lapset hiekkalaatikolla 12 p.

Tiinalla ja Jarilla on menossa tavaransiirtoleikit hiekkalaatikolla. Tiinalla on 2 hiekkasankoa, 4 hiekkalapiota ja yksi hiekkasiivilä. Jarilla on ainoastaan hiekkasankoja ja hiekkasiivilöitä, joita on yhteensä 6 kappaletta.

Lähde: PIXABAY (CC0)

4.1 Tiina siirtää sattumanvaraisesti yhden lelun Jarin lelukasaan ja Jari siirtää sattumanvaraisesti yhden lelun takaisin Tiinan lelukasaan. Todennäköisyys sille, että Tiinalla on leluvaihdoksen jälkeen alkuperäinen määrä erilaisia hiekkaleluja on $\frac{2}{7}$. Kuinka monta hiekkasankoa ja kuinka monta hiekkasiivilää Jarilla on siis tavaranvaihtoleikin alussa? **6 p.**

Ratkaisu:

Olkoon x Jarin hiekkasiivilöiden lukumäärä. Hiekkasankojen lukumäärä on silloin $(6-x)$.

Merkitään hiekkasanko (hs), hiekkalapio (hl) ja hiekkasiivilä (hsi).
Tilanne pysyy alkuperäisenä, jos samanlainen hiekkalelu vaihtuu.

$$P(A) = P(hs,\, hs) + P(hl,\, hl) + P(hsi,\, hsi) =$$

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{7-x}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{x+1}{7} = \frac{2}{7} \quad | \cdot 7^2$$

$$14 - 2x + 4 + x + 1 = 14$$

$$x = 5$$

Vastaus: Jarilla on hiekanvaihtoleikin alussa siis 5 hiekkasiivilää ja yksi hiekkasanko.

- Yhteenlaskusäännön hyödyntäminen (2 p.)
- Yhtälön muodostaminen (2 p.)
- Ratkaisu (2 p.)

4.2 Lastenhoitaja kerää Jarin ja Tiinan hiekkalelut samaan laatikkoon ja nostaa sitten laatikosta kaksi lelua. Todennäköisyys sille, että molemmat lelut ovat hiekkasankkoja on $\frac{5}{26}$. Montako hiekkasankoa Jarilla siis alunperin olikaan? **6 p.**

Ratkaisu:
Olkoon x hiekkasankojen lukumäärä laatikossa.

$$\frac{x}{13} \cdot \frac{x-1}{12} = \frac{5}{26} \quad | \cdot 13 \cdot 12 \cdot 2$$

$$2x^2 - 2x = 60$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

SpeedCrunchilla:

```
a=1
= 1

b=-1
= -1

c=-30
= -30

x1 = (-b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a)
= 6

x2 = (-b - sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a)
= -5
```

Vastaus: Koska yhteensä oli 6 hiekkasankoa, niin Jarilla oli alussa 4 hiekkasankoa.

- Kertolaskusäännön hyödyntäminen (2 p.)
- Yhtälön muodostaminen (2 p.)
- Ratkaisu (2 p.)
-

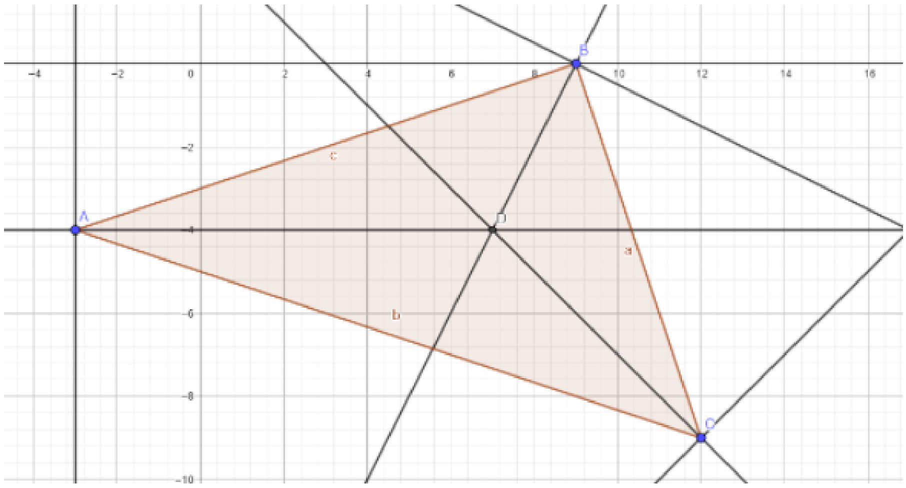
B-OSA

5. Ympyrä kolmion sisällä 12 p.

Kolmion $\Delta(ABC)$ kärkipisteet ovat $A = (-3,\ -4)$, $B = (9,\ 0)$ ja $C = (12,\ -9)$.

5.1 Tutki piirto-ohjelman avulla, mikä on kolmion sisään piirretyn ja mahdollisimman suuren ympyrän keskipiste. **4 p.**

Ratkaisu:
Kolmion sisään piirretyn mahdollisimman suuren ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste.



Vastaus: Leikkauspiste-työkalulla pisteen D koordinaatit ovat $D = (7,\ -4)$

- Kulmanpuolittajan hyödyntäminen (2 p.)
- GeoGebran työkalujen käyttö ja saatu piste D (2 p.)

5.2 Määritä laskemalla kolmion sisään piirretyn ja mahdollisimman suuren ympyrän yhtälö ja esitä se yleisessä muodossa. **8 p.**

Pisteiden A ja C kautta kulkevan suoran kulmakerroin: $k = \dfrac{-9+4}{12+3} = -\dfrac{5}{15} = -\dfrac{1}{3}$

Suoran yhtälö: $y + 4 = -\dfrac{1}{3}(x+3)$ eli $y = -\dfrac{1}{3}x - 5$

Pisteen $D = (7,\ -4)$ etäisyys suorasta on:

Suora yleisessä muodossa: $x + 3y + 15 = 0$

$$d = \frac{|1\cdot 7 + 3\cdot(-4) + 15|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Ympyrän yhtälö keskipisteen esitysmuodossa on tällöin $(x-7)^2 + (y+4)^2 = \sqrt{10}^2$

Esim Ti-Nspirellä:

$(x-7)^2+(y+4)^2=10 \qquad x^2-14\cdot x+y^2+8\cdot y+65=10$

Vastaus:

Yleisessä muodossa ympyrän yhtälö on: $x^2 + y^2 - 14x + 8y + 55 = 0$

- On määritetty suoran yhtälö, joka kulkee jonkin sivun kautta. (2 p.)
- Pisteen etäisyys suorasta (2 p.)
- On saatu ympyrän yhtälö keskipisteen esitysmuodossa (2 p.)
- On saatu ympyrän yhtälö yleisessä muodossa. (2 p.)

6. Trigonometrisia yhtälöitä 12 p.

Esitä ratkaisussasi myös välivaiheet ja käytä kulmayksikkönä radiaaneja.

