FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä, preliminäärikoe, opettaja A

Kevät 2022

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmän sähköistä taulukkokirjaa ja koejärjestelmän tarjoamia perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jäljessä olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Joissain tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Sisällys

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

1. Monivalintoja 12 p.

Seuraavissa monivalintatehtävissä yksi vastausvaihtoehdoista on oikea. Valitse oikea vastausvaihtoehto.

1.1. Kun lauseke $(a-1)(a+1)-(a-1)^2$ sievennetään, saadaan **2 p.**

- ○ 2
- ○ $2a(a-1)$
- ○ $-2a$
- ○ $2a-2$

1.2. Kun binomiin $3x-2x^3$ lisätään monomin $2x$ ja binomin $1-x^2$ tulo, saadaan **2 p.**

- ○ $x(4x^2+5)$
- ○ $x(-4x^2-5)$
- ○ $-x(4x^2-5)$
- ○ $x(4x^2-5)$

1.3. Lausekkeen $\left(x-\frac{1}{x}\right):(x-1)$ sievennetty muoto on **2 p.**

- ○ $\frac{1-x}{x}$
- ○ $x+\frac{1}{x}$
- ○ $\frac{x-1}{x}$
- ○ $\frac{x+1}{x}$

1.4. Määritä lausekkeen $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}$ arvo, kun $x=2$ ja $y=-4$. **2 p.**

- ○ 1
- ○ 4
- ○ 2
- ○ -2

1.5. Kun lauseke $\frac{2x}{x+1}\cdot\frac{x^2+x}{x^2}$ sievennetään, saadaan **2 p.**

- ○ x
- ○ $\frac{1}{2}$
- ○ $2x$
- ○ 2

1.6. Kun lauseke $\frac{2a-1}{a-1}-\frac{2a+1}{a+1}-\frac{a}{a^2+a}$ sievennetään, saadaan **2 p.**

- ○ $\frac{a}{a-1}$
- ○ $\frac{a}{a+1}$
- ○ $\frac{1}{a-1}$
- ○ $\frac{1}{a+1}$

2. Noppapeli 12 p.

Kaksi abiturienttia pelaavat noppapeliä. Pelissä pelaaja heittää vuorollaan kahta noppaa. Heittovuorossa oleva voittaa, jos hän saa kaksi samaa silmälukua. Abiturienttien keskinäinen heittojärjestys arvotaan ennen pelin alkua.

1. Mikä on todennäköisyys, että abiturientti saa heittovuorollaan kaksi samaa silmälukua? **4 p.**
2. Mikä on todennäköisyys, että peli päättyy ensimmäisellä heittokierroksella? **4 p.**
3. Millä todennäköisyydellä peli etenee toiselle heittokierrokselle? **4 p.**

3. Suurin ja pienin arvo **12 p.**

Laske funktion

1. $f\left(x\right)=x^2\cdot\ln(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[1,e]$. **6 p.**
2. $g\left(x\right)=\sqrt{2-x-x^2}$ suurin ja pienin arvo. **6 p.**

4. Rationaaliepäyhtälö **12 p.**

Ratkaise rationaaliepäyhtälö $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\geq 1.$

Saat estetyt laskinohjelmat käyttöön palautettuasi A-osan.

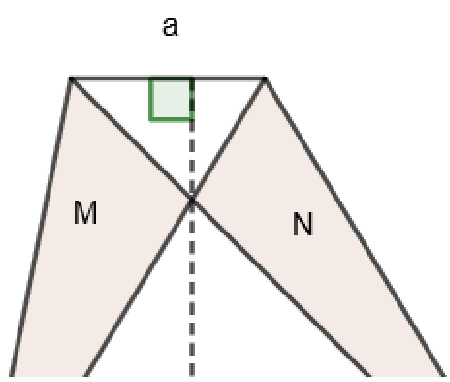
Palauta A-osa

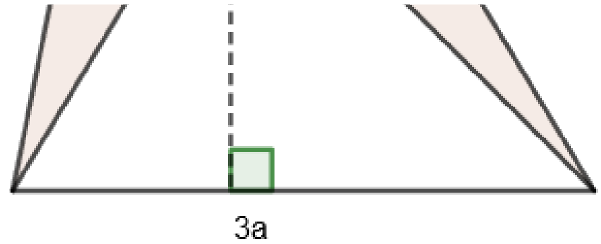
B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Alueen ala **12 p.**

Olkoon pienemmän kuvassa näkyvän valkoisen kolmion piirretty korkeus h. Kuinka monta prosenttia kuvan kolmioiden M ja N pinta-alojen summa on puolisuunnikkaan pinta-alasta? Perustele matemaattisesti.





