

9.1

a) $\sqrt[3]{125} = 5$, koska $5^3 = 125$.

b) $\sqrt[3]{0} = 0$, koska $0^3 = 0$.

c) $\sqrt[3]{-1000} = -10$, koska $(-10)^3 = -1000$.

d) Koska $\sqrt[3]{1} = 1$ ja $\sqrt[3]{8} = 2$, niin $\sqrt[3]{4}$ on lukujen 1 ja 2 välissä oleva irrationaaliluku, jonka tarkka arvo on $\sqrt[3]{4}$.

Vastaus

a) 5

b) 0

c) -10

d) $\sqrt[3]{4}$

9.2

a) $\sqrt[3]{-39} = -3,39121\dots \approx -3,391$

b) $\sqrt[3]{0,27} = 0,64633\dots \approx 0,646$

c) $\sqrt[3]{-546} = -8,17330\dots \approx -8,173$

d) $\sqrt{4711} = 68,63672\dots \approx 68,637$

Vastaus

a) $\sqrt[3]{-39} \approx -3,391$

b) $\sqrt[3]{0,27} \approx 0,646$

c) $\sqrt[3]{-546} \approx -8,173$

d) $\sqrt{4711} \approx 68,637$

9.3

a) $\sqrt[3]{3-30} = \sqrt[3]{-27} = -3$, koska $-3^3 = -27$.

b) $(\sqrt[3]{-7})^3 = -7$, koska $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ kaikilla a :n arvoilla.

Vastaus

a) -3

b) -7

9.4

a) $x^3 = 729$
 $x = \sqrt[3]{729}$
 $x = 9$

Ratkaisu on luvun 729 kuutiojuuri.

Lasketaan kuutiojuuri laskimella.

b) $4x^3 + 108 = 0$ $|-108$
 $4x^3 = -108$ $|:4$
 $x^3 = -27$
 $x = \sqrt[3]{-27}$
 $x = -3$

Ratkaistaan ensin x^2 .

Ratkaisu on luvun -27 kuutiojuuri.

Lasketaan kuutiojuuri laskimella.

Vastaus

a) 9

b) -3

9.5

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 3x^3 + 48 &= 0 && | -48 \\ 3x^3 &= -48 && | :3 \\ x^3 &= -16 \\ x &= \sqrt[3]{-16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 2x^3 + 34 &= 56 && | -34 \\ 2x^3 &= 22 && | :2 \\ x^3 &= 11 \\ x &= \sqrt[3]{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad x^3 &= 0 \\ x &= \sqrt[3]{0} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad (x+2)^3 &= 0 \\ x+2 &= \sqrt[3]{0} \\ x+2 &= 0 && | -2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Vastaus

$$\text{a)} \quad x = \sqrt[3]{-16}$$

$$\text{b)} \quad x = \sqrt[3]{11}$$

$$\text{c)} \quad x = 0$$

$$\text{d)} \quad x = -2$$

9.6

Bakteerien määrä tulee keskimäärin vuorokaudessa x -kertaiseksi.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

Ma	256
Ti	$256x$
Ke	$256x \cdot x = 256x^2$
To	$256x^2 \cdot x = 256x^3 = 814$

$$256x^3 = 814$$

Torstai-aamuna bakttereita 814 kpl.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 1,4704\dots$$

$$\approx 1,47$$

Bakteerien lukumäärä tuli keskimäärin vuorokaudessa 1,47-kertaiseksi.

Vastaus

1,47-kertaiseksi

9.7

Merkitään akvaarion sivusärmän pituutta kirjaimella x .

Kuution tilavuus $V = x^3 = 240$ L = 240 dm^3 .

Ratkaistaan tästä yhtälöstä x .

$$x^3 = 240$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 6,2144\dots$$

$$\approx 6,2 \text{ (dm)}$$

Akvaarion sivusärmän pituus on $6,2 \text{ dm} = 62 \text{ cm}$.

Kuution muotoiseen kannelliseen akvaarioon tarvitaan kuusi neliön muotoista lasilevyä, joiden sivun pituus on $6,2 \text{ dm} = 62 \text{ cm}$.

Vastaus

kuusi neliön muotoista lasilevyä, joiden sivun pituus on $6,2 \text{ dm} = 62 \text{ cm}$.

9.8

Merkitään lausekkeiden arvot yhtä suuriksi ja ratkaistaan näin saadusta yhtälöstä x .

$$2x^3 - 15 = -x^3 - 6$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \sqrt[3]{3}$$

Lausekkeiden arvot ovat yhtä suuret, kun $x = \sqrt[3]{3}$.

Vastaus

$$x = \sqrt[3]{3}$$

9.9

Lasketaan juurten arvot laskimella.

a) $\sqrt[3]{-125} = -5$, oikea vaihtoehto on 3.

b) $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$, oikea vaihtoehto on 1.

c) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$, oikea vaihtoehto on 4.

d) $2\sqrt[3]{(-5)^3} = -10$, oikea vaihtoehto on 5.

