

10.1

a) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 2$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(2) &= 3 \cdot 2 - 5 \\ &= 6 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 2$ funktioon $f(x) = 3x - 5$.

b) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 12$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(12) &= 3 \cdot 12 - 5 \\ &= 36 - 5 \\ &= 31 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 12$ funktioon $f(x) = 3x - 5$.

Vastaus

a) $f(2) = 1$ b) $f(12) = 31$

10.2

a) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 3$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned}g(3) &= 3^2 + 2 \\ &= 9 + 2 \\ &= 11\end{aligned}$$

b) Lasketaan muuttujan arvoa $x = -3$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned}g(-3) &= (-3)^2 + 2 \\ &= 9 + 2 \\ &= 11\end{aligned}$$

Vastaus

a) $g(3) = 11$ b) $g(-3) = 11$

10.3

Lasketaan muuttujan arvoa $x = -2$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2 \cdot (-2) + 4 \\ &= -4 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lasketaan muuttujan arvoa $x = \frac{1}{2}$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 4 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Vastaus

$$f(-2) = 0 \text{ ja } f\left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

10.4

- a) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $f(x)$ on 7.

$$f(x) = 7$$

$$3x - 5 = 7 \quad | +5$$

$$3x = 12 \quad | :3$$

$$x = 4$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = 3x - 5$$

Ratkaistaan muuttuja x .

- b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $f(x)$ on -20 .

$$f(x) = -20$$

$$3x - 5 = -20 \quad | +5$$

$$3x = -15 \quad | :3$$

$$x = -5$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = 3x - 5$$

Ratkaistaan muuttuja x .

Vastaus

- a) $x = 4$ b) $x = -5$

10.5

- a) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $g(x)$ on 3.

$$g(x) = 3$$

$$x^2 + 2 = 3 \quad | -2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1} = 1 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{1} = -1$$

- b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $g(x)$ on 18.

$$g(x) = 18$$

$$x^2 + 2 = 18 \quad | -2$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{16} = -4$$

Vastaus

- a) $x = -1$ ja $x = 1$ b) $x = -4$ ja $x = 4$

10.6

- a) Taksimatkan hinnassa veloitetaan yhden kerran perusmaksu 5 €.

Kun matkan pituus on x kilometriä, on ajettujen kilometrien veloitus $x \cdot 1,80 \text{ €} = 1,80x \text{ €}$.

Taksimatkan hinnan euroina ilmaisee funktio

$$f(x) = 5 + 1,80x.$$

Tallennetaan funktion lauseke CAS-laskimeen b- ja c-kohtien laskuja varten.

- b) Muuttujan x arvo on 10,4 (km). Lasketaan funktion arvo $f(10,4)$.

$$f(10,4) = 23,72 \text{ (€)} \quad \text{Lasketaan funktion arvo laskimella.}$$

Kyyti maksoi 23,72 €.

- c) Funktion f arvo on 43,70 (€). Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttujan x arvo.

$$\begin{aligned} f(x) &= 43,70 && \text{Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.} \\ x &= 21,5 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Rahat riittävät 21,5 km:n matkaan.

Vastaus

- a) $f(x) = 5 + 1,80x$ b) 23,72 € c) 21,5 km

10.7

a) Yhtiö A:

Perusmaksu 4,02 €.

1 kWh sähköä maksaa 6,62 snt = 0,0662 €.

Kun aikaväli on yksi kuukausi ja sähköä kuluu x kWh ilmaiseen sähkön kokonaishinnan lauseke

$$a(x) = 4,02 + 0,0662x.$$

Yhtiö B:

Perusmaksu 3,75 €.

1 kWh sähköä maksaa 7,99 snt = 0,0799 €.

Kun aikaväli on yksi kuukausi ja sähköä kuluu x kWh ilmaiseen sähkön kokonaishinnan lauseke

$$b(x) = 3,75 + 0,0799x.$$

- b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan millä muuttujan x arvolla sähkön kokonaishinnat ovat samat.

$$a(x) = b(x)$$

$$4,02 + 0,0662x = 3,75 + 0,0799x$$

$$x = 19,708... \approx 19,7 \text{ (kWh)}$$

Sijoitetaan lausekkeet

$a(x)$ ja $b(x)$.

Ratkaistaan yhtälö

CAS-laskimella.

Sähkönkulutuksen täytyisi olla 19,7 kWh kuukausittain.

- c) Lasketaan molempien yhtiöiden kokonaishinta, kun vuodessa sähkö kuluu 2000 kWh.

