16.1

Merkitään kirjaimella x aikaa, kun keskinopeus on 35 km/h.

Nopeus (km/h)	**Aika (min)**
4,9	47
35	x

Tiettyyn matkaan kulunut aika on kääntäen verrannollinen käytettyyn nopeuteen.
Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{4,9}{35} = \frac{x}{47}$$

Nopeuksien suhde on aikojen suhteen käänteisluku.

$$35x = 4,9 \cdot 47$$

Poistetaan nimittäjät ristiin kertomalla.

$$35x = 230,3 \quad |:35$$

$$x = 6,58 \approx 6,6\,(\text{min})$$

Matka olisi kestänyt 6,6 minuuttia.

Vastaus

6,6 minuuttia

16.2

Merkitään kirjaimella x aikaa, kun maalareita on 9.

Maalareita (henkilöitä)	**Aika (h)**
9	x
12	14

Maalareiden lukumäärä on kääntäen verrannollinen käytettyyn aikaan.
Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\begin{aligned}\frac{9}{12} &= \frac{14}{x}\\ 9x &= 12\cdot 14\\ 9x &= 168 \qquad |:9\\ x &= 18{,}66\ldots \approx 19\,(\mathrm{h})\end{aligned}$$

Maalaamiseen kuluu 19 tuntia.

Vastaus

19 tuntia

16.3

a)

A	***B***
1	4
2	$\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$
$2 \cdot 2 = 4$	1

b)

A	***B***
1	$10 \cdot 20 = 200$
10	20
50	$\frac{1}{5} \cdot 20 = 4$

16.4

Merkitään kirjaimella x etäisyyttä, kun valaistusvoimakkuus on 750 luksia.

Valaistusvoimakkuus (lx)	**Etäisyyden neliö ($\mathbf{m^2}$)**
300	$3{,}2^2$
750	x^2

Verrannolliset suureet ovat valaistusvoimakkuus ja etäisyyden neliö.

Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön.
Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{300}{750} = \frac{x^2}{3{,}2^2}$$

$$x = -2{,}023\ldots \text{ tai } x = 2{,}023\ldots$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

Sovellustehtävässä ratkaisusta riittää likiarvot.

Etäisyys on positiivinen luku $x = 2{,}023\ldots$ m $\approx 2{,}0$ m.

Vastaus

2,0 m

16.5

Merkitään kirjaimella x etäisyyttä maapallon keskipisteestä, kun matkalaukku painaa $7{,}78$ kg.

Paino (kg)	**Etäisyyden neliö ($\mathbf{km^2}$)**
7,80	6370^2
7,78	x^2

Verrannolliset suureet ovat paino ja etäisyyden neliö.

Matkalaukun paino on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä lasketun etäisyyden neliöön. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{7{,}80}{7{,}78} = \frac{x^2}{6370^2}$$

$$x = -6378{,}182... \text{ tai } x = 6378{,}182...$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

Sovellustehtävässä ratkaisusta riittää likiarvot.

Etäisyys on positiivinen luku $x = 6378{,}182\ldots$ km.

Lentokoneen lentokorkeus on $6378{,}182\ldots \text{ km} - 6370 \text{ km} = 8{,}182\ldots \text{ km} \approx 8{,}2 \text{ km}$.

Vastaus

8,2 km

16.6

a) Kulunut aika y ja työntekijöiden lukumäärä x ovat kääntäen verrannolliset, joten niiden välisen riippuvuuden ilmaisee yhtälö $y=\frac{k}{x}$, missä k on verrannollisuuskerroin. Ratkaistaan verrannollisuuskerroin k.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{k}{x} \\
90 &= \frac{k}{7} \quad \Big| \cdot 20 \\
k &= 630
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $y = 90$ (h) ja $x = 7$ (henkilöä).

Yhtälön voi ratkaista myös CAS-laskimella.

Ajan y riippuvuuden nopeudesta x ilmaisee yhtälö $y=\frac{630}{x}$.

b) Verrannollisuuskerroin on $k = 90$ h · 7 henkilöä = 630 henkilötyötuntia. Verrannollisuuskerroin ilmaisee kunnostusurakan kokonaiskeston eli henkilötyötuntien lukumäärän.

c) Ratkaistaan työntekijöiden lukumäärä x (henkilöä), kun aika $y = 60$ h.