Vastaus

a) 3

b) 1

c) 4

d) 5

9.10

a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = 2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = 2$

Vastaus

a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = 2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = 2$

9.11

Merkitään kuution sivusärmän pituutta kirjaimella x .

Kuution tilavuus on $x^3 = 220 \text{ km}^3$.

Ratkaistaan tästä yhtälöstä x .

$$x^3 = 220$$

$$x = \sqrt[3]{220}$$

$$= 6,0368... \text{ (km)}$$

Kuution sivusärmän pituus on $6,0368... \text{ km} = 6036,8... \text{ m} \approx 6040 \text{ m}$.

Vastaus

6,04 km (eli 6040 m)

9.12

$$\sqrt[3]{3000} = 14,42\dots \text{ ja } \sqrt[3]{5000} = 17,01\dots$$

Näiden lukujen välissä ovat luonnolliset luvut 15, 16 ja 17.

Kysytyt luonnolliset luvut ovat näiden lukujen kuutiot.

$$15^3 = 3375$$

$$\sqrt[3]{3375} = 15 \in \mathbf{N}$$

$$16^3 = 4096$$

$$\sqrt[3]{4096} = 16 \in \mathbf{N}$$

$$17^3 = 4913$$

$$\sqrt[3]{4913} = 17 \in \mathbf{N}$$

Vastaus

3375, 4096 ja 4913

9.13

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad -2x^3 = 128 \qquad | :(-2) \\ \qquad \quad x^3 = -64 \qquad \quad | :3 \\ \qquad \quad x = \sqrt[3]{-64} \\ \qquad \quad = -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad \frac{x^3}{4} + 1 = 17 \qquad | -1 \\ \qquad \quad \frac{x^3}{4} = 16 \qquad \quad | \cdot 4 \\ \qquad \quad x^3 = 64 \\ \qquad \quad x = \sqrt[3]{64} \\ \qquad \quad = 4 \end{array}$$

Vastaus

a) $x = -4$

b) $x = 4$

9.14

Kaalikoin toukkien määrä tulee keskimäärin vuorokaudessa x -kertaiseksi. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

Ke	29
To	$29x$
Pe	$29x \cdot x = 29x^2$
La	$29x^2 \cdot x = 29x^3 = 199$

$$29x^3 = 199$$

$$x = 1,9002\dots$$

$$\approx 1,9$$

Toukkien lukumäärä tuli keskimäärin vuorokaudessa 1,9-kertaiseksi.

Vastaus

1,9-kertaiseksi

9.15

Lasketaan juurten arvot laskimella.

a) $\sqrt[3]{-48} = -2 \cdot \sqrt[3]{6}$, oikea vaihtoehto on 2.

b) $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{24} = -\sqrt[3]{3}$, oikea vaihtoehto on 5.

c) $\sqrt[3]{8 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$, oikea vaihtoehto on 3.

d) $-\sqrt[3]{\sqrt{-16}}$ ei ole määritelty, koska $-16 < 0$ ja negatiivisen luvun neliöjuuri ei ole määritelty. Oikea vaihtoehto on 1.

Vastaus

a) 2

b) 5

c) 3

d) 1

9.16

a) $x^3 = -8$
 $x = \sqrt[3]{-8}$
 $= -2$

b) $(x+1)^3 = -8$
 $x+1 = \sqrt[3]{-8}$
 $x+1 = -2$ $| -1$
 $x = -3$

c) $(x+1)^3 = 12$
 $x+1 = \sqrt[3]{12}$ $| -1$
 $x = \sqrt[3]{12} - 1$

Vastaus

a) $x = -2$

b) $x = -3$

c) $x = \sqrt[3]{12} - 1$

9.17

$$\begin{aligned}\text{a) } (x+2)^3 &= 27 \\ x+2 &= \sqrt[3]{27} \\ x+2 &= 3 && | -2 \\ x &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } 2(3x+6)^3 &= 250 && | :2 \\ (3x+6)^3 &= 125 \\ 3x+6 &= \sqrt[3]{125} \\ 3x+6 &= 5 && | -6 \\ 3x &= -1 && | :3 \\ x &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Vastaus

$$\text{a) } x = 1$$

$$\text{b) } x = -\frac{1}{3}$$

9.18

a) $x^3 - \sqrt{4} = 6$
 $x^3 - 2 = 6 \quad | + 2$
 $x^3 = 8$
 $x = \sqrt[3]{8}$
 $= 2$

b) $2x^3 + \sqrt{49} = 5$
 $2x^3 + 7 = 5 \quad | - 7$
 $2x^3 = -2 \quad | : 2$
 $x^3 = -1$
 $x = \sqrt[3]{-1}$
 $x = -1$

c) $4x^2 - \sqrt[3]{8} = 34$
 $4x^2 - 2 = 34 \quad | + 2$
 $4x^2 = 36 \quad | : 4$
 $x^2 = 9$
 $x = \sqrt{9} = 3 \text{ tai } x = -\sqrt{9} = -3$

d) $2x^2 + \sqrt[3]{27} = 1$

$$2x^2 + 3 = 1 \quad | -3$$

$$2x^2 = -2 \quad | :2$$

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-1}_{< 0}$$

epätosi

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Vastaus

a) $x = 2$

b) $x = -1$

c) $x = -3$ tai $x = 3$

d) ei ratkaisuja

9.19

Pienin positiivinen kuusinumeroinen kokonaisluku on 100 000.