6. Leikkauspisteiden etäisyys **12 p.**

Tutki CAS-laskimen avulla: Millä parametrin c arvolla suoran $y = x + c$ ja funktion $f\left(x\right) = x^2 + 2x - 2$ leikkauspisteiden etäisyys on $5\sqrt{2}$? Mitkä ovat nämä leikkauspisteet?

7. Logistinen funktio **12 p.**

Logistisella funktiolla voi mallintaa muun muassa epidemian leviämistä. Aluksi epidemiaan sairastuvien määrä kasvaa eksponentiaalisesti, mutta alun jälkeen kasvu hidastuu.

Oletetaan, että 100 000 asukkaan kaupungissa epidemiaan sairastuvien lukumäärää voidaan mallintaa logistisella funktiolla

$$N\left(t\right) = \frac{A}{1 + Be^{-Kt}},$$

jossa aikaa t mitataan kuukausina epidemian puhkeamisen havaitsemisesta ja A, B ja K ovat mallin parametrit. Epidemian puhjetessa havaittiin 250 sairastunutta, kun kuukauden päästä sairastuneita oli 1 250. Lopulta, hyvin pitkän ajan kuluttua epidemian alusta epidemiaan sairastuneita oli 10 % kaupungin asukkaista.

1. Määrää logistisen mallin parametrien A, B ja K arvot. **6 p.**
2. Kuinka pitkän ajan kuluttua epidemian puhkeamisen havaitsemisesta sairastuneiden määrä kasvoi nopeiten? **6 p.**

8. Suora ja pallo avaruudessa **12 p.**

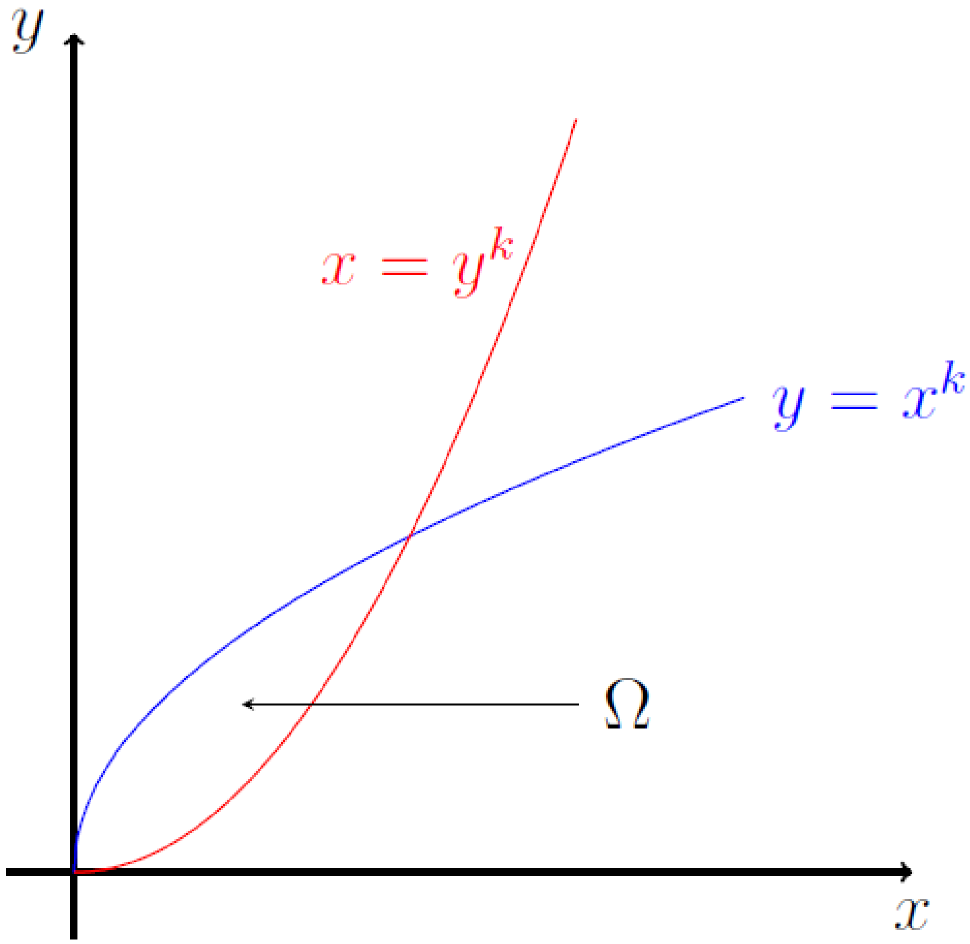
Olkoon avaruudessa määritelty pallo $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4 + t$ ja suora $\overline{OP} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k} + s\left(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}\right)$, missä $s, t \in \mathbf{R}$.