6.1 Ratkaise $\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 2x + \cos^2 x = 1$ **6 p.**

Ratkaisu:

$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 2x + \cos^2 x = 1$ Kaksinkertaisin sinin kaavan mukaisesti saadaan

$\frac{2}{2\sqrt{3}}\sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = 0$ Ja trigonometrian peruslauseen mukaan:

$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$

$\sin x \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x - \sin x\right) = 0$ Tulon nollasäännön mukaan:

A: $\sin x = 0$ eli $\sin x = \sin 0$

$x = 0 + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - 0 + n \cdot 2\pi$

Nämä voidaan yhdistää, $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

tai

B

$\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x - \sin x = 0 \quad |: \cos x \neq 0$ $\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan x = 0$ eli $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi,\ n \in Z$

Jos $\cos x = 0$, niin $\sin x = 0$ ja jatkuu A-kohdan ratkaisuna.

Vastaus: $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi,\ n \in Z$ tai $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

- Trigonometristen muunnoskaavojen soveltaminen (2 p.)
- Siniyhtälön rakentaminen (2 p.)
- Tangenttiyhtälön rakentaminen (2 p.)
- Myös muut trigonometriset ratkaisut hyväksytään.

6.2 Suunniteltavan kosinifunktion $f(x)$ ominaisuudet ovat seuraavat: Funktion kuvaajan y-koordinaattien arvot kuuluvat välille $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$, sen jakso on 6π ja $f(\pi) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. Määritä funktio $f(x)$. **6 p.**

Ratkaisu:

Funktio on muotoa: $f(x) = a\cos(bx + c) + d$

Koska y-arvot kuuluvat välille $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$, niin amplitudi on 1 eli $a = \frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{2} = 1$ ja $d = \frac{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{2}$

Lisäksi jakso on 6π, niin voidaan päätellä, että $b = \frac{1}{3}$

Siis funktio saadaan muotoon $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + c\right) + \frac{3}{2}$

Tutkitaan c:n arvo: Nyt $f(\pi) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

Toisaalta $f(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + c\right) + \frac{3}{2} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3} + c\right)}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + c\right)}{2}$

Joten $\frac{3 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + c\right)}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

Siis $2\cos\left(\frac{\pi}{3} + c\right) = -\sqrt{3}$ ⇔ $\cos\left(\frac{\pi}{3} + c\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Eli $\cos\left(\frac{\pi}{3} + c\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$

$\frac{\pi}{3} + c = \pm\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$c = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $c = -\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$c = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ tai $c = -\frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

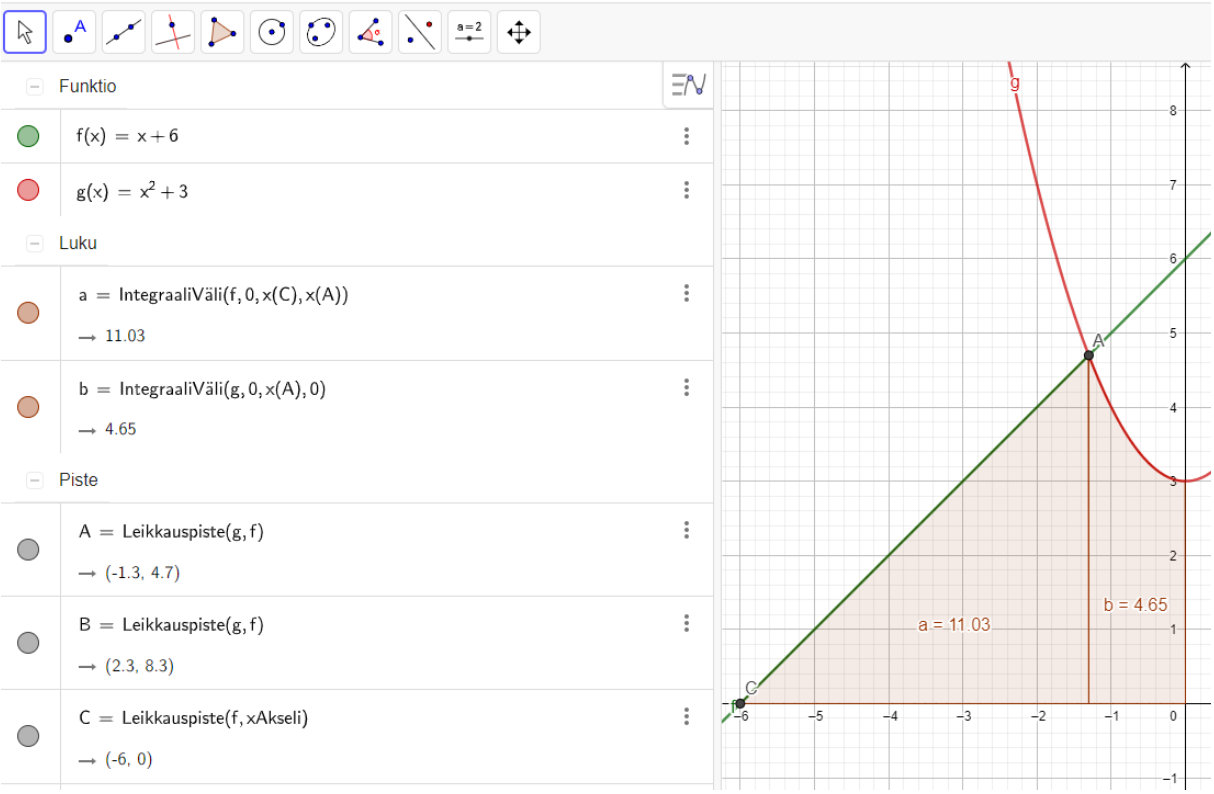
Vastaus: $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}$ tai $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{7\pi}{6}\right) + \frac{3}{2}$

- On päätelty amplitudi a (1 p.)
- On päätelty parametri d tai vastaava (1 p.)
- On päätelty jaksosta parametri b (1 p.)
- On osattu hyödyntää funktion arvoa kohdassa π. (1 p.)
- On ratkaistu parametri c1 ja c2 (2 p.)

7. Taso- ja avaruusgeometriaa 12 p.

Tarkastellaan funktioiden $f(x) = x + 6$ ja $g(x) = x^2 + 3$ kuvaajien sekä koordinaattiakseleiden rajaamaa aluetta.

7.1 Piirrä geometriaohjelmalla funktioiden $f(x) = x + 6$ ja $g(x) = x^2 + 3$ kuvaajien sekä koordinaattiakseleiden rajaama alue. Määritä CAS-laskimella alueen tarkka pinta-ala. 6 p.