Sen kuutiojuuri on $\sqrt[3]{100\,000} = 46,41\dots$

Annetut ehdot täyttävän luvun kuutiojuuren arvo on oltava 47.

Luvun 47 kuutio on $47^3 = 103\,823$ ja siis $\sqrt[3]{103\,823} = 47$.

Matemaatikon antama hinnan alaraja on 103 823 €.

Vastaus

103 823 €

9.20

a) Auton arvo tulee vuodessa x -kertaiseksi.

Auton arvo

aluksi	28 000 €
1 vuoden kuluttua	$28\,000x$ €
2 vuoden kuluttua	$28\,000x \cdot x$ € = $28\,000x^2$ €
3 vuoden kuluttua	$28\,000x^2 \cdot x$ € = $28\,000x^3$ € = 17 000 €

Ratkaistaan yhtälöstä x .

$$\begin{aligned}28\,000x^3 &= 17\,000 \\x &= 0,8467\dots \\&\approx 0,85\end{aligned}$$

Auton arvo muuttuu keskimäärin vuodessa 0,85-kertaiseksi.

b) Auton arvo

4 vuoden kuluttua	$28\,000x^3 \cdot x$ € = $28\,000x^4$ €
5 vuoden kuluttua	$28\,000x^4 \cdot x$ € = $28\,000x^5$ €

5 vuoden kuluttua auton arvo on

$$28\,000x^5 \text{ €} = 28\,000 \cdot (0,8467\dots)^5 \text{ €} = 12\,189,2274\dots \text{ €} \approx 12\,000 \text{ €}$$

Vastaus

a) 0,85-kertaiseksi

b) 12 000 €

9.21

Merkitään kuution sivusärmän alkuperäistä pituutta kirjaimella a .

Kuution alkuperäinen tilavuus on a^3 .

Kuution sivusärmä pidennetään x -kertaiseksi, jonka jälkeen kuution sivusärmän pituus on xa .

Suurennetun kuution tilavuus on $(xa)^3 = 2 \cdot a^3$.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x .

$$(xa)^3 = 2 \cdot a^3$$

$$x^3 \cdot a^3 = 2 \cdot a^3 \quad | : a^3 (> 0)$$

$$x^3 = 2$$

$$x = \sqrt[3]{2} = 1,2599... \approx 1,26$$

Kuution sivusärmä pitää suurentaa $\sqrt[3]{2}$ -kertaiseksi eli noin 1,26-kertaiseksi.

Vastaus

$\sqrt[3]{2}$ -kertaiseksi eli noin 1,26-kertaiseksi

9.22

Lukujonon edellinen luku kerrotaan aina luvulla x .

Lukujonon kolmas luku	256
Lukujonon neljäs luku	$256x$
Lukujonon viides luku	$256x \cdot x = 256x^2$
Lukujonon kuudes luku	$256x^2 \cdot x = 256x^3 = 16\,384$

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x .

$$256x^3 = 16\,384$$

$$x = 4$$

Lukujonossa edellinen luku kerrotaan aina luvulla 4.

Lukujonon viides luku saadaan jakamalla kuudes luku luvulla 4.

$$\frac{16\,384}{4} = 4096$$

Lukujonon viides luku on 4096.

Vastaus

4096

9.23

Kuutiojuuren määritelmän mukaan $\sqrt[3]{a} = b$, kun $b^3 = a$.

a) Väite: $\sqrt[3]{54} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$

On osoitettava, että $(3 \cdot \sqrt[3]{2})^3 = 54$.

$$\begin{aligned} (3 \cdot \sqrt[3]{2})^3 &= 3^3 \cdot (\sqrt[3]{2})^3 \\ &= 27 \cdot 2 \\ &= 54 \end{aligned}$$

Siis väite on tosi. \square

b) Väite: $\sqrt[3]{-24} = -2 \cdot \sqrt[3]{3}$

On osoitettava, että $(-2 \cdot \sqrt[3]{3})^3 = -24$.

$$\begin{aligned} (-2 \cdot \sqrt[3]{3})^3 &= (-2)^3 \cdot (\sqrt[3]{3})^3 \\ &= -8 \cdot 3 \\ &= -24 \end{aligned}$$

Siis väite on tosi. \square