

4.1

$$\begin{cases} -2x + 5y = 1 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että} \\ \text{muuttujan } x \text{ kertoimiksi saadaan vastaluvut.} \end{array}$$
$$+ \begin{cases} -6x + 15y = 3 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 17y = 17 \\ y = 1 \end{array} \quad \left| :17 \right. \quad \text{Ratkaistaan } y.$$

Sijoitetaan $y = 1$ ylempään alkuperäiseen yhtälöön ja ratkaistaan x .

$$\begin{array}{r} -2x + 5y = 1 \\ -2x + 5 \cdot 1 = 1 \\ -2x + 5 = 1 \\ -2x = -4 \\ x = 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Sijoitetaan } y = 1. \\ \\ -5 \\ \cdot (-2) \end{array} \right.$$

Vastaus

$$x = 2 \text{ ja } y = 1$$

4.2

$$\begin{cases} 12x - 5y = -1 \\ 8x + 2y = 26 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{array}$$

Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että muuttujan x kertoimiksi saadaan vastaluvut.

$$+ \begin{cases} 24x - 10y = -2 \\ -24x - 6y = -78 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöiden samanmuotoiset termit yhteen.

$$\begin{array}{r} -16y = -80 \\ y = 5 \end{array} \quad | :(-16) \text{ Ratkaistaan } y.$$

Sijoitetaan $y = 5$ alempaan alkuperäiseen yhtälöön ja ratkaistaan x .

$$\begin{array}{r} 8x + 2y = 26 \\ 8x + 2 \cdot 5 = 26 \\ 8x + 10 = 26 \\ 8x = 16 \\ x = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \text{Sijoitetaan } y = 5. \\ | -10 \\ | \cdot 8 \end{array}$$

Vastaus

$$x = 2 \text{ ja } y = 5$$

4.3

$$\begin{cases} -15x + 3y = -6 \\ 13x + 4y = -8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot (-3) \end{array}$$

Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että muuttujan y kertoimiksi saadaan vastaluvut.

$$+ \begin{cases} -60x + 12y = -24 \\ -39x - 12y = 24 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöiden samanmuotoiset termit yhteen.

$$\begin{array}{r} -99x \quad = 0 \\ \quad \quad \quad x = 0 \end{array} \quad | :(-99) \text{ Ratkaistaan } x.$$

Sijoitetaan $x = 0$ alempaan alkuperäiseen yhtälöön ja ratkaistaan y .

$$\begin{array}{r} 13x + 4y = -8 \\ 13 \cdot 0 + 4y = -8 \\ \quad 4y = -8 \\ \quad \quad y = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \text{Sijoitetaan } x = 0. \\ | : 4 \end{array}$$

Vastaus

$$x = 0 \text{ ja } y = -2$$

4.4

$$\begin{cases} 3x + 3y = 12 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = x - 2$ ylempään yhtälöön y :n paikalle.

$$3x + 3 \cdot (x - 2) = 12$$

$$3x + 3x - 6 = 12 \quad | +6$$

$$6x = 18 \quad | :6 \quad \text{Ratkaistaan } x.$$

$$x = 3$$

Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöön $y = x - 2$ ja lasketaan y .

$$y = x - 2 \quad | \text{Sijoitetaan } x = 3.$$

$$y = 3 - 2$$

$$y = 1$$

Vastaus

$$x = 3 \text{ ja } y = 1$$

4.5

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2 = 0 \\ 2y - x - 6 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä x .

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2 = 0 \\ 2y - 6 = x \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 2y - 6$ ylempään yhtälöön x :n paikalle ja ratkaistaan y .

$$4 \cdot (2y - 6) + 5y - 2 = 0$$

$$8y - 24 + 5y - 2 = 0 \quad | +24 + 2$$

$$13y = 26 \quad | :13$$

$$y = 2$$

Sijoitetaan $y = 2$ yhtälöön $x = 2y - 6$ ja lasketaan x .

$$x = 2y - 6 \quad | \text{Sijoitetaan } y = 2.$$

$$x = 2 \cdot 2 - 6$$

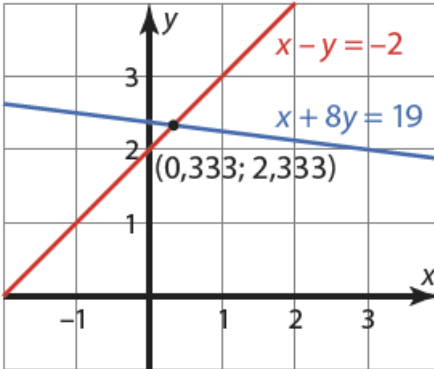
$$x = -2$$

Vastaus

$$x = -2 \text{ ja } y = 2$$

4.6

- a) Piirretään yhtälöiden $x + 8y = 19$ ja $x - y = -2$ kuvaajat geometriaohjelmalla ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.