Yhtiö A:

$$\text{Perusmaksut: } 12 \cdot 4,02 \text{ €} = 48,24 \text{ €} .$$

$$\text{Sähköenergia: } 2000 \cdot 6,62 \text{ snt} = 13240 \text{ snt} = 132,40 \text{ €} .$$

$$\text{Kokonaishinta: } 48,24 \text{ €} + 132,40 \text{ €} = 180,64 \text{ €} .$$

Yhtiö B:

$$\text{Perusmaksut: } 12 \cdot 3,75 \text{ €} = 45 \text{ €} .$$

$$\text{Sähköenergia: } 2000 \cdot 7,99 \text{ snt} = 15980 \text{ snt} = 159,80 \text{ €} .$$

$$\text{Kokonaishinta: } 45 \text{ €} + 159,80 \text{ €} = 204,80 \text{ €} .$$

Lasketaan kokonaishintojen erotus.

$$204,80 \text{ €} - 180,64 \text{ €} = 24,16 \text{ €}$$

Sähkön kokonaishintojen ero vuoden aikana on 24,16 €.

Vastaus

a) $a(x) = 4,02 + 0,0662x$, $b(x) = 3,75 + 0,0799x$

b) 19,7 kWh

c) 24,16 €

10.8

a) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 0$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned}f(0) &= 16 - 2 \cdot (0 + 4) \\ &= 16 - 2 \cdot 4 \\ &= 16 - 8 \\ &= 8\end{aligned}$$

b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $f(x)$ on 0.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ 16 - 2(x + 4) &= 0 \\ 16 - 2x - 8 &= 0 \\ 8 - 2x &= 0 && | -8 \\ -2x &= -8 && | :(-2) \\ x &= 4\end{aligned}$$

Vastaus

a) $f(0) = 8$ b) $x = 4$

10.9

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$f(x) = g(x)$$

Sijoitetaan $f(x) = 6 - 3x$ ja $g(x) = 3(4 - 2x)$.

$$6 - 3x = 3(4 - 2x)$$

$$6 - 3x = 12 - 6x \quad | +6x$$

$$6 + 3x = 12 \quad | -6$$

$$3x = 6 \quad | :3$$

$$x = 2$$

Vastaus

$$x = 2$$

10.10

a) Funktioon syötetty luku x kerrotaan luvulla 5: $5x$

Tulosta vähennetään luku 3: $5x - 3$

Funktion h lauseke on $h(x) = 5x - 3$.

b) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 4$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned}h(4) &= 5 \cdot 4 - 3 \\ &= 20 - 3 \\ &= 17\end{aligned}$$

Lasketaan muuttujan arvoa $x = -4$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned}h(-4) &= 5 \cdot (-4) - 3 \\ &= -20 - 3 \\ &= -23\end{aligned}$$

Vastaus

a) $h(x) = 5x - 3$ b) $h(4) = 17$ ja $h(-4) = -23$

10.11

Funktion f arvo on 101 (°F). Selvitetään muuttujan c arvo. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan c .

$$f(c) = 101$$

$$\frac{9}{5}c + 32 = 101$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

$$c = 38,333\dots \approx 38,3 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

Petrin ruumiinlämpö oli 38 °C.

Vastaus

38,3 °C

10.12

a) Funktion n arvo on 41 (cm). Ratkaistaan vastaava muuttujan x arvo.

$$n(x) = 41$$

$$0,43x - 27 = 41$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

$$x = 158,139... \approx 158 \text{ (cm)}$$

Naisen pituus oli ollut 158 cm.

b) **Tapa 1: Lasketaan 175 cm pitkän miehen sääriluun pituus.**

Lasketaan muuttujan arvoa $x = 175$ (cm) vastaava funktion m arvo.

$$m(175) = 0,45 \cdot 175 - 31$$

$$= 47,75 \text{ (cm)}$$

Koska 175 cm pitkän miehen sääriluun pituus ei ole 42 cm, löydetty sääriluu ei voi olla saman henkilön sääriluu.

Tapa 2: Lasketaan sen miehen pituus, jonka sääriluun pitemys on 42 cm.

Funktion m arvo on 42 (cm). Ratkaistaan vastaava muuttujan x arvo.

$$m(x) = 42$$

$$0,45x - 31 = 41$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

$$x = 160 \text{ (cm)}$$

Sääriluu ei voi siis olla 175 cm pitkän miehen sääriluu.

Vastaus

a) 158 cm b) ei voi olla

10.13

a) Kun ajetaan 100 km, kuluu bensaa 4,9 litraa.

Kun ajetaan 1 km, kuluu bensaa $\frac{4,9 \text{ L}}{100} = 0,049 \text{ L}$.

Kun ajetaan x km, kuluu bensaa $0,049x$ litraa.