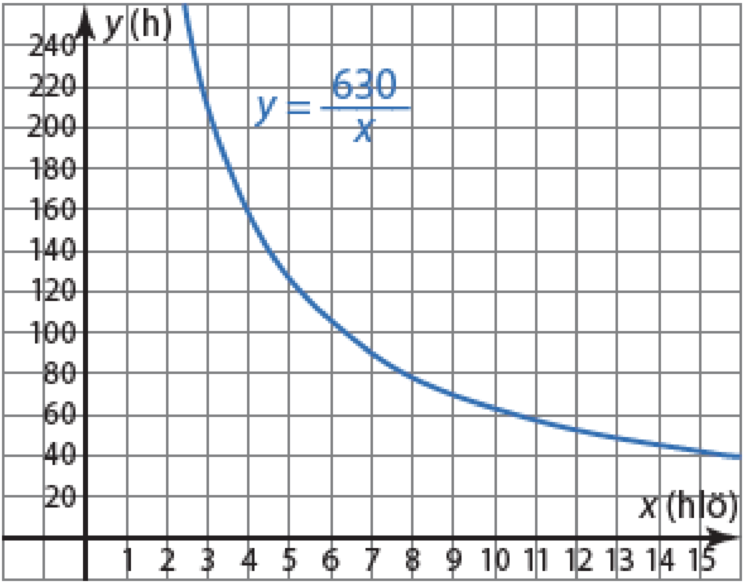
$$
\begin{aligned}
y &= \frac{630}{x} \\
60 &= \frac{630}{x} \\
x &= 10{,}5 \approx 11 \text{(henkilöä)}
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $y = 60$.

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

60 tunnin urakkaan tarvitaan 11 työntekijää.

d) Piirretään riippuvuutta esittävän yhtälön $y = \dfrac{630}{x}$ kuvaaja.



Vastaus

a) $y = \dfrac{630}{x}$

b) Verrannollisuuskerroin ilmaisee henkilötyötuntien lukumäärän.

c) 11 työntekijää

16.7

a) Kulunut aika y (h) ja nopeus x (km/h) ovat kääntäen verrannolliset, joten niiden välisen riippuvuuden ilmaisee yhtälö $y=\frac{k}{x}$, missä k on verrannollisuuskerroin. Ratkaistaan verrannollisuuskerroin k.

$$\begin{aligned} y &= \frac{k}{x} \\ 3{,}0 &= \frac{k}{20} \qquad |\cdot 20 \\ k &= 60 \end{aligned}$$

Ajan y riippuvuuden nopeudesta x ilmaisee yhtälö $y=\frac{60}{x}$.

b) Verrannollisuuskerroin on k = 3,0 h · 20 km/h = 60 km. Kertoimen mukaan matkaa kesämökille on siis 60 km. Verrannollisuuskerroin ilmaisee vakiomatkan pituuden.

c) Ratkaistaan nopeus x (km/h), kun aika y = 1h 15 min = 1 h + 0,25 h = 1,25 h.

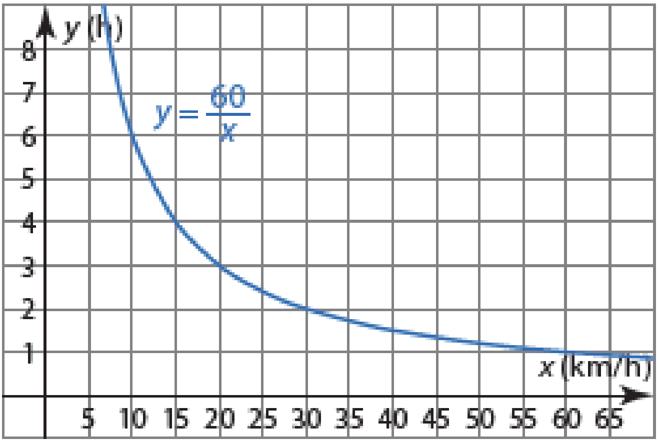
$$\begin{aligned} y &= \frac{60}{x} \\ 1{,}25 &= \frac{60}{x} \\ x &= 48\,(\text{km/h}) \end{aligned}$$

Sijoitetaan y = 1,25 (h).

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

Mökkimatkaan kuluu 1,25 tuntia, kun nopeus on 48 km/h.

d) Piirretään riippuvuutta esittävän yhtälön $y = \dfrac{60}{x}$ kuvaaja.