$$x \approx 0,3 \text{ ja } y \approx 2,3$$

- b)
$$\begin{cases} x + 8y = 19 \\ x - y = -2 \end{cases}$$
 Ratkaistaan CAS-laskimella.
- $$x = \frac{1}{3} \text{ ja } y = \frac{7}{3}$$

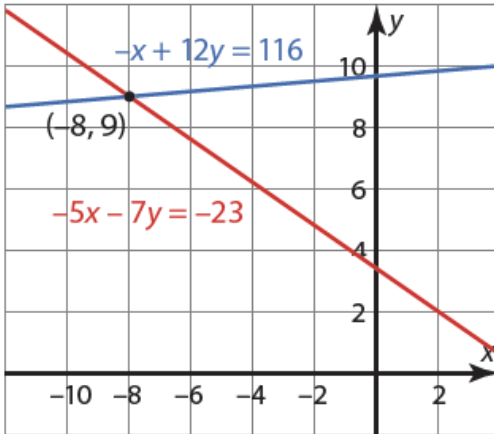
Vastaus

a) $x \approx 0,3$ ja $y \approx 2,3$

b) $x = \frac{1}{3}$ ja $y = \frac{7}{3}$

4.7

- a) Piirretään yhtälöiden $-x + 12y = 116$ ja $-5x - 7y = -23$ kuvaajat geometriaohjelmalla ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.



$$x \approx -8 \text{ ja } y \approx 9$$

- b)
$$\begin{cases} -x + 12y = 116 \\ -5x - 7y = -23 \end{cases}$$
 Ratkaistaan CAS-laskimella.
$$x = -8 \text{ ja } y = 9$$

Vastaus

- a) $x \approx -8$ ja $y \approx 9$
b) $x = -8$ ja $y = 9$

4.8

Taulukoidaan tehtävässä annetut tiedot.

	lukumäärä (kpl)	arvo (€)
10 € seteleitä	x	$10x$
20 € seteleitä	y	$20y$
yhteensä	$x + y = 13$	$10x + 20y = 140$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan x ja y .

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 10x + 20y = 140 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 12 \text{ ja } y = 1$$

Lompakossa on 12 kpl 10 €:n seteliä ja 1 kpl 20 €:n seteli.

Vastaus

12 kpl 10 €:n seteliä ja 1 kpl 20 €:n seteli

4.9

Taulukoidaan tehtävässä annetut tiedot.

	työaika (h)	palkka (€)
Onni	x	$12x$
Pinja	y	$8y$
yhteensä	$x + y = 7$	$12x + 8y = 72$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan x ja y .

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 12x + 8y = 72 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 4 \text{ ja } y = 3$$

Onni hoiti lapsia 4 tuntia ja Pinja 3 tuntia

Vastaus

Onni 4 tuntia ja Pinja 3 tuntia

4.10

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -3x - 4y = 45 \\ -2x - 7y = 69 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{array} \right. \\ + \left\{ \begin{array}{l} -6x - 8y = 90 \\ 6x + 21y = -207 \end{array} \right. \\ \hline 13y = -117 \quad | :13 \\ y = -9 \end{array}$$

Sijoitetaan $y = -9$ alempaan yhtälöön ja ratkaistaan x .

$$\begin{array}{l} -2x - 7y = 69 \quad | \text{Sijoitetaan } y = -9. \\ -2x - 7 \cdot (-9) = 69 \\ -2x + 63 = 69 \quad | -63 \\ -2x = 6 \quad | \cdot (-2) \\ x = -3 \end{array}$$

Vastaus

$$x = 3 \text{ ja } y = 9$$

4.11

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -3x - 4y = 0 \\ x - 2y = 10 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 3 \end{array} \right. \\ + \left\{ \begin{array}{l} -3x - 4y = 0 \\ 3x - 6y = 30 \end{array} \right. \\ \hline \quad -10y = 30 \quad | :(-10) \\ \quad \quad y = -3 \end{array}$$

Sijoitetaan $y = -3$ alempaan yhtälöön ja ratkaistaan x .