Tarkka arvo alalle CAS puolella:

1 $f(x) = g(x)$

Ratkaise: $\left\{x = \frac{-\sqrt{13}+1}{2}, x = \frac{\sqrt{13}+1}{2}\right\}$

2 $\text{IntegraaliVäli}\left(f, 0, -6, \frac{-\sqrt{13}+1}{2}\right)$

$\rightarrow \frac{-13\sqrt{13}+91}{4}$

3 $2

≈ 11.03

4 $\text{IntegraaliVäli}\left(g, 0, \frac{1-\sqrt{13}}{2}, 0\right)$

$\rightarrow \frac{13\sqrt{13}-19}{6}$

5 $4

≈ 4.65

6 $2 + $4

$\rightarrow \frac{1}{12}\left(-13\sqrt{13}+235\right)$

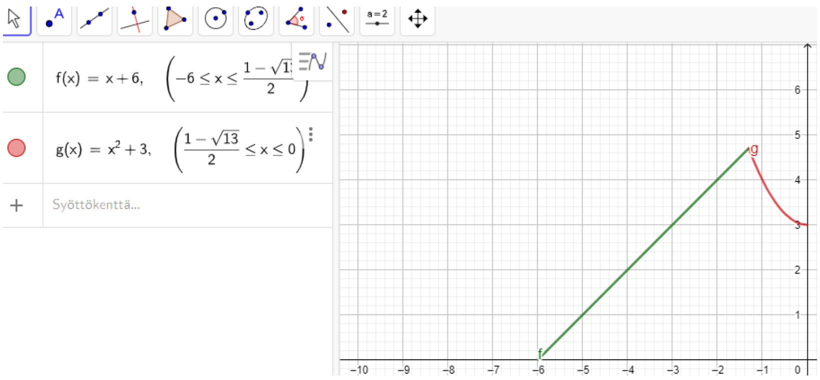
Tarkka vastaus näkyy viimeisellä rivillä.

- Kuva (2p)
- Leikkauspisteet (1p)
- Laskettu 1. integraali (1p)
- Laskettu 2. integraali (1p)
- Tarkka summa (1p)

7.2 Piirrä geometriaohjelmalla ne pyörähdyskappaleet, kun tehtävän annon mukainen alue pyörähtää x -akselin ja y -akselin ympäri. Laske x -akselin ympäri olevan pyörähdyskappaleen tilavuus yhden desimaalin tarkkuudella. **6 p.**

Ratkaisu:

Ensin xy-tasossa:



1

π IntegraaliVäli$\left((x+6)^2, 0, -6, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$

$\rightarrow \frac{1}{3}\pi\left(-65\sqrt{13}+338\right)$

2

π IntegraaliVäli$\left((x^2+3)^2, 0, \frac{1-\sqrt{13}}{2}, 0\right)$

$\rightarrow \frac{1}{5}\pi\left(52\sqrt{13}-103\right)$

3

$\frac{1}{3}\pi\left(-65\sqrt{13}+338\right)+\frac{1}{5}\pi\left(52\sqrt{13}-103\right)$