Vastaus

a) $y = \dfrac{630}{x}$

b) Verrannollisuuskerroin ilmaisee vakiomatkan pituuden (60 km).

c) 48 km/h

16.8

Laattojen lukumäärä on kääntäen verrannollinen laattojen neliöhintaan, kun käytettävissä on vakiorahamäärä.

Merkitään kirjaimella x laattojen lukumäärää, kun laatan hinta on 25,30 €/m^2.

Laattojen lukumäärä (kpl)	**Hinta (€/m^2)**
12	42,70
x	25,30

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{12}{x} = \frac{25,30}{42,70}$$

$$x = 20,25... \approx 20 \text{(kpl)}$$

Laattoja voidaan ostaa enintään 20 kpl.

Vastaus

20 laattaa

16.9

Äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen äänilähteen etäisyyden neliöön.

a) Merkitään kirjaimella x intensiteettiä, kun etäisyys äänilähteestä on 10 m.

Intensiteetti (W/m^2)	**Etäisyyden neliö (m^2)**
10^{-5}	$1{,}2^2$
x	10^2

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{10^{-5}}{x} = \frac{10^2}{1{,}2^2}$$

$$x = 1{,}44 \cdot 10^{-7} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-7}$$

Intensiteetti on $x \approx 1{,}4 \cdot 10^{-7}$ W/m².

b) Merkitään kirjaimella x etäisyyttä, kun intensiteetti on puolet alkuperäisestä eli $\frac{10^{-5}}{2} = 5 \cdot 10^{-6}$ (W/m²).

Intensiteetti (W/m^2)	**Etäisyyden neliö (m^2)**
10^{-5}	$1{,}2^2$
$5 \cdot 10^{-6}$	x^2

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{10^{-5}}{5 \cdot 10^{-6}} = \frac{x^2}{1{,}2^2}$$

$$x = -1{,}697... \text{ tai } x = 1{,}697...$$

Etäisyys on positiivinen luku $x = 1{,}697\ldots$ m $\approx 1{,}7$ m.

Vastaus

a) $1{,}4 \cdot 10^{-7}$ W/m² **b)** 1,7 m

16.10

a) Suoraan verrannollisten suureiden y ja x riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = k \cdot x$, missä k on verrannollisuuskerroin. Sijoitetaan yhtälöön $y = 3$ ja $x = 9$ ja ratkaistaan verrannollisuuskerroin k.

$$y = k \cdot x$$
$$3 = k \cdot 9$$
$$k = \frac{1}{3}$$

Yhtälö, joka kuvaa suureen y riippuvuutta suureesta x on siis $y = \frac{1}{3}x$.

b) Kääntäen verrannollisten suureiden y ja x riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = \frac{k}{x}$, missä k on verrannollisuuskerroin. Sijoitetaan yhtälöön $y = 3$ ja $x = 9$ ja ratkaistaan verrannollisuuskerroin k.

$$y = \frac{k}{x}$$
$$3 = \frac{k}{9}$$
$$k = 27$$

Yhtälö, joka kuvaa suureen y riippuvuutta suureesta x on siis $y = \frac{27}{x}$.

Vastaus

a) $y = \frac{1}{3}x$

b) $y = \frac{27}{x}$

16.11

Talkoisiin osallistuvien henkilöiden lukumäärä on kääntäen verrannollinen talkoiden kokonaiskestoon eli henkilötyötuntimäärään.

Merkitään kirjaimella x henkilöiden lukumäärää, kun talkoot kestivät 8 h. Kun henkilöiden lukumäärä kasvaa viidellä, henkilöitä on $x + 5$ (kpl). Tällöin aikaa kului kaksi tuntia vähemmän eli 8 h – 2 h = 6 h.

Talkootyöntekijät (henkilöitä)	**Aika (h)**
x	8
$x + 5$	6

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{x}{x+5} = \frac{6}{8}$$
$$x = 15$$

Tämän vuoden takoissa henkilöitä (osallistujia) oli $x + 5 = 15 + 5 = 20$ (osallistujaa).

Vastaus

20 osallistujaa

16.12

Nopeus on kääntäen verrannollinen kuluvaan aikaan, kun matka on vakio. Sama matka ajetaan talvella ja kesällä sallituilla maksiminopeuksilla.

Merkitään kirjaimella x talvinopeusrajoitusta, kun matkaan kuluu aikaa 15 min. Kun kesänopeusrajoitus on 20 km/h korkeampi kuin talvinopeusrajoitus, kesänopeusrajoitus on $x + 20$ (km/h). Tällöin aikaa kului 3 min vähemmän eli 15 min – 3 min = 12 min.