$$\begin{array}{l} x - 2y = 10 \quad | \text{Sijoitetaan } y = -3. \\ x - 2 \cdot (-3) = 10 \\ x + 6 = 10 \quad | -6 \\ \quad x = 4 \end{array}$$

Vastaus

$$x = 4 \text{ ja } y = -3$$

4.12

Merkitään kahvien lukumäärää kirjaimella x ja leivosten lukumäärää kirjaimella y . Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan x ja y .

$$\begin{cases} 5x + 5y = 27,50 \text{ (€)} \\ 8x + 10y = 50,80 \text{ (€)} \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 2,10 \text{ (€)} \text{ ja } y = 3,40 \text{ (€)}$$

Kahvin hinta on 2,10 € ja leivoksen hinta 3,40 €.

Vastaus

kahvin 2,10 € ja leivos 3,40 €

4.13

Viinitalo haluaa valmistaa 2400 litraa samppanjaa, jossa on yhtä paljon Chardonnay-rypälettä ja Pinot Meunier -rypälettä. Tällöin sekä Chardonnay-rypälettä että Pinot Meunier -rypälettä on samppanjassa 1200 litraa.

Merkitään tankista 1 otettavaa viinimäärää kirjaimella x ja tankista 2 otettavaa viinimäärää kirjaimella y .

Tankissa 1 oleva viini on valmistettu kokonaan Chardonnay-rypäleestä. Chardonnay-rypäleen määrä on tällöin x litraa.

Tankin 2 viinistä $\frac{1}{4}$ on valmistettu Chardonnay-rypäleestä loput eli $\frac{3}{4}$

Pinot Meunier -rypäleestä. Chardonnay-rypäleen määrä on tällöin $\frac{1}{4}y$

litraa ja Pinot Meunier -rypäleen määrä $\frac{3}{4}y$ litraa.

Chardonnay-rypäleen määrä on yhteensä 1200 litraa eli $x + \frac{1}{4}y = 1200$.

Pinot Meunier -rypäleen määrä on yhteensä 1200 litraa eli $\frac{3}{4}y = 1200$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 1200 \\ \frac{3}{4}y = 1200 \end{cases}$$

$$x = 800 \text{ ja } y = 1600$$

Tankista 1 on otettava 800 litraa viiniä ja tankista 2 on otettava 1600 litraa viiniä.

Vastaus

800 litraa tankista 1 ja 1600 litraa tankista 2

4.14

Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä muuttujan y lauseke ja sijoitetaan se alempaan yhtälöön, jolloin saadaan ratkaistua muuttuja x .

$$\begin{cases} 2x - y = 11 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | -2x \\ \text{Ratkaistaan ylemmästä} \\ \text{yhtälöstä muuttuja } y. \end{array}$$

$$\begin{cases} -y = 11 - 2x \\ 3x - 2y = 17 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} y = -11 + 2x \\ 3x - 2y = 17 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sijoitetaan } y = -11 + 2x \text{ alempaan} \\ \text{yhtälöön muuttujan } y \text{ paikalle.} \end{array}$$

$$3x - 2 \cdot (-11 + 2x) = 17$$

$$3x + 22 - 4x = 17 \quad | -22$$

$$-x = -5 \quad | \cdot (-1)$$

$$x = 5$$

Ratkaistaan muuttujan y arvo sijoittamalla saatu ratkaisu $x = 5$ yhtälöön $y = -11 + 2x$.

$$y = -11 + 2x \quad \text{Sijoitetaan } x = 5.$$

$$= -11 + 2 \cdot 5 = -1$$

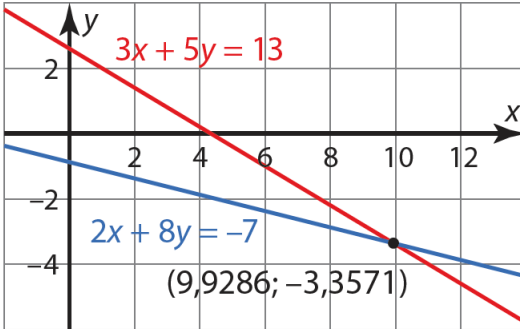
Yhtälöparin ratkaisu on $x = 5$ ja $y = -1$

Vastaus

$$x = 5 \text{ ja } y = -1$$

4.15

a) Piirretään yhtälöiden $2x + 8y = -7$ ja $3x + 5y = 13$ kuvaajat geometriaohjelmalla ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.