$\rightarrow \frac{1}{15}\pi\left(-169\sqrt{13}+1381\right)$

4

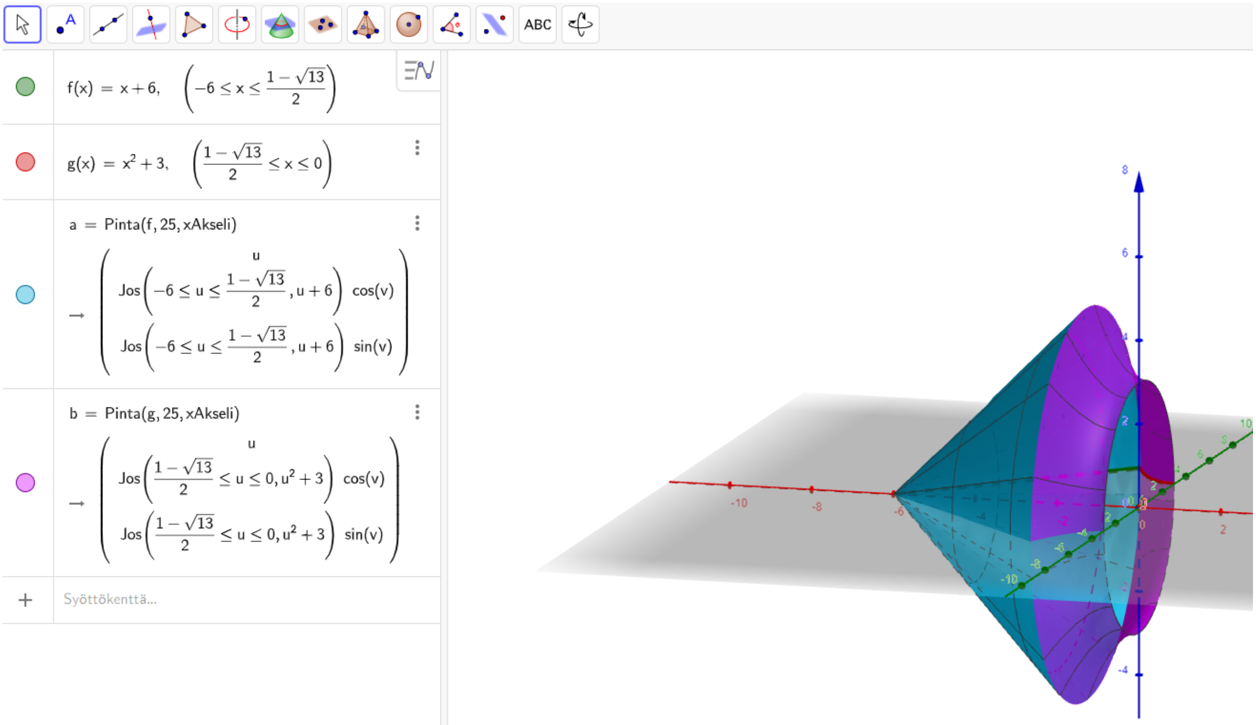
$3

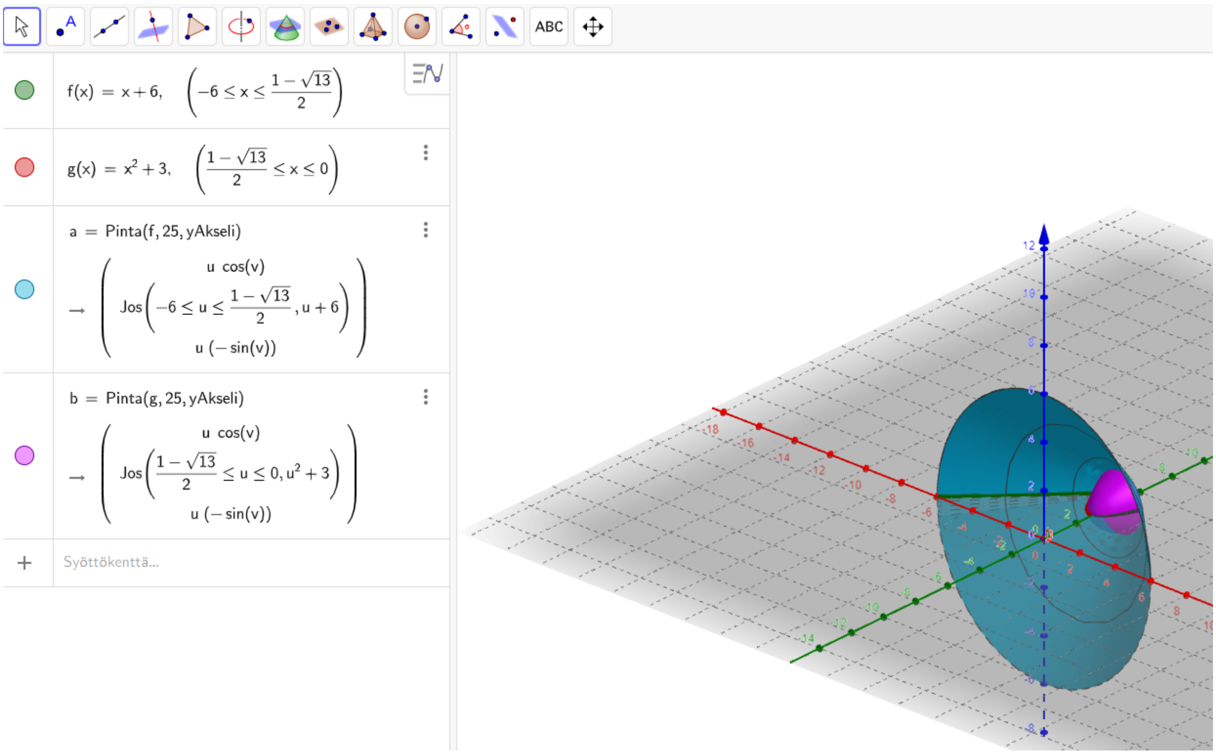
≈ 161.616

Tilavuus on siis noin 161,6 t.y.

- Kuvat (1+1p)
- Laskettu 1. integraali(1p)
- Laskettu 2. integraali(1p)
- Tarkka summa (1p)
- Likiarvo (1p)

Kuvat:





8. Vektoreista 12 p.

8.1 Kolmion kahtena sivuna ovat samasta pisteestä alkavat vektorit $2x\bar{i} + 3y\bar{j} + 4\bar{k}$ ja $2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$. Mikä on kolmannen sivun pituuden pienin mahdollinen arvo? 6 p.

Ratkaisu:

Olkoon vektorit

$\overline{a} = 2x\overline{i} + 3y\overline{j} + 4\overline{k}$ $\overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$

Tällöin kolmantena sivuna on vektori

$$\overline{a} - \overline{b} = (2x - 2)\overline{i} + (3y + 1)\overline{j} + 2\overline{k}$$

Koska $(2x - 2)^2 \geq 0$ ja $(3y + 1)^2 \geq 0$ tämän sivun pituus on

$\sqrt{(2x-2)^2 + (3y+1)^2 + 2^2} \geq \sqrt{4} = 2$ kaikilla reaaliluvuilla $x\ ja\ y$.

Pienin pituus saadaan kun $(2x - 2)^2 = 0$ ja $(3y + 1)^2 = 0$ samanaikaisesti.

Kun $x = 1$ ja $y = -\frac{1}{3}$ pituus on 2 ja siis pienin.

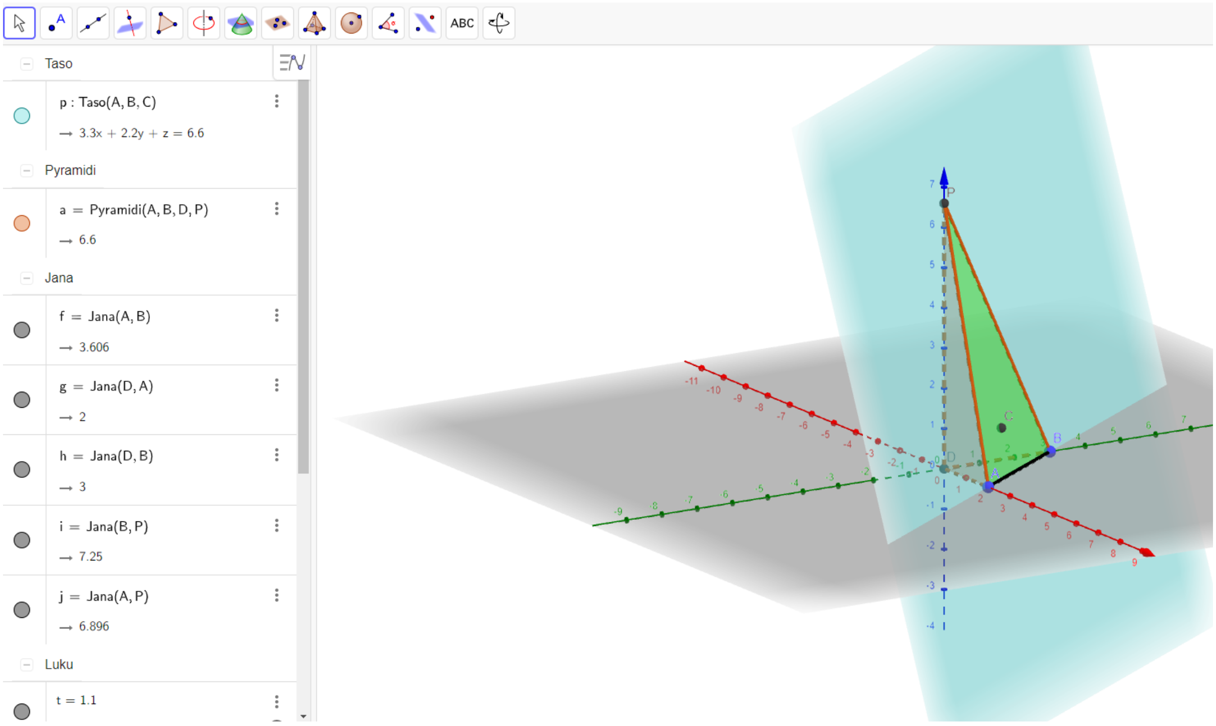
Vastaus: Pienin pituus on 2.

- Muodostettu 3. sivuvektori (1p)
- Vektorin pituuslauseke (2p)
- Perustelu miksi pituus on vähintään 2 (1p)
- Todettu milloin saadaan pienin pituus (1p)
- Vastaus: 2 (1p)

8.2 Pisteiden $A = (2,\ 0,\ 0)$, $B = (0,\ 3,\ 0)$ ja $C = (1,\ 1,\ t)$ kautta asetetaan taso joka leikkaa z -akselin pisteessä P. Määritä piste P ja vakio t, kun pisteiden A, B ja P sekä origon määräämän tetraedrin tilavuus on 5. **6 p.**

Ratkaisu:

Piirretään GeoGebralla periaatekuva asettamalla liukusäädin vakiolle t. Kuvasta ei pisteitä.



Pisteet $O = (0,\ 0,\ 0)$, $A = (2,\ 0,\ 0)$, $B = (0,\ 3,\ 0)$ *ja* $P = (0,\ 0,\ z)$ määräävät tetraedrin $OABP$, jonka pohjana on kolmio OAB ja korkeusjana OP. Piste $C = (1,\ 1,\ t)$.