Nopeusrajoitus (km/h)	**Aika (min)**
x	15
$x + 20$	12

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{x}{x+20} = \frac{12}{15}$$
$$x = 80$$

Talvinopeusrajoitus on $x = 80$ (km/h).

Vastaus

80 km/h

16.13

Etäisyyslisä, joka sisältyy asunnon vuokraan, on kääntäen verrannollinen etäisyyteen lähimmältä metroasemalta. Mitä kauempana asunto on metroasemasta, sitä pienempi etäisyyslisä siis on.

a) Asunnon vuokra on 22 €/ m^2, kun etäisyys metroasemasta on 1,4 km. Asunnon vuokra on 19 €/ m^2, kun etäisyys metroasemasta on 1,4 km + 1 km = 2,4 km. Metroasemaa lähempänä olevan asunnon etäisyyslisä on siis 22 € - 19 € = 3 € suurempi kuin kauempana olevan, samanlaisen asunnon etäisyyslisä.

Merkitään kauempana sijaitsevan asunnon etäisyyslisää kirjaimella x, jolloin lähempänä metroasemaa sijaitsevan asunnon etäisyyslisä on siis $x + 3$.

Etäisyyslisä (€)	**Etäisyys metroasemalta (km)**
$x + 3$	1,4
x	2,4

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{x+3}{x} = \frac{2,4}{1,4}$$
$$x = 4,20\,(€)$$

2,4 km etäisyydellä olevan asunnon etäisyyslisä on x = 4,20 €.
1,4 km etäisyydellä olevan asunnon etäisyyslisä on $x + 3$ = 4,20 € + 3 € = 7,20 €.

b) Merkitään 500 m = 0,5 km etäisyydellä olevan asunnon etäisyyslisää kirjaimella y. Käytetään apuna tietoa, että 2,4 km etäisyydellä olevan, samanlaisen asunnon etäisyyslisä on 4,20 €.

Etäisyyslisä (€)	**Etäisyys metroasemalta (km)**
4,20	2,4
x	0,5

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan y

$$\frac{4,20}{x} = \frac{0,5}{2,4}$$
$$x = 20,16\,(€)$$

500 m etäisyydellä olevan asunnon etäisyyslisä on siis 20,16 €.

Kysytty kokonaisvuokra saadaan, kun selvitetään ensin, mikä on asunnon kunnon ja varustuksen perusteella määräytyvä ns. perusvuokra.

Koska 2,4 km etäisyydellä olevan asunnon etäisyyslisä oli 4,20 € ja asunnon kokonaisvuokra oli 19 €/m^2, asunnon perusvuokran määräksi jää
19 – 4,20 = 14,80 (€).

Asunnon ovat perusvuokraltaan samanarvoisia, joten 500 m etäisyydellä olevan asunnon perusvuokra on myös 14,80 €. Tähän lisätään asunnon etäisyyslisä eli 20,16 €, jolloin kokonaisvuokraksi saadaan 14,80 € + 20,16 € = 34,96 €.

Vastaus

a) 2,4 km etäisyydellä olevan asunnon etäisyyslisä on 4,20 €.
1,4 km etäisyydellä olevan asunnon etäisyyslisä on 7,20 €.

b) 34,96 €

16.14

Äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen äänilähteen etäisyyden neliöön.

Merkitään kirjaimella x etäisyyttä, kun intensiteetti on 10^{-6} W/m^2.

Intensiteetti (W/m^2)	**Etäisyyden neliö (m^2)**
$1,23 \cdot 10^{-4}$	$11,3^2$
10^{-6}	x^2

Verrannolliset suureet ovat intensiteetti ja etäisyyden neliö.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{1,23 \cdot 10^{-4}}{10^{-6}} = \frac{x^2}{11,3^2}$$

$$x = -125,323... \text{ tai } x = 125,323...$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

Sovellustehtävässä ratkaisuista riittää likiarvot.

Etäisyys on positiivinen luku $x = 125,323\ldots$ m ≈ 125 m.

