

## 8.1

a)  $\sqrt{36} = 6$ , koska  $6 \geq 0$  ja  $6^2 = 36$ .

b)  $\sqrt{11}$

Koska  $3^2 = 9$  ja  $4^2 = 16$ , niin  $\sqrt{11}$  on lukujen 3 ja 4 välissä oleva irrationaaliluku.

c) Koska  $12 \geq 0$  ja  $12^2 = 144$ , niin  $\sqrt{144} = 12$  ja tämän vastaluku  $-\sqrt{144} = -12$ .

d)  $\sqrt{-1}$  ei ole määritelty, koska  $-1 < 0$ .

### Vastaus

a)  $\sqrt{36} = 6$

b)  $\sqrt{11}$

c)  $-\sqrt{144} = -12$

d)  $\sqrt{-1}$ , ei määritelty

## 8.2

a)  $\sqrt{9} = 3$ , koska  $3 \geq 0$  ja  $3^2 = 9$ .

b)  $\sqrt{1} = 1$ , koska  $1 \geq 0$  ja  $1^2 = 1$ .

c)  $\sqrt{0} = 0$ , koska  $0 \geq 0$  ja  $0^2 = 0$ .

d)  $\sqrt{100} = 10$ , koska  $10 \geq 0$  ja  $10^2 = 100$ .

### Vastaus

a) 3

b) 1

c) 0

d) 10

### 8.3

a)  $\sqrt{25} = 5$ , koska  $5 \geq 0$  ja  $5^2 = 25$ . Siis  $-\sqrt{25} = -5$ .

b)  $\sqrt{-25}$  ei ole määritelty, koska  $-25 < 0$ .

c)  $\sqrt{16} = 4$ , koska  $4 \geq 0$  ja  $4^2 = 16$ . Siis  $12 - \sqrt{16} = 12 - 4 = 8$ .

#### Vastaus

a)  $-5$

b) ei määritelty

c)  $8$

## 8.4

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & \sqrt{100-36} \\ & = \sqrt{64} \\ & = 8\end{aligned}$$

Lasketaan ensin erotus.

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad & \sqrt{100} - \sqrt{36} \\ & = 10 - 6 \\ & = 4\end{aligned}$$

Lasketaan ensin juuret.

$$\begin{aligned}\text{c)} \quad & (\sqrt{19})^2 \\ & = 19\end{aligned}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$\begin{aligned}\text{d)} \quad & (-\sqrt{49})^2 \\ & = (-7)^2 \\ & = 49\end{aligned}$$

$$\sqrt{49} = 7$$

### Tapa 2:

$$\begin{aligned}& (-\sqrt{49})^2 \\ & = (\sqrt{49})^2 \\ & = 49\end{aligned}$$

$$(-a)^2 = (a)^2$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

### Vastaus

- a) 8
- b) 4
- c) 19
- d) 49

## 8.5

a)  $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

b)  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

c)  $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$

d)  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$

### Vastaus

a)  $\sqrt{9+16} = 5$

b)  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$

c)  $\sqrt{4 \cdot 9} = 6$

d)  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 6$

## 8.6

a)  $x^2 = 25$       Yhtälön ratkaisuna ovat luvun 25  
neliöjuuri ja sen vastaluku.  
 $x = \sqrt{25} = 5$  tai  $x = -\sqrt{25} = -5$

b)  $\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-9}_{< 0}$  Yhtälö on epätosi eli sillä ei ole ratkaisuja.

c)  $2x^2 = 8$       |:2      Ratkaistaan ensin  $x^2$ .  
 $x^2 = 4$       Yhtälön ratkaisuna ovat luvun 4 neliöjuuri  
ja sen vastaluku.  
 $x = \sqrt{4} = 2$  tai  $x = -\sqrt{4} = -2$

d)  $4x^2 - 36 = 0$       |+36      Ratkaistaan ensin  $x^2$ .  
 $4x^2 = 36$       |:4  
 $x^2 = 9$       Yhtälön ratkaisuna ovat luvun 9 neliöjuuri  
ja sen vastaluku.  
 $x = \sqrt{9} = 3$  tai  $x = -\sqrt{9} = -3$