Alussa bensaa on 55 litraa.

Bensan määrän tankissa ilmaisee funktio

$$f(x) = 55 - 0,049x.$$

b) Ratkaistaan se muuttujan x arvo, jolla funktion f arvo on 0.

$$f(x) = 0$$

$$55 - 0,049x = 0$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

$$x = 1122,44... \approx 1120 \text{ (km)}$$

Vastaus

a) $f(x) = 55 - 0,049x$ b) 1120 km

10.14

- a) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $f(x)$ on 20.

$$f(x) = 20$$

$$x^2 - 16 = 20 \quad | +16$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = 6 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{36} = -6$$

Sijoitetaan $f(x) = x^2 - 16$.

Ratkaistaan muuttuja x .

Yhtälön ratkaisut ovat luvun 36 neliöjuuri ja sen vastaluku.

- b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $f(x)$ on 0.

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 16 = 0 \quad | +16$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{16} = -4$$

Sijoitetaan $f(x) = x^2 - 16$.

Ratkaistaan muuttuja x .

Yhtälön ratkaisut ovat luvun 16 neliöjuuri ja sen vastaluku.

Vastaus

- a) $x = -6$ ja $x = 6$ b) $x = -4$ ja $x = 4$

10.15

- a) Siivouslaskussa veloitetaan yhden kerran perusmaksu 15 €.

Kun siivoukseen kuluu x tuntia, on työtunneista veloitettava maksu
 $x \cdot 36 \text{ €} = 36x \text{ €}$.

Siivouslaskun suuruuden euroina ilmaisee funktio

$$s(x) = 15 + 36x.$$

Tallennetaan funktion lauseke CAS-laskimeen
b- ja c-kohtien laskuja varten.

- b) Muuttujan x arvo on 3,5 (h). Lasketaan funktion arvo $s(3,5)$.

$$s(3,5) = 141 \text{ (€)} \quad \text{Lasketaan funktion arvo laskimella.}$$

Laskun suuruus oli 141 €.

- c) Funktion s arvo on 168 (€). Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttujan x arvo.

$$\begin{aligned} s(x) &= 168 && \text{Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.} \\ x &= 4,25 \text{ (h)} \end{aligned}$$

Siivoukseen oli kulunu aikaa 4,25 h = 4 h 15 min.

Vastaus

- a) $s(x) = 15 + 36x$ b) 141 € c) 4,25 h = 4 h 15 min

10.16

- a) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 5$ vastaava funktion arvo.

$$h(5) = 15,80 \cdot 5 = 79 \text{ (€)}$$

Tulos tarkoittaa sitä, että 5 kg mansikoita maksaa 79 €.

- b) Ratkaistaan yhtälöstä $h(x) = 158$ muuttuja x .

$$h(x) = 158$$

$$15,80x = 158 \quad | :15,80 \quad \text{Yhtälön voi ratkaista myös CAS-laskimella.}$$

$$x = 10 \text{ (kg)}$$

Tulos tarkoittaa sitä, että 158 eurolla saa 10 kg mansikoita.

- c) Kun $x = 1$, niin $f(1) = 15,80 \cdot 1 = 15,80$. Siis yksi kilogramma mansikoita maksaa 15,80 €.

Kerroin ilmaisee mansikoiden kilohinnan 15,80 €/kg.

Vastaus

- a) $h(5) = 79$ (€), Tulos tarkoittaa sitä, että 5 kg mansikoita maksaa 79 €.
b) $x = 10$ (kg), Tulos tarkoittaa sitä, että 158 eurolla saa 10 kg mansikoita.
c) Mansikoiden kilohinta on 15,80 €/kg.

10.17

a) Ratkaistaan yhtälö $f(x) = g(x)$ ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 3x - 4 &= 5 + 2x & | -2x \\ x - 4 &= 5 & | +4 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin funktion g arvo kohdassa 3.

$$g(3) = 5 + 2 \cdot 3 = 5 + 6 = 11$$

Muodostetaan yhtälö $f(x) = g(3)$ ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned} f(x) &= g(3) \\ 3x - 4 &= 11 & | +4 \\ 3x &= 15 & | :3 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

c) Lasketaan ensin funktion f arvo kohdassa 3.

$$f(3) = 3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5$$

Muodostetaan yhtälö $g(x) = f(3)$ ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned} g(x) &= f(3) \\ 5 + 2x &= 5 & | -5 \\ 2x &= 0 & | :2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus

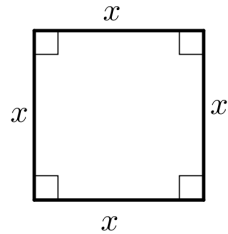
a) $x = 9$ b) $x = 5$ c) $x = 0$

10.18

a) Neliön piiri on $4 \cdot x = 4x$.