1. Millä vakion t arvolla pallo ja suora sivuavat toisiaan? **4 p.**
2. Mikä tämä sivuamispiste on kohdassa 8.1 määritetyn t:n arvon mukaan? **4 p.**

3. Mitkä pisteet suoralla ovat etäisyydellä 2 kohdassa 8.2 määritystä sivuamispisteestä? **4 p.**

9. Kahden käyrän rajaama tasoalue **12 p.**

Käyrät $x = y^k$ ja $y = x^k, k > 0, k \neq 1$, rajaavat tason ensimmäisessä neljänneksessä tasoalueen Ω.



1. Esitä tasoalue Ω kahden käyrän $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ rajaamana alueena välillä $[a, b]$ eli muodossa

$$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

   Määrää tasoalueen Ω pinta-ala $A(\Omega)$. **4 p.**

2. Tasoalueen matemaattinen keskipiste eli keskiö on piste, joka kuvaa tasoalueen keskimääräistä sijaintia. Symmetrian nojalla tasoalueen Ω keskiön $(\overline{x}, \overline{y})$ koordinaateille pätee $\overline{x} = \overline{y}$.

   Määritä tasoalueen Ω keskiön koordinaatit, kun keskiön x-koordinaatille pätee

$$\overline{x} = \frac{1}{A(\Omega)} \int_a^b xh(x)\,dx,$$

   jossa $h(x)$ on alueen Ω korkeus kohdassa x. **4 p.**

3. Mitä pistettä keskiö lähenee, kun k kasvaa rajatta? **4 p.**

B2-osa

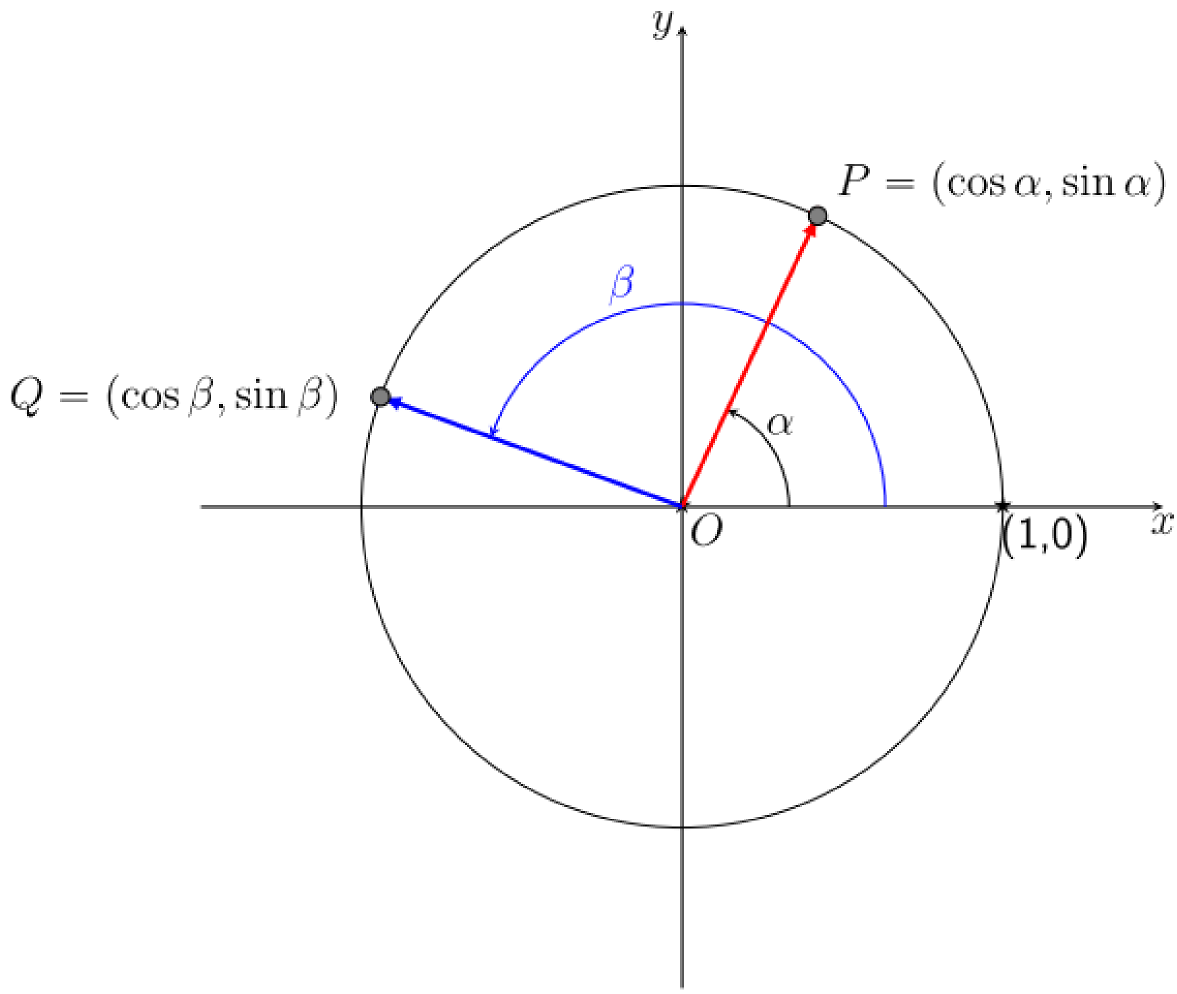
Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Liian pienet kengät 12 p.