### Vastaus

a)  $x = -5$  tai  $x = 5$

b) ei ratkaisuja

c)  $x = -2$  tai  $x = 2$

d)  $x = -3$  tai  $x = 3$

## 8.7

a)  $x^2 = 1$

$$x = \sqrt{1} = 1 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{1} = -1$$

b)  $x^2 = 0$

$$x = \sqrt{0} = 0 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{0} = -0 = 0$$

$$x = 0$$

c)  $x^2 + 4 = 0$        $|-4$

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-4}_{< 0}$$

epätosi

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

d)  $x^2 + 9 = 25$        $|-9$

$$x^2 = 25 - 9$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{16} = -4$$

### Vastaus

a)  $x = -1$  tai  $x = 1$

b)  $x = 0$

c) ei ratkaisuja

d)  $x = -4$  tai  $x = 4$

## 8.8

Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella  $x$ . Kuution pinta muodostuu kuudesta samanlaisesta neliöstä, joten kuution pinta-ala on  $6x^2$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

a)  $6x^2 = 96$  [Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$x = -4 \text{ tai } x = 4$$

Särmän pituus on positiivinen luku, joten  $x = 4$ .

Kuution särmän pituus on 4 cm.

b)  $6x^2 = 35$  [Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$x = -7,637... \text{ tai } x = 7,637...$$

Särmän pituus on positiivinen luku, joten  $x = 7,637... \approx 7,6$ .

Kuution särmän pituus on noin 7,6 m.

### Vastaus

a) 4 cm

b) 7,6 m

## 8.9

Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella  $x$ . Neliön pinta-ala on  $x^2$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$x^2 = 338\,424$$

$$x = -581,74\dots \text{ tai } x = 581,74\dots$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten  $x \approx 582$  km.

Neliön sivun pituus on 582 km.

**Vastaus**

582 km

## 8.10

Lasketaan laskimella kohtien a, b c ja d neliöjuurten arvot ja verrataan saatuja tuloksia kohdissa 1, 2, 3 ja 4 annettuihin juuren arvoihin.

a)  $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$  (kohta 3)

b)  $\sqrt{\frac{8}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$  (kohta 1)

c)  $\sqrt{\frac{81}{27}} = \sqrt{3}$  (kohta 4)

d)  $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$  (kohta 2)

### Vastaus

- a) 3
- b) 1
- c) 4
- d) 2

### Lisätieto

Pitkän matematiikan opinnoissa juuret opitaan sieventämään neliöjuuren laskusääntöjen avulla seuraavasti.

$$\text{a) } \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{8}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{81}{27}} = \sqrt{\frac{3}{1}} = \sqrt{3}$$

$$\text{d) } \sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{9} \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

## 8.11

a)  $\sqrt{15} = 3,8729... \approx 3,87$

b)  $3 + \sqrt{12} = 6,4641... \approx 6,46$

c)  $\sqrt{5} + \sqrt{8} = 5,0644... \approx 5,06$

d)  $\sqrt{5+8} = 3,6055... \approx 3,61$

### Vastaus

a) 3,87

b) 6,46

c) 5,06

d) 3,61

## 8.12

Merkitään aitauksen sivun pituutta kirjaimella  $x$ . Aitauksen pinta-ala on tällöin  $x^2$ . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$x^2 = 29$$

$$x = -5,3851\dots \text{ tai } x = 5,3851\dots$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten  $x = 5,3851\dots$  m.

Verkkoaitaa tarvitaan neliön kaikille neljälle sivulle, joten verkkoaidan pituus on

$$4x = 4 \cdot 5,3851\dots \text{ m} = 21,5406\dots \text{ m} \approx 21,5 \text{ m} .$$

Verkkoaitaa tarvitaan 21,5 metriä.

### **Vastaus**

21,5 m

## 8.13

- a) Merkitään sokerilain säätämivuotta kirjaimella  $x$ . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$\sqrt{x} = 42$$

$$x = 42^2 = 1764$$

Sokerilaki säädettiin vuonna 1764.