Vastaus

125 m

16.15

a) Työn kesto y ja talkoolaisten lukumäärä x ovat kääntäen verrannolliset, joten niiden välisen riippuvuuden ilmaisee yhtälö $y=\dfrac{k}{x}$, missä k on verrannollisuuskerroin. Ratkaistaan verrannollisuuskerroin k.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{k}{x} \\
100 &= \frac{k}{2} \qquad \Big| \cdot 2 \\
k &= 200
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $y=100$ (min) ja $x=2$ (henkilöä).

Yhtälön voi ratkaista myös CAS-laskimella.

Työn keston y riippuvuuden talkoolaisten lukumäärästä x ilmaisee yhtälö $y=\dfrac{200}{x}$.

b) Verrannollisuuskerroin on $k = 100 \text{ min} \cdot 2 \text{ henkilöä} = 200$ henkilötyöminuuttia. Verrannollisuuskerroin ilmaisee perunoiden kuorimisen kokonaiskeston eli henkilötyöminuuttien lukumäärän.

c) Ratkaistaan talkoolaisten lukumäärä x (henkilöä), kun työn kesto $y = 40$ min.

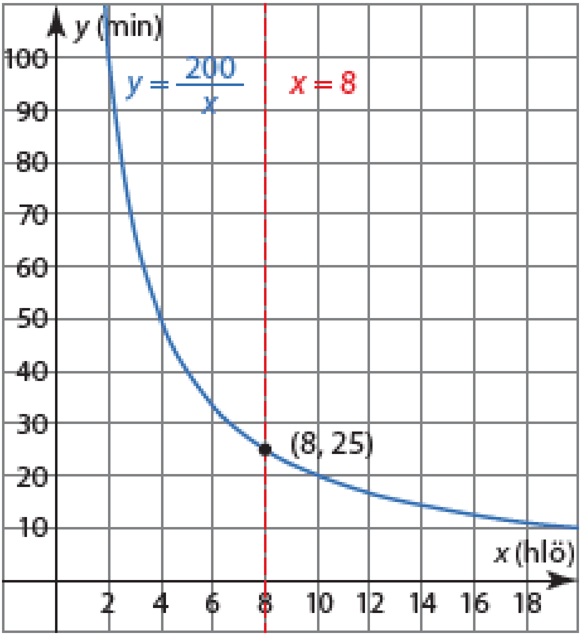
$$
\begin{aligned}
y &= \frac{200}{x} \\
40 &= \frac{200}{x} \\
x &= 5 \ \text{(talkoolaista)}
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $y = 40$.

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

5 talkoolaista kuorii perunat 40 minuutissa.

d) Piirretään riippuvuutta esittävän yhtälön $y = \dfrac{200}{x}$ kuvaaja. Piirretään samaan kuvaan myös suora $x = 8$ (talkoolaista). Työn kesto y, kun $x = 8$, saadaan piirrettyjen kuvaajien leikkauspisteen y- koordinaattina.



Leikkauspiste on (8, 25), joten työn kesto $y = 25$ (min). Siis 8 talkoolaista kuorii perunat 25 minuutissa.

Vastaus

a) $y = \dfrac{200}{x}$

b) Verrannollisuuskerroin ilmaisee henkilötyöminuuttien lukumäärän.

c) 5 talkoolaista

d) 25 min

16.16

Merkitään kirjaimella x laimennetun liuoksen konsentraatiota, kun liuoksen tilavuus oli 4,5 dl.

Konsentraatio (mol/l)	**Tilavuus (dl)**
0,25	3,5
x	4,5

Liuoksen konsentraatio on kääntäen verrannollinen liuoksen kokonaistilavuuteen. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{0,25}{x} = \frac{4,5}{3,5}$$

$$x = 0,1944... \approx 0,19 \,(\text{mol/l})$$

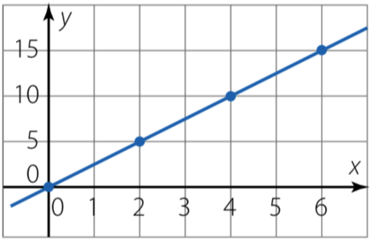
Laimennetun liuoksen konsentraatio oli 0,19 mol/l.

Vastaus

0,19 mol/l

16.17

a)

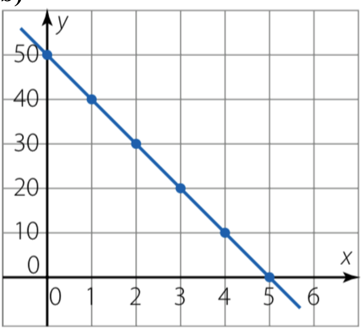


Kuvaajalta luetaan alkutilanne, kun esimerkiksi $x = \mathbf{2}$, niin $y = \mathbf{5}$.