Tetraedrin tilavuus on $V = \frac{1}{3} \bullet \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot |z| = |z| = 5$, josta

$z = \pm 5$ ja $P = (0,\ 0,\ \pm 5)$.

Tason pisteen C paikkavektori on

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$.

Koska vektori $\overline{AC}$ on vektoreiden

$\overline{AB} = -2\bar{\mathrm{i}} + 3\bar{\mathrm{j}}$

$\overline{AP} = -2\bar{\mathrm{i}} + 5\bar{\mathrm{k}}$ tai $\overline{AP} = -2\bar{\mathrm{i}} - 5\bar{\mathrm{k}}$

määräämässä tasossa on oltava

$\overline{AC} = r\left(-2\bar{\mathrm{i}} + 3\bar{\mathrm{j}}\right) + s\left(-2\bar{\mathrm{i}} + 5\bar{\mathrm{k}}\right)$ tai $\overline{AC} = r\left(-2\bar{\mathrm{i}} + 3\bar{\mathrm{j}}\right) + s\left(-2\bar{\mathrm{i}} - 5\bar{\mathrm{k}}\right)$

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = 2\bar{\mathrm{i}} + r\left(-2\bar{\mathrm{i}} + 3\bar{\mathrm{j}}\right) + s\left(-2\bar{\mathrm{i}} + 5\bar{\mathrm{k}}\right) = (2 - 2r - 2s)\bar{\mathrm{i}} + 3r\bar{\mathrm{j}} + 5s\bar{\mathrm{k}}$ tai

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = 2\bar{\mathrm{i}} + r\left(-2\bar{\mathrm{i}} + 3\bar{\mathrm{j}}\right) + s\left(-2\bar{\mathrm{i}} - 5\bar{\mathrm{k}}\right) = (2 - 2r - 2s)\bar{\mathrm{i}} + 3r\bar{\mathrm{j}} - 5s\bar{\mathrm{k}}$

Toisaalta on myös oltava:

$$\overline{OC} = \bar{i} + \bar{j} + t\bar{k}$$

Saadaan:

$$(2-2r-2s)\bar{i} + 3r\bar{j} + 5s\bar{k} = \bar{i} + \bar{j} + t\bar{k}$$, josta

$$2-2r-2s = 1 \quad ja \quad 3r = 1 \quad ja \ t = 5s$$

$$r = \frac{1}{3} \ ja \ s = \frac{1}{6} \ ja \ t = \frac{5}{6}$$

tai

$$(2-2r-2s)\bar{i} + 3r\bar{j} - 5s\bar{k} = \bar{i} + \bar{j} + t\bar{k}$$, josta

$$2-2r-2s = 1 \quad ja \quad 3r = 1 \quad ja \ t = -5s$$

$$r = \frac{1}{3} \ ja \ s = \frac{1}{6} \ ja \ t = -\frac{5}{6}$$

Vastaus: $P = (0,\ 0,\ \pm 5),\ t = \pm\frac{5}{6}$

- Hahmoteltu kuva (1p)
- Saatu tetraedrin kärjet (1p)
- Tetraedrin tilavuus oikein, josta P oikein. (1p)
- Saatu oikeat paikkavektorit OC (1+1p)
- Saatu oikeat arvot vakiolle t (1p)

9. Alueen tuhoeläinkanta 12 p.

Eräällä alueella on vakiintunut noin 1000 yksilön tuhoeläinkanta, jonka säätelevät ravintotilanne ja ainoa luonnonvarainen vihollinen, ilves. Ilveksenmetsästys alueella kestää 2 viikkoa ja aiheuttaa haittaa myös tuhoeläinkannalle. Tutkimus osoittaa että tuhoeläinten määrä noudattaa yhtälöä $N(t) = \dfrac{1000 \cdot (t-1)}{e^{(2-t)^2}} + 1000$, missä t on aika metsästyskauden alusta kuukausina.

9.1 Milloin tuhoeläinten lukumäärä on pienin ja milloin suurin? Anna vastaus viikkoina yhden desimaalin tarkkuudella metsästyskauden alusta. Perustele matemaattisesti. 6 p.

Ratkaisu: TNspire

$n(t) := \dfrac{1000 \cdot (t-1)}{e^{(2-t)^2}} + 1000 \blacktriangleright \textit{Valmis}$

Funktio on jatkuva ja derivoituva:

$\dfrac{d}{dt}(n(t)) \blacktriangleright -1000 \cdot (2 \cdot t^2 - 6 \cdot t + 3) \cdot e^{-t^2 + 4 \cdot t - 4}$

Derivaatan nollakohdat:

$\text{solve}\left(\dfrac{d}{dt}(n(t)) = 0, t\right) \blacktriangleright t = \dfrac{-(\sqrt{3}-3)}{2} \text{ or } t = \dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$

Likiarvot: $\dfrac{-(\sqrt{3}-3)}{2} \blacktriangleright 0.6339745962$ ja $\dfrac{\sqrt{3}+3}{2} \blacktriangleright 2.366025404$

Derivaattalausekkeessa tekijä $-1000(2t^2-6t+3)$ määrää derivaatan merkin.
Koska tämä funktio on alaspäin aukeava paraabeli on derivaattafunktio positiivinen nollakohtien välissä.

Derivaattafunktio on negatiivinen kun $t < \dfrac{-(\sqrt{3}-3)}{2}$ tai $t > \dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$.

Funktion $n(t)$ saa siis pienimmän arvonsa kohdassa $t = \dfrac{\sqrt{3}+3}{2} \blacktriangleright t = 2.366025404$.

Ajakohdat ovat: $0.634 \cdot 4 \blacktriangleright 2.536$ viikkoa ja $2.366 \cdot 4 \blacktriangleright 9.464$ viikkoa