Annetaan funktion nimeksi p .

Neliön piirin ilmaisee funktio $p(x) = 4x$.



b) Neliön pinta-ala on $x \cdot x = x^2$.

Annetaan funktion nimeksi A .

Neliön piirin ilmaisee funktio $A(x) = x^2$.

Vastaus

a) $p(x) = 4x$ b) $A(x) = x^2$

10.19

a) Funktioon syötetystä luvusta x lasketaan neliöjuuri: \sqrt{x}

Neliöjuuren arvoon lisätään luku 5. $\sqrt{x} + 5$

Funktion f lauseke on $f(x) = \sqrt{x} + 5$

b) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 9$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(9) &= \sqrt{9} + 5 \\ &= 3 + 5 \\ &= 8 \end{aligned}$$

c) Lasketaan muuttujan arvoa $x = -9$ vastaava funktion arvo.

$$f(-9) = \sqrt{-9} + 5 \qquad \sqrt{-9} \text{ ei ole määritelty.}$$

Koska negatiivisen luvun neliöjuurta ei ole määritelty, ei funktion arvoa $f(-9)$ ole määritelty.

Vastaus

a) $f(x) = \sqrt{x} + 5$ b) $f(9) = 8$ c) $f(-9)$ ei ole määritelty

10.20

a) Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 2$.

$$\begin{aligned}f(2) &= a \cdot 2^2 - 3a \cdot 2 + 12 \\ &= 4a - 6a + 12 \\ &= -2a + 12\end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

$$\begin{array}{rcl}f(2) = 0 & & \text{Sijoitetaan } f(2) = -2a + 12. \\ -2a + 12 = 0 & & | -12 \\ -2a = -12 & & | :(-2) \\ a = 6 & & \end{array}$$

b) Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 5$.

$$\begin{aligned}f(5) &= a \cdot 5^2 - 3a \cdot 5 + 12 \\ &= 25a - 15a + 12 \\ &= 10a + 12\end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

$$\begin{array}{rcl}f(5) = 2 & & \text{Sijoitetaan } f(5) = 10a + 12. \\ 10a + 12 = 2 & & | -12 \\ 10a = -10 & & | :10 \\ a = -1 & & \end{array}$$

Vastaus

a) $a = 6$ b) $a = -1$

10.21

Tutkitaan funktiota $f(x) = 2x + 1$.

a) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 3$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(3) &= 2 \cdot 3 + 1 \\ &= 6 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

b) Lasketaan muuttujan arvoa $x = t$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cdot t + 1 \\ &= 2t + 1 \end{aligned}$$

c) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 3t$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(3t) &= 2 \cdot 3t + 1 \\ &= 6t + 1 \end{aligned}$$

d) Lasketaan muuttujan arvoa $x = t + 1$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(t+1) &= 2 \cdot (t+1) + 1 \\ &= 2t + 2 + 1 \\ &= 2t + 3 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $f(3) = 7$ b) $f(t) = 2t + 1$ c) $f(3t) = 6t + 1$ d) $f(t+1) = 2t + 3$

10.22

a) Palkankorotus 50 €:

Uutta palkkaa kuvaa funktio

$$f(x) = x + 50.$$

Palkankorotus 5 %:

Uusi palkka on $100\% + 5\% = 105\%$ alkuperäisestä palkasta. Koska $105\% = 1,05$ tulee palkka 1,05-kertaiseksi. Uutta palkkaa kuvaa funktio

$$g(x) = 1,05x.$$

b) Muodostetaan yhtälö $f(x) = g(x)$ ja ratkaistaan alkuperäinen palkka x .

$$f(x) = g(x)$$

$$x + 50 = 1,05x$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

$$x = 1000 \text{ (€)}$$

Markuksen uusi palkka on $1000 \text{ €} + 50 \text{ €} = 1050 \text{ €}$.
(Tai $1,05 \cdot 1000 \text{ €} = 1050 \text{ €}$.)

Vastaus

a) eurokorotus $f(x) = x + 50$, prosenttikorotus $g(x) = 1,05x$

b) 1050 €

10.23

Suomalaiset aakkoset:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

a) $g(2)$ on suomalaisten aakkosten toinen kirjain: $g(2) = B$.

$g(8)$ on suomalaisten aakkosten kahdeksas kirjain: $g(8) = H$.

b) Koska kirjain P on suomalaisten aakkosten 16. kirjain,
on $g(n) = P$, kun $n = 16$.

c) Muuttujan n paikalle voidaan sijoittaa kokonaisluvut