Kun x kaksinkertaistuu eli $x = 4$, niin $y = 10$ eli myös y on myös kaksinkertaistunut.
Edelleen voidaan lukea kuvaajalta, kun x kolminkertaistuu eli $x = 6$, niin $y = 15$ eli y on myös kolminkertaistunut.

Suureet x ja y muuttuvat siis samassa suhteessa eli ne ovat suoraan verrannolliset.

b)

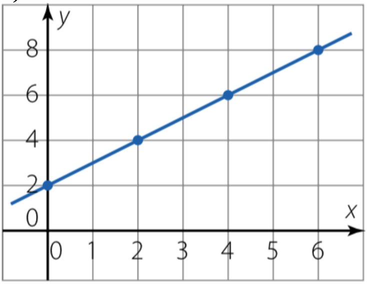


Kuvaajalta luetaan alkutilanne, kun esimerkiksi $x = \mathbf{1}$, niin $y = \mathbf{40}$.

Kun x kolminkertaistuu eli $x = 3$, niin $y = 20$ eli y puolittuu Suure y ei siis pienene kolmasosaan, mikä tapahtuisi kääntäen verrannollisessa tilanteessa. (Suoraan verrannollisessa tilanteessa suureen y tulisi kasvaa samassa suhteessa suureen x kanssa. Näinkään ei tapahdu.)

Suureet x ja y eivät ole verrannolliset.

c)

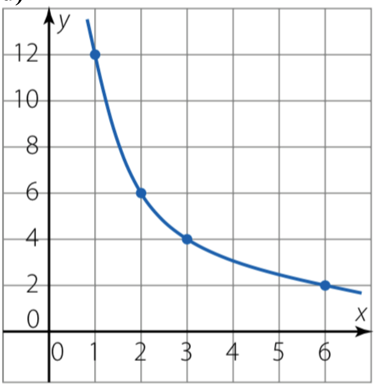


Kuvaajalta luetaan alkutilanne, kun esimerkiksi $x = \mathbf{2}$, niin $y = \mathbf{4.}$

Kun x kaksinkertaistuu eli $x = 4$, niin $y = 6$ eli y ei kaksinkertaistu eikä puolitu. Suure y ei siis muutu samassa suhteessa eikä myöskään käänteisessä suhteessa suureen x kanssa.

Suureet x ja y eivät ole verrannolliset.

d)



Kuvaajalta luetaan alkutilanne, kun esimerkiksi $x = \mathbf{1}$, niin $y = \mathbf{12.}$

Kun x kaksinkertaistuu eli $x = 2$, niin $y = 6$ eli myös y on puolittunut. Edelleen voidaan lukea kuvaajalta, kun x kolminkertaistuu eli $x = 3$, niin $y = 4$ eli y on pienentynyt kolmasosaan. Kun x kuusinkertaistuu eli $x= 6$, niin $y = 2$ eli y on pienentynyt kuudesosaan.

Suureet x ja y muuttuvat siis käänteisessä suhteessa eli ne ovat kääntäen verrannolliset.

Vastaus
a) **s**uoraan verrannolliset
b) ei kumpaakaan
c) ei kumpaakaan
d) kääntäen verrannolliset

16.18

x	y
6	a
1	24

a) Kun suureet x ja y ovat kääntäen verrannolliset, suureet muuttuvat käänteisessä suhteessa. Taulukon mukaan voidaan ajatella, että suure x kasvaa arvosta $x = 1$ kuusinkertaiseksi eli arvoon $x = 6$. Koska suureet ovat kääntäen verrannolliset, suureen y tulee pienentyä arvosta $y = 24$ kuudesosaan eli arvoon $a = 4$.

Suureen y riippuvuuden suureesta x ilmaisee yhtälö $y = \frac{k}{x}$, missä k on verrannollisuuskerroin. Sijoitetaan yhtälöön esimerkiksi lukupari $x = 1$ ja $y = 24$ ja ratkaistaan verrannollisuuskerroin k

$$\begin{aligned} y &= \frac{k}{x} \\ 24 &= \frac{k}{1} \\ k &= 24 \end{aligned}$$

Suureen y riippuvuuden suureesta x ilmaisee siis yhtälö $y = \frac{24}{x}$

b) Kun suureet x ja y ovat suoraan verrannolliset, suureet muuttuvat samassa suhteessa. Taulukon mukaan voidaan ajatella, että suure x kasvaa arvosta $x = 1$ kuusinkertaiseksi eli arvoon $x = 6$. Koska suureet ovat suoraan verrannolliset, suureen y tulee myös kasvaa arvosta $y = 24$ kuusinkertaiseksi eli arvoon $a = 144$.