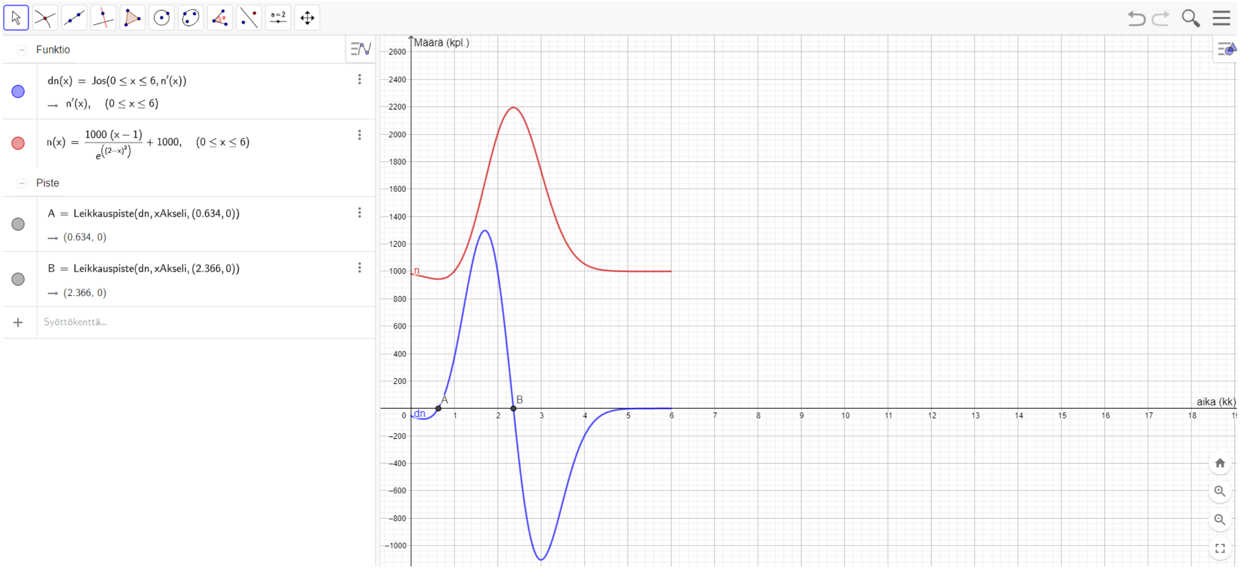
Vastaus: Tuhoeläinten määrä on pienimmillään 0,634 kuukauden eli noin 2,5 viikon kuluttua metsästyskauden alusta. Määrä on suurimmillaan 2,366 kuukauden eli noin 9,5 viikon kuluttua metsästyskauden alusta.

- Derivoitu oikein (1p)
- Derivaatan nollakohdat oikein (2p)
- Perustelu ääriarvoille (1p)
- Minimikohta (1p)

- Maksimikohta (1p)

9.2 Piirrä geometriaohjelmalla kuvaaja funktiosta ja sen derivaattafunktiosta alueessa $t \in [0,6]$. Millä muuttujan t arvoilla mainitulla välillä derivaattafunktion arvot ovat positiiviset? Mitä tapahtuu, mallin mukaan, tulevaisuudessa tuhoeläinkannalle? Anna sekä matemaatiinen että mielestäsi eläinlooginen perustelu. **6 p.**

Ratkaisu: GeoGebra



”Leikkauspiste”-toiminnolla saadaan derivaattafunktion leikkauspisteet x-akselin kanssa.

Eli derivaattafunktio on **positiivinen, kun** $0,634 < t < 2,366$ **(kk).**

Tämän jälkeen ravintotilanteen huononeminen (eläinlooginen perustelu) alkaa pienentää populaation kokoa.

Kun $t\to\infty$, $n(t) = 1000$. Toisin sanoen $n(t)\geq 1000,\ kun\ t\geq 1$. (matemaattinen perustelu)

- Kuvaajat (1+1p)
- Oikea vastaus (derivaattafunktion positiivisuus) (1p)
- Perustelu (1p)
- Ravintotilanne (1p)
- Matemaattinen perustelu raja-arvolla (1p)

10. Lentomäen maailmancup 2022 (12 p.)

Aineistossa on esitetty Planican lentomäen maailmancupin tulokset 25.3.2022. Ensimmäisenä tehtävänä on tehdä tilasto 20 parhaimman mäkihyppääjän mäkihyppyjen pituuksista. Luokittele aineisto kuuteen tasaväliseen luokkaan. Ensimmäisen luokan alaraja on lyhimmän mäkihypyn pituus ja vastaavasti viimeisen luokan yläraja on pisimmän luokan mäkihypyn pituus.

Lähde: PIXABAY (CC0)

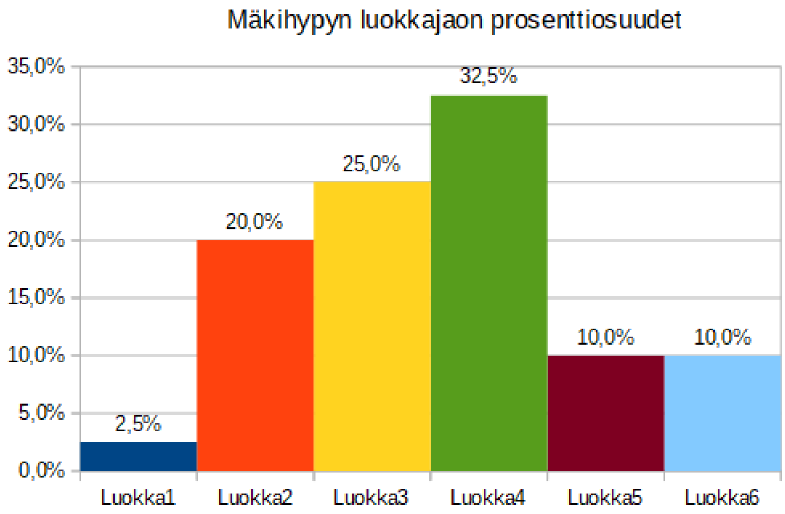
Aineisto

10.A Lentomäen maailmancup 2022 tulokset

10.1 Tee luokitellusta aineistosta histogrammi, jossa eri luokkien osuudet on esitetty prosentteina, prosentin kymmenyksen tarkkuudella. Laita vastaukseesi esille myös kuvankaappaus tilastosta, jota olet käsitellyt. (3 p.)

Ratkaisu:

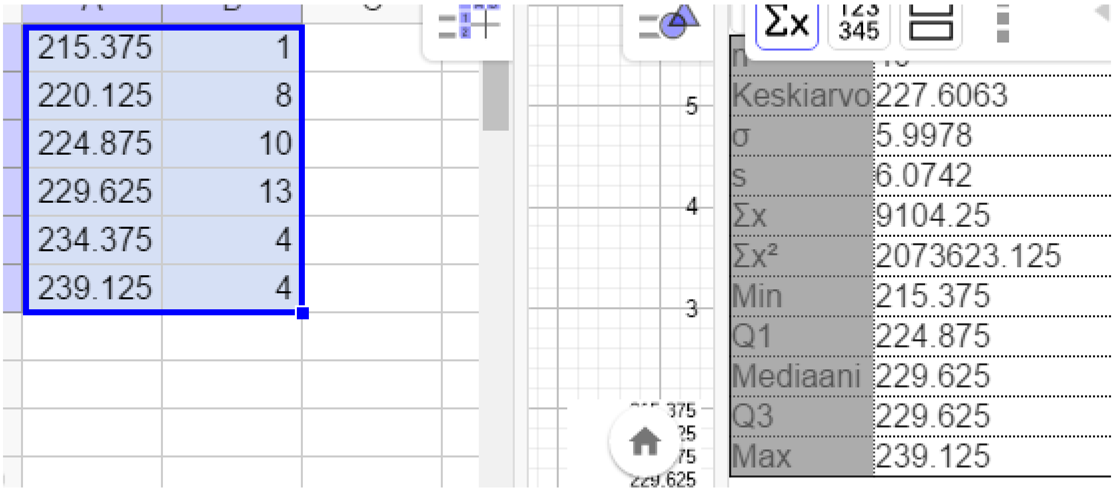
hyppäjä	hypyt	Luokka								
1	232	4	Luokka	Luokka	Alaraja	Yläraja	Frekvenssi [f]	sf	Luokkakeskus	%-osuus
	239	6	1	Luokka1	213	217,75	1	1	215,375	2,5%
2	226	3	2	Luokka2	217,75	222,5	8	9	220,125	20,0%
	237	6	3	Luokka3	222,5	227,25	10	19	224,875	25,0%
3	230	4	4	Luokka4	227,25	232	13	32	229,625	32,5%
	230,5	4	5	Luokka5	232	236,75	4	36	234,375	10,0%
4	228	4	6	Luokka6	236,75	241,5	4	40	239,125	10,0%
	224	3								
5	223,5	3				yht.	40			
	237	5								
6	222	2								



- Histogrammi (3 p.)
- Muu diagrammi (maks. 1 p.)