Yhtälöparin ratkaisu on $x \approx 9,93$ ja $y \approx -3,36$.

b) Ratkaistaan yhtälöpari CAS-laskimella.

$$\begin{cases} 2x + 8y = -7 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$x = \frac{139}{14} \text{ ja } y = -\frac{47}{14}$$

Vastaus

a) $x \approx 9,93$ ja $y \approx -3,36$ b) $x = \frac{139}{14}$ ja $y = -\frac{47}{14}$

4.16

Merkitään aikuisten lippujen määrää kirjaimella x .

Aikuisten lippuja myytiin x kappaletta
ja niiden myynnistä saatiin yhteensä $14x$ euroa. 14 € per lippu

Merkitään lasten lippujen määrää kirjaimella y .

Lasten lippuja myytiin y kappaletta
ja niiden myynnistä saatiin yhteensä $8y$ euroa. 8 € per lippu

Lippuja myytiin yhteensä 211 kappaletta eli $x + y = 211$.

Lipputulot olivat yhteensä 2516 euroa eli $14x + 8y = 2516$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x + y = 211 & \text{Ratkaistaan yhtälöpari} \\ 14x + 8y = 2516 & \text{CAS-laskimella.} \end{cases}$$

$x = 138$ ja $y = 73$

Aikuisten lippuja myytiin 138 kappaletta ja lasten lippuja 73 kappaletta.

Vastaus

138 aikuisten lippua ja 73 lastenlippua

4.17

Poistetaan yhtälöparista muuttuja y , jolloin saadaan ratkaistua muuttuja x .

$$\begin{cases} \frac{2x+2y}{2} = 11 & | \cdot 2 \\ \frac{3x-y}{3} = 3 & | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y = 22 \\ 3x-y = 9 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että muuttujan y kertoimiksi saadaan vastaluvut.

$$+ \begin{cases} 2x+2y = 22 \\ 6x-2y = 18 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöiden samanmuotoiset termit yhteen.

$$\begin{array}{r} 8x \qquad \qquad = 40 \\ \hline x = 5 \end{array} \quad | : 8$$

Ratkaistaan muuttujan y arvo sijoittamalla saatu ratkaisu $x = 5$ jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä.

$$\frac{2x+2y}{2} = 11 \quad \text{Sijoitetaan } x = 5.$$

$$\frac{2 \cdot 5 + 2y}{2} = 11 \quad | \cdot 2$$

$$10 + 2y = 22 \quad | -10$$

$$2y = 12 \quad | : 2$$

$$y = 6$$

Yhtälöparin ratkaisu on $x = 5$ ja $y = 6$

Vastaus

$$x = 5 \text{ ja } y = 6$$

4.18

Poistetaan yhtälöparista muuttuja x , jolloin saadaan ratkaistua muuttuja y .

$$\begin{cases} -\frac{x}{3} + \frac{2y}{5} = \frac{7}{15} & | \cdot 15 \\ \frac{2x}{7} + \frac{3y}{4} = \frac{25}{14} & | \cdot 28 \\ -5x + 6y = 7 & | \cdot 8 \\ 8x + 21y = 50 & | \cdot 5 \end{cases}$$

Poistetaan nimittäjät kertomalla yhtälöt sopivilla luvuilla.

Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että muuttujan x kertoimiksi saadaan vastaluvut

$$\begin{cases} -40x + 48y = 56 \\ 40x + 105y = 250 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöiden samanmuotoiset termit yhteen.

$$\begin{array}{r} 153y = 306 \\ y = 2 \end{array} \quad | : 153$$

Ratkaistaan muuttujan x arvo sijoittamalla saatu ratkaisu $y = 2$ jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä.

$$-\frac{x}{3} + \frac{2y}{5} = \frac{7}{15}$$

Sijoitetaan $y = 2$.

$$\begin{array}{r} -\frac{x}{3} + \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{7}{15} \\ -5x + 12 = 7 \\ -5x = -5 \\ x = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot 15 \\ | -12 \\ | : (-5) \end{array}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $x = 1$ ja $y = 2$

Vastaus

$x = 1$ ja $y = 2$

4.19

Ratkaistaan yhtälöpari CAS-laskimella.

$$\begin{cases} 0,02x + 0,8y = 192 \\ -0,5x + 0,4y = -516 \end{cases}$$

$x = 1200$ ja $y = 210$

Oikea ratkaisu on vaihtoehto 3.

Vastaus

3

4.20

Merkitään yhtiövastikkeen alkuperäistä määrää kirjaimella x .