Suureen y riippuvuuden suureesta x ilmaisee yhtälö $y = k \cdot x$, missä k on verrannollisuuskerroin. Sijoitetaan yhtälöön esimerkiksi lukupari $x = 1$ ja $y = 24$ ja ratkaistaan verrannollisuuskerroin k

$$y = k \cdot x$$
$$24 = k \cdot 1$$
$$k = 24$$

Suureen y riippuvuuden suureesta x ilmaisee siis yhtälö $y = 24x$

Vastaus

a) $a = 24$, $y = \dfrac{24}{x}$

b) $a = 144$, $y = 24x$

16.19

Merkitään kirjaimella x etäisyyttä Maan keskipisteestä, kun nyrkkeilijä painaa 80,00 kg.

Paino (kg)	**Etäisyyden neliö (km^2)**
80,09	6370^2
80,00	x^2

Nyrkkeilijän paino on kääntäen verrannollinen Maan keskipisteestä lasketun etäisyyden neliöön. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{80,09}{80,00} = \frac{x^2}{6370^2}$$

$$x = -6373,582... \text{ tai } x = 6373,582...$$

Etäisyys on positiivinen luku $x = 6373,582\ldots$ km.

Kilpailut pidetään korkeudessa $6373,582\ldots \text{ km} - 6370 \text{ km} = 3,582\ldots \text{ km} \approx 3,6$ km.

Vastaus

3,6 km

16.20

Merkitään nopeusrajoitusta kirjaimella x, kun aikaa kuluu matkaan
1 h 5 min = 60 min + 5 min = 65 min.
Kun nopeus kasvoi 10 km/h, nopeutta merkitään $x + 10$ (km/h). Aikaa säästettiin tällä nopeudella 6,5 min eli aikaa kului 65 min – 6,5 min = 58,5 min.

Nopeus ja aika ovat kääntäen verrannolliset, kun kuljettu matka on vakio.

Nopeus (km/h)	**Aika (min)**
x	65
$x + 10$	58,5

.
Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{x}{x+10} = \frac{58,5}{65}$$
$$x = 90$$

Nopeusrajoitus on 90 km/h.

Vastaus

90 km/h

16.21

Merkitään kirjaimella h tuotteen hintaa (€) alussa ja kirjaimella m myyntimäärää alussa. Tuotteen hinta h nousi 15 % eli uusi hinta on $1{,}15h$. Merkitään uutta hintaa vastaavaa tuotteen myyntimäärää kirjaimella x.

Hinta (€)	**Myyntimäärä**
h	m
$1{,}15h$	x

Tuotteen hinta on kääntäen verrannollinen myyntimäärään. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{h}{1{,}15h} = \frac{x}{m}$$

$$x = 0{,}869\ldots m \approx 0{,}87m$$

Tuotteen myyntimäärä on siis $0{,}87m$ eli alkuperäinen myyntimäärä m on 0,87-kertaistunut. Myyntimäärä on tällöin siis laskenut 100 % - 87 % = 13 %.

Vastaus

13 %

16.22

Ideaalikaasun tilanyhtälö on $pV = nRT$.

a) Oletuksena on, että kaasu on vakiolämpötilassa eli T on vakio. Lisäksi oletetaan, että ainemäärä n on vakio (ainemäärä ei muutu). Tutkitaan paineen ja tilavuuden verrannollisuutta.

Tapa 1: Koska lisäksi n ja R ovat vakiota, tilanyhtälöstä nähdään, että $pV =$ vakio. Koska paineen p ja tilavuuden V tulo on vakio, suureet p ja V ovat kääntäen verrannolliset.

Tapa 2: Tilanyhtälöstä voidaan ratkaista toinen suureista, esimerkiksi suure p.

$$pV = nRT \quad |:V$$

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Koska nRT on vakio (eli verrannollisuuskerroin k), yhtälö voidaan ilmaista muodossa $p = \frac{k}{V}$, josta nähdään, että suureet p ja V ovat kääntäen verrannolliset.

b) Oletuksena on, että kaasu on vakiotilavuudessa eli T on vakio. Lisäksi oletetaan, että ainemäärä n on vakio. Tutkitaan paineen ja lämpötilan verrannollisuutta.