10.2 Määritä luokitellusta aineistosta mäkihyppyjen pituuksien keskiarvo. Anna vastaus ½ metrin tarkkuudella, kuten aineistossakin. **3 p.**

Ratkaisu:
Luokkakeskusten mukaisesti GeoGebrassa:



$\bar{x} \approx 227{,}5$

- Keskiarvo (3 p.)
- On annettu vastaus poiketen ½ m tarkkuudesta (Maks. 2 p.)

10.3 Määritä luokitellusta aineistosta mäkihyppyjen pituuksien moodi. Anna vastaus ½ metrin tarkkuudella, kuten aineistossakin. **3 p.**

Ratkaisu:

$Mo = \{229{,}5\}$

- Moodi (3 p.)
- On annettu vastaus poiketen ½ m tarkkuudesta (Maks. 2 p.)

10.4 Määritä luokitellusta aineistosta mäkihyppyjen pituuksien mediaani. Anna vastaus ½ metrin tarkkuudella, kuten aineistossakin. **3 p.**

Ratkaisu:

Luokassa 4 ylittyy 50 % hyppyjen määrässä, joten $Md = \{229{,}5\}$

- Mediaani (3 p.)
- On annettu vastaus poiketen ½ m tarkkuudesta (Maks. 2 p.)

11. Lukuteoriaa ja Ankkalinnan logiikkaa 12 p.

11.1 Luvut $26 + 38^{25}$ ja $43 + 4^{25}$ jaetaan luvulla 17. Osoita, että tällöin jakojäännökset ovat yhtäsuuret. Paljonko tämä jakojäännös on? Huomaa: Älä käytä suoraa laskinkomentoa jakojäännökselle. 6 p.

Ratkaisu:

Siirrytään kongruentteihin lukuihin:

$26 \equiv 9\ (mod 17)$, $38 \equiv 4\ (mod 17)$ ja $43 \equiv 9\ (mod 17)$

Siten

$26 + 38^{25} \equiv 9 + 4^{25}\ (mod 17)$ ja $43 + 4^{25} \equiv 9 + 4^{25}\ (mod 17)$

Saatiin siis samat kongurenssilausekkeet, joten jakojäännös on sama.

Edelleen $4^{25} = 2^{50} = \left(2^5\right)^{10} = 32^{10} \equiv (-2)^{10} = \left((-2)^5\right)^2 = (-32)^2 \equiv (-2)^2 = 4$

Siten $9 + 4^{25} \equiv 9 + 4 = 13\ (mod\ 17)$

Vastaus: Jakojäännös on siis 13.

Tarkistus Nspirellä:

$\text{solve}\left(43+4^{25}=x\cdot 17+13,x\right) \blacktriangleright x=66229406284862$

- Kongruentit luvut $26 \equiv 9\ (mod 17)$, $38 \equiv 4\ (mod 17)$ ja $43 \equiv 9\ (mod 17)$
  (2p)
- Saatu lausekkeet $26 + 38^{25} \equiv 9 + 4^{25}\ (mod 17)$ ja $43 + 4^{25} \equiv 9 + 4^{25}\ (mod 17)$
  (2p)
- Saatu $9 + 4^{25} \equiv 9 + 4 = 13\ (mod\ 17)$ (1p)
- Vastaus: 13 (1p)

11.2 Ankkalinnassa kuohuu ja poliisi tutkii tapausta. Roope Ankan tarkoin vartioitu euronkolikko on varastettu. Koska Kalle Ankan veljenpojat Hupu, Tupu ja Lupu myös aikaisemmin ovat otettu kiinni vastaavista rikoksista heitä epäillään taas kerran tapahtuneesta. Ankkapoliisi on selvittänyt eräitä faktoja: (1) Jos Tupu on syyllinen niin Hupu ja Lupu ovat syyttömiä. (2) Vähintään yksi veljeksistä on syytön. (3) Lupu on syyllinen jos ja vain jos Hupu on syytön tai Tupu on syytön. Voisitko auttaa ankkapoliisia langettamaan tuomiot veljeksille? Formalisoi faktalauseet ja käytä totuustaulukkoa lähtien merkinnöistä: H=Hupu on syyllinen, T=Tupu on syyllinen ja L=Lupu on syyllinen. 6 p.

Lähde: PIXABAY (CC0)

Ratkaisu:

Lauseet ovat 1: $T \Longrightarrow \neg H \wedge \neg L$ 2: $\neg T \vee \neg H \vee \neg L$ 3: $L \Longleftrightarrow \neg H \vee \neg T$

H	T	L	$\neg H$	¬T	¬L	$\neg H \wedge \neg L$	1	2	$\neg H \vee \neg T$	3
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0

Rivin 3 mukaan sekä Hupu että Lupu ovat syyllisiä (Tupu syytön) ja rivin 7 mukaan ainoastaan Lupu on syyllinen. Siis Lupu tuomitaan ainakin heti.

Tupu vapautetaan kaikista syytteistä sillä riveillä 3 ja 7 hän on syytön.

Hupu on rivin 3 mukaan syyllinen mutta rivin 7 mukaan syytön, joten häntä ei voida tuomita (vielä).

Vastaus:

Hupu ei voida tuomita (vielä)

Tupu vapautettu kaikista syytteistä

Lupu tuomitaan syyllisenä.