Kun yhtiövastike kasvaa 5 %, on se $100 \% + 5 \% = 105 \%$ alkuperäisestä yhtiövastikkeesta. Yhtiövastike tulee siis 1,05-kertaiseksi. Yhtiövastikkeen uusi määrä on $1,05x$ euroa.

Merkitään vesimaksun alkuperäistä määrää kirjaimella y .

Kun vesimaksu nousee 2 €, vesimaksun uusi määrä on $y + 2$ euroa.

Yhtiövastikkeen ja vesimaksun alkuperäinen yhteismäärä on 340 € eli $x + y = 340$.

Yhtiövastikkeen ja vesimaksun uusi yhteismäärä on 358 € eli $1,05x + y + 2 = 358$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x + y = 340 & \text{Ratkaistaan yhtälöpari} \\ 1,05x + y + 2 = 358 & \text{CAS-laskimella.} \end{cases}$$

$$x = 320 \text{ ja } y = 20$$

Yhtiövastikkeen alkuperäinen määrä on 320 € ja vesimaksun 20 €.

Yhtiövastikkeen uusi määrä on $1,05 \cdot 320 \text{ €} = 336 \text{ €}$ ja vesimaksun $20 \text{ €} + 2 \text{ €} = 22 \text{ €}$.

Vastaus

yhtiövastike 336 € ja vesimaksu 22 €

4.21

Kun muuttuja x saa arvon 2, saa lauseke $ax + b$ arvon 3 eli

$$a \cdot 2 + b = 3$$

$$2a + b = 3.$$

Kun muuttuja x saa arvon 3, saa lauseke $ax + b$ arvon 9 eli

$$a \cdot 3 + b = 9$$

$$3a + b = 9.$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 3a + b = 9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Ratkaistaan yhtälöpari} \\ \text{CAS-laskimella.} \end{array}$$

$$a = 6 \text{ ja } b = -9$$

Vastaus

$$a = 6 \text{ ja } b = -9$$

4.22

Merkitään ilmanopeutta kirjaimella x ja tuulen nopeutta kirjaimella y .

Lentokoneen maanopeus on tuulen verran suurempi myötätuulessa kuin ilmanopeus. Maanopeus myötätuulessa on $x + y$.

Lentokoneen maanopeus on tuulen verran pienempi vastatuulessa kuin ilmanopeus. Maanopeus vastatuulessa on $x - y$.

Lentokone kulkee vakionopeudella vastatuulessa 2,0 tunnin aikana 1140 km. Lentokoneen maanopeus on tällöin $\frac{1140 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 570 \text{ km/h}$ eli $x - y = 570$.

Toinen samalla ilmanopeudella liikkuva lentokone kulkee myötätuulessa 1,5 tunnin aikana 945 km. Lentokoneen maanopeus on tällöin $\frac{945 \text{ km}}{1.5 \text{ h}} = 630 \text{ km/h}$ eli $x + y = 630$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x - y = 570 & \text{Ratkaistaan yhtälöpari} \\ x + y = 630 & \text{CAS-laskimella.} \end{cases}$$

$$x = 600 \text{ ja } y = 30$$

Lentokoneiden ilmanopeus on 600 km/h ja tuulen nopeus 30 km/h.

Vastaus

ilmanopeus 600 km/h ja tuulen nopeus 30 km/h

4.23

Merkitään 14 karaatin kullan määrää kirjaimella x ja 9 karaatin kullan määrää kirjaimella y .

Korussa on 14 karaatin kultaa x grammaa ja 9 karaatin kultaa y grammaa. Koru painaa 20 grammaa eli $x + y = 20$.

14 karaatin kullassa puhdasta kultaa on $\frac{14}{24}x$ grammaa ja 9 karaatin kullassa $\frac{9}{24}y$ grammaa. Korun kultapitoisuus on 11 karaattia. Korussa puhdasta kultaa on $\frac{11}{24} \cdot 20$ grammaa eli $\frac{14}{24}x + \frac{9}{24}y = \frac{11}{24} \cdot 20$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x + y = 20 & \text{Ratkaistaan yhtälöpari} \\ \frac{14}{24}x + \frac{9}{24}y = \frac{11}{24} \cdot 20 & \text{CAS-laskimella.} \end{cases}$$

$x = 8$ ja $y = 12$

Kultaseppä tarvitsee 8 grammaa 14 karaatin kultaa ja 12 grammaa 9 karaatin kultaa.

Vastaus

14 karaatin kultaa 8 g ja 9 karaatin kultaa 12 g