Ratkaistaan tilanyhtälöstä toinen suureista, esimerkiksi paine p.

$$pV = nRT \quad |:V$$

$$p = \frac{nRT}{V}$$

$$p = \frac{nR}{V} \cdot T$$

Koska $\frac{nR}{V}$ on vakio (eli verrannollisuuskerroin k), yhtälö voidaan ilmaista muodossa $p = k \cdot T$, josta nähdään, että suureet p ja T ovat suoraan verrannolliset.

c) Tapa 1: Kaasun paine $p = 1{,}0$ bar ja lämpötila $T = 273$ K. Merkitään kaasun tilavuutta tällöin kirjaimella V ja ratkaistaan V tilanyhtälöstä.

$$pV = nRT \quad \Big|: p$$

$$V = \frac{nRT}{p}$$

$$V = \frac{nR \cdot 273}{1{,}0} = 273nR$$

Sijoitetaan $p = 1{,}0$ (bar) ja $T = 273$ (K). Ainemäärä n ja kerroin R ovat vakioita.

Lämpötila pidetään vakiona eli $T = 273$ K, mutta kaasun tilavuus kaksinkertaistuu eli $V = 2 \cdot 273nR$. Tämän jälkeen tilavuus pidetään vakiona eli muuttumattomana, mutta lämpötila muuttuu arvoon $T = 323$ K. Ratkaistaan tilanyhtälöstä kaasun paine p.

$$p = \frac{nRT}{V}$$

$$p = \frac{\cancel{n}R}{2 \cdot 273\cancel{n}R} \cdot 323$$

$$p = \frac{323}{546} = 0{,}591\ldots \approx 0{,}59\,(\text{bar})$$

Tapa 2: Vakiolämpötilassa (273 K) paine ja tilavuus ovat kääntäen verrannolliset. Jos siis tilavuus kasvaa kaksinkertaiseksi, paine pienenee puoleen eli paine on $p = 0{,}5$ bar.

Tämä jälkeen tilavuus pysyy vakiona, jolloin lämpötila ja paine ovat suoraan verrannolliset. Suoraan verrannolliset suureet muuttuvat samassa suhteessa. Lämpötila muuttuu suhteessa $\frac{323}{273} = 1{,}183\ldots$, joten painekin muuttuu samassa suhteessa eli paine 1,183…-kertaistuu, jolloin paine lopputilassa on $p = 1{,}183\ldots \cdot 0{,}5$ bar $= 0{,}591\ldots$bar $\approx 0{,}59$ bar.

Vastaus

a) kääntäen verrannolliset, koska suureiden tulo on vakio

b) suoraan verrannolliset, koska suureiden suhde on vakio

c) 0,59 bar

16.23

a) Valaistuksen voimakkuus I on suoraan verrannollinen valonlähteen tehoon P eli
$I = k \cdot P$, missä k on verrannollisuuskerroin. Lisäksi I on kääntäen verrannollinen etäisyyden d neliöön, d^2, jolloin verrannollisuutta kuvaava yhtälö saa muodon
$I = \frac{k \cdot P}{d^2}$, missä k on verrannollisuuskerroin.

b) Valolähde, jonka teho on P, on etäisyydellä 1,2 m kohteesta. Merkitään kirjaimella x etäisyyttä, kun valolähteen teho on $3P$. Valaistusvoimakkuuden I halutaan pysyvän muuttumattomana eli vakiona. Suoraan verrannollisten suureiden suhde on vakio. a-kohdan yhtälön mukaan P on suoraan verrannollinen etäisyyden neliöön d^2, kun I on vakio.

Teho *P*	**Etäisyyden neliö d^2**
P	$1{,}2^2$
$3P$	x^2

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x

$$\frac{\cancel{P}}{3\cancel{P}} = \frac{1{,}2^2}{x^2}$$

$$x = 2{,}078... \approx 2{,}1(\mathrm{m})$$

Tehojen suhde on yhtä suuri kuin etäisyyksien neliöiden suhde.

Valolähteen etäisyys kohteesta on 2,1 m.

Vastaus

a) $I = \frac{k \cdot P}{d^2}$, missä k on verrannollisuuskerroin

b) 2,1 m