Erään tutkimuksen mukaan 12 ihmisen joukossa 4 käytti liian pieniä kenkiä todennäköisyydellä 0,17. Millä todennäköisyydellä 50 opiskelijan ryhmässä korkeintaan 30 % käyttää liian pieniä kenkiä?

11. Trigonometriaa 12 p.

Origokeskisessä yksikköympyrässä on kaksi kehäpistettä P ja Q.



1. Määritä pisteiden P ja Q paikkavektorit. **2 p.**
2. Esitä lauseke $\cos(\beta - \alpha)$ sellaisessa muodossa, jossa esiintyy vain termejä $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ ja $\cos\beta$. **6 p.**
3. Käytä apunasi kohdassa 11.2 johtamaasi lauseketta ja määrää $\sin(\beta - \alpha)$. **4 p.**

12. Tautologia **12 p.**

1. Onko lause $p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$ tautologia? Perustele. **6 p.**
2. Kaksi ammattiyhdistyshenkilöä keskustelee palkankorotuksesta. Henkilö A väittää "Tulee palkankorotus ja ei lakkoa." ja henkilö B väittää " Ei pidä paikkaansa että jos tulee palkankorotus, niin tulee lakko." Ovatko A ja B yksimielisiä? Perustele. **6 p.**

13. Eksponenttijakauma **12 p.**

Satunnaismuuttuja T noudattaa eksponenttijakaumaa parametrinaan $\lambda > 0$, jota merkitään $T \sim \mathrm{Exp}\left(\lambda\right)$. Tällöin satunnaismuuttujan T tiheysfunktio on

$$f\left(t\right) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

1. Määritä satunnaismuuttujan T kertymäfunktion $F\left(t\right)$ lauseke. **3 p.**
2. Määrää tapahtuman $A = \{T > s\}$ todennäköisyys, kun s on positiivinen reaaliluku. **3 p.**
3. Määrää tapahtuman $B = \{T > s + r\}$ ehdollinen todennäköisyys, kun ehtotapahtumana on $A = \{T > s\}$. Mitä huomaat? Molemmat luvut s ja r ovat positiivisia reaalilukuja. **6 p.**

Kokeen tehtävät loppuvat tähän.

Lähteet

5. Lähde: MFKA.
9. Lähde: MFKA.
10. Lähde: PIXABAY. CC0.
11. Lähde: MFKA.

Tarkista, että vastasit ohjeiden mukaiseen määrään tehtäviä. Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.