- b) Merkitään kirjaimella  $x$  vuotta, jolloin käytiin Dunbarin taistelu. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$\sqrt{\sqrt{x}} = 6$$

$$\sqrt{x} = 6^2$$

$$x = (6^2)^2 = 36^2 = 1296$$

Dunbarin taistelu käytiin vuonna 1296.

### Vastaus

a) 1764

b) 1296

## 8.14

a)  $\sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

b)  $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{36} = 2 + 3 + 6 = 11$

c)  $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$

d)  $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$

### **Vastaus**

a)  $\sqrt{4+9+36} = 7$

b)  $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{36} = 11$

c)  $\sqrt{9 \cdot 16} = 12$

d)  $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 12$

## 8.15

a)  $x^2 = 49$

$$x = \sqrt{49} = 7 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{49} = -7$$

b)  $5x^2 = 125$                      $| :5$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25} = 5 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{25} = -5$$

c)  $3x^2 + 12 = 0$                      $| -12$

$$3x^2 = -12 \quad | :3$$

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-4}_{< 0}$$

epätosi

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

d)  $2x^2 - 1 = 9$                      $| +1$

$$2x^2 = 10 \quad | :2$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{5}$$

**Vastaus**

a)  $x = -7$  tai  $x = 7$

b)  $x = -5$  tai  $x = 5$

c) ei ratkaisuja

d)  $x = \sqrt{5}$  tai  $x = -\sqrt{5}$

## 8.16

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella  $r$ . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $r$ .

$$\pi r^2 = 263$$

$$r = -9,1496\dots \text{ tai } r = 9,1496\dots$$

Ympyrän säde on positiivinen luku, joten  $r = 9,1496\dots$  m.

Ympyrän halkaisija on

$$2r = 2 \cdot 9,1496\dots \text{ m} = 18,2992\dots \text{ m} \approx 18,3 \text{ m}$$

**Vastaus**

18,3 m

## 8.17

Merkitään kysyttyä lukua kirjaimella  $x$ . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

a)  $\sqrt{x} = 1$

$$x = 1^2 = 1$$

b)  $\sqrt{x} = 9$

$$x = 9^2 = 81$$

c) Luku  $-6$  ei kelpaa minkään luvun neliöjuuren arvoksi, koska  $-6 < 0$ .

d)  $\sqrt{x} = 0$

$$x = 0^2 = 0$$

### Vastaus

a) 1

b) 81

c) ei minkään

d) 0

## 8.18

$$\text{a) } (\sqrt{17})^2 = 17 \qquad (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (-\sqrt{\pi})^2 & \qquad (-a)^2 = a^2 \\ & = (\sqrt{\pi})^2 \qquad (\sqrt{a})^2 = a \\ & = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (\sqrt{1+\sqrt{2}})^2 & \qquad (\sqrt{a})^2 = a \\ & = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

### Vastaus

**a)** 17

**b)**  $\pi$

**c)**  $1 + \sqrt{2}$

## 8.19

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & 10 \cdot \sqrt{9} - 4 \cdot \sqrt{25} + \sqrt{100} \\ & = 10 \cdot 3 - 4 \cdot 5 + 10 \\ & = 30 - 20 + 10 \\ & = 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad & \sqrt{90 - 100 + 19} \\ & = \sqrt{-10 + 19} \\ & = \sqrt{9} \\ & = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c)} \quad & \sqrt{12^2 + 5^2} \\ & = \sqrt{144 + 25} \\ & = \sqrt{169} \\ & = 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d)} \quad & (\sqrt{4} \sqrt{5})^2 = (2 \cdot \sqrt{5})^2 \\ & = 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \\ & = 4 \cdot (\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 \\ & = 20\end{aligned}$$

### Vastaus

- a) 20
- b) 3
- c) 13
- d) 20

## 8.20

$$\text{a) } 7x^2 = 42 \quad | :7$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \sqrt{6} \text{ tai } x = -\sqrt{6}$$

$$\text{b) } 100x^2 - 16 = 0 \quad | +16$$

$$100x^2 = 16 \quad | :100$$

$$x^2 = \frac{16}{100} \stackrel{(4)}{=} \frac{4}{25}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{2^2}{5^2}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} \text{ tai}$$

$$x = -\sqrt{\frac{4}{25}} = -\frac{2}{5}$$

$$\text{c) } 7 - 9x^2 = 8 \quad | -7$$

$$-9x^2 = 1 \quad | :(-9)$$

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = -\underbrace{\frac{1}{9}}_{< 0}$$

epätosi

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja

**d)**  $2x(x+2) = 4x+4$

$$2x^2 + 4x = 4x + 4 \quad | -4x$$

$$2x^2 = 4 \quad | :2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \text{ tai } x = -\sqrt{2}$$

**Vastaus**

**a)**  $x = -\sqrt{6}$  tai  $x = \sqrt{6}$

**b)**  $x = -\frac{2}{5}$  tai  $x = \frac{2}{5}$

**c)** ei ratkaisuja

**d)**  $x = -\sqrt{2}$  tai  $x = \sqrt{2}$

## 8.21

Kaksi lukua ovat toistensa käänteislukuja, mikäli niiden tulo on 1.

Lasketaan annettujen lukujen tulo ja osoitetaan, että se on 1.

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 3} = \frac{(\sqrt{6})^2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \square$$

## 8.22

Koska  $\sqrt{500} = 22,36\dots$  ja  $\sqrt{700} = 26,45\dots$ , niin lukujen 500 ja 700 väliltä löytyy luonnolliset luvut, joiden neliöjuuret ovat 23, 24, 25 ja 26.

Nämä luvut ovat

$$23^2 = 529$$

$$24^2 = 576$$

$$25^2 = 625 \text{ ja}$$

$$26^2 = 676.$$

### **Vastaus**

529, 576, 625 ja 676

## 8.23

Ratkaistaan tehtävä kokeilemalla. Merkitään vuosilukua kirjaimella  $a$  ja vuosiluvun neliöjuuren arvoa kirjaimella  $b$ . Lukujen  $a$  ja  $b$  on oltava luonnollisia lukuja.

Neliöjuuren määritelmän mukaan

$$\sqrt{a} = b, \text{ kun } b \geq 0 \text{ ja } b^2 = a.$$

Netin keskustelupalstalla on ollut mahdollista keskustella 2000-luvulla. Koska  $\sqrt{2000} = 44,7\dots$ , niin tästä saadaan vihje, mitä lukuja kannattaa sijoittaa luvun  $b$  paikalle.

$$b^2 = a$$

$$43^2 = 1849$$

$$44^2 = 1936$$

$$45^2 = 2025$$

$$46^2 = 2116$$

Ainoa sopiva vuosiluku isoäidin isän syntymävuodeksi on 1936 ja isoäidin 60-vuotisjuhlavuodeksi 2025.

Isoäiti on siis syntynyt vuonna  $2025 - 60 = 1965$  ja hänen isänsä vuonna 1936.

### Vastaus

1965 ja 1936

## 8.24

Neliöjuuren määritelmän mukaan

$$\sqrt{a} = b, \text{ kun } 1) b \geq 0 \text{ ja } 2) b^2 = a.$$

a) On osoitettava, että  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

1)  $2\sqrt{3} = 3,46\dots \geq 0$ , joten luku  $2\sqrt{3}$  kelpaa jonkin luvun neliöjuuren arvoksi.

$$2) (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

Siis neliöjuuren määritelmän ehdot 1 ja 2 toteutuvat, joten väite  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  on tosi.

b) On osoitettava, että  $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

1)  $\frac{\sqrt{6}}{3} = 0,816\dots \geq 0$ , joten luku  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  kelpaa jonkin luvun neliöjuuren arvoksi.

$$2) \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{(\sqrt{6})^2}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Siis neliöjuuren määritelmän ehdot 1 ja 2 toteutuvat, joten väite  $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$  on tosi.  $\square$

## 8.25

a)

$$\sqrt{5}) \quad \frac{8}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 8}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{2 \cdot (\sqrt{5})^2} = \frac{8\sqrt{5}^{(2)}}{2 \cdot 5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

b)

$$\sqrt{2}) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c)  $\sqrt{3}) \quad \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 6}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}^{(3)}}{3} = 2\sqrt{3}$