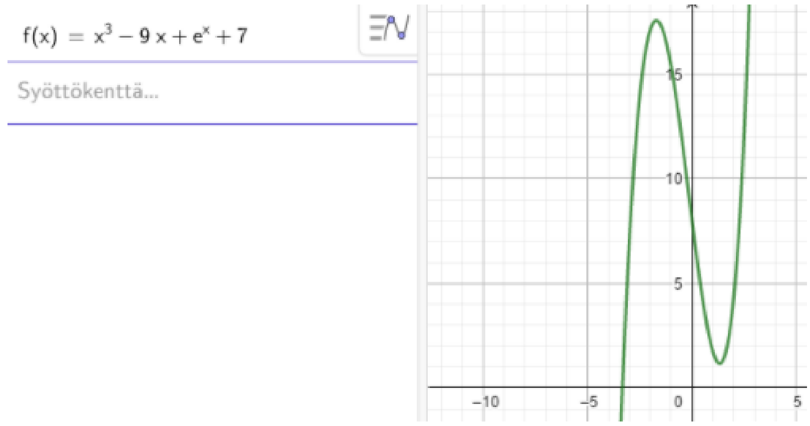
- Saatu formaalilauseet (2p)
- Oikea totuustaulukko (2p)
- Oikea päättelyt (1p)
- Oikea vastaus (1p)

12. Nollakohta puolitusmenetelmällä 12 p.

Olkoon funktio $f(x) = x^3 - 9x + e^x + 7$

12.1 Perustele, miksi funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta. **4 p.**

Ratkaisu:



a) Funktio $f(x)$ on jatkuva ja derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}$.

Define $f(x)=x^3-9\cdot x+e^x+7$	*Valmis*
$f(-4)$	-20.9817
$f(-3)$	7.04979

$f(-4) < 0$ ja $f(-3) > 0$, joten Bolzanon lauseen mukaisesti funktiolla on **ainakin** yksi nollakohta.

$f'(x) = 3x^2 - 9 + e^x$

b) Tutkitaan funktion $f(x)$ derivaattaa:

Define $f(x)=x^3-9\cdot x+e^x+7$ *Valmis*

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$

$x=-1.71464$ or $x=1.32252$

Merkkikaavion mukaisesti ja testipisteiden avulla:

		$-1{,}716464$		$1{,}32252$	
$f'(x)$	$+$	|	$-$	|	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	|	$\searrow$	|	$\nearrow$
		$-1{,}716464$		$1{,}32252$	

Funktiolla on siis paikallinen maksimi:

$f(-1.71464)$ 17.5708

Funktiolla on siis paikallinen minimi:

$f(1.32252)$ 1.16335

Koska paikallinen minimi on arvoltaan positiivinen, niin funktiolla on **korkeintaan** yksi nollakohta.

a ja b kohdan mukaisesti funktiolla on **täsmälleen** yksi nollakohta.

- Bolzanon lauseen hyödyntäminen (1 p.)
- On todettu jatkuvuus ja positiiviset että negatiiviset arvot (1 p.)
- Derivaatan hyödyntäminen ja ääriarvojen tutkinta (1 p.)
- Päättely, että on täsmälleen yksi nollakohta (1 p.)

12.2 Määritä funktion $f(x)$ nollakohta numeerisesti soveltaen puolitusmenetelmää. Käytä taulukkolaskentaohjelmaa tai vaihtoehtoisesti ohjelmointia apunasi. Valitse ensimmäiselle iteraatiokierrokselle nollakohdan ympäristöstä lähimmät kokonaisluvut, jolloin välin pituudeksi tulee yksi. Sovella puolitusmenetelmää niin monta iteraatiokierrosta, että funktion arvo nollakohdassa poikkeaa nollasta vähemmän kuin 10^{-2} verran. **8 p.**

Ratkaisu:

Funktion $f(x)$ nollakohta on siis kokonaislukujen -3 ja -4 välissä.

iteraatiokierros		väli		puoliväli
		-4	-3	-3,5
1	funkion arvot	-20,98168436	7,049787068	-4,344802617
		-3,5	-3	-3,25
2	funkion arvot	-4,344802617	7,049787068	1,960649208
		-3,5	-3,25	-3,375
3	funkion arvot	-4,344802617	1,960649208	-1,034141257
		-3,375	-3,25	-3,3125
4	funkion arvot	-1,034141257	1,960649208	0,502001169
		-3,375	-3,3125	-3,34375
5	funkion arvot	-1,034141257	0,502001169	-0,256291141
		-3,34375	-3,3125	-3,328125
6	funkion arvot	-0,256291141	0,502001169	0,125288228
		-3,34375	-3,328125	-3,3359375
7	funkion arvot	-0,256291141	0,125288228	-0,064891714
		-3,3359375	-3,328125	-3,33203125
8	funkion arvot	-0,064891714	0,125288228	0,030350513
		-3,3359375	-3,33203125	-3,333984375
9	funkion arvot	-0,064891714	0,030350513	-0,017232514
		-3,333984375	-3,33203125	-3,333007813
10	funkion arvot	-0,017232514	0,030350513	**0,006568518**

Vastaus: Puolitusmenetelmällä ratkaistu nollakohta on $x_{10} \approx -3{,}333007813$

- Taulukointi (2 p.)
- Puolitusmenetelmän käyttö (2 p.)
- On päädytty riittävän tarkkaan nollakohtaan (4 p.)
- Muu menetelmä (maks. 2 p.)

13. Derivoituvuus 12 p.

13.1 Määritä ilman laskinta $f'(16)$ kun $f(x) = (\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}$. Käytä derivaatan määritelmää ja näytä kaikki välivaiheet. **6 p.**

Ratkaisu:

Matikkaeditorilla:

Määritelmä:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Silloin saadaan:

$$f(x) = (\sqrt{x} - 1)\sqrt{x} = x - \sqrt{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(16+h) - f(16)}{h} =$$

$$\frac{16 + h - \sqrt{16+h} - 16 + \sqrt{16}}{h} = \frac{h - \sqrt{16+h} + 4}{h} =$$

$$\frac{4 + h - \sqrt{16+h}}{h} =$$ lavennetaan $4 + h + \sqrt{16+h}$

$$\frac{\left(4 + h - \sqrt{16+h}\right)\left(4 + h + \sqrt{16+h}\right)}{h\left(4 + h + \sqrt{16+h}\right)} =$$

$$\frac{16 + 8h + h^2 - 16 - h}{h\left(4 + h + \sqrt{16+h}\right)} = \frac{7h + h^2}{h\left(4 + h + \sqrt{16+h}\right)} = \frac{h(7+h)}{h\left(4 + h + \sqrt{16+h}\right)} =$$

$$\frac{7 + h}{4 + h + \sqrt{16+h}} \to \frac{7}{8},\ kun\ h \to 0$$

- Määritelmä oikea (1p)
- Erotusosamäärän lauseke oikein (2p)
- Laventaminen oikein tehty (2p)
- Raja-arvo oikein (1p)

13.2 Todista: Derivoituva funktio on jatkuva. **6 p.**

Ratkaisu: Jos funktio *f* on derivoituva kohdassa $x = a$, on olemassa raja-arvo

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Pitää näyttää että tästä seuraa

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(1p)

Oletetaan että $x \neq a$. Silloin saadaan

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

(1p)

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

(1p)

Lasketaan funktion raja-arvo kohdassa $x = a$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \right) =$$

$$= f'(a) \cdot (a - a) + f(a) =$$

$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) =$$

$$= f(a)$$

(2p)

Saatiin siis jatkuvuusehto

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

■ (1p)

Huomaa:

Tästä seuraa myös se että jos funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = a$, se ei myöskään ole derivoituva kohdassa $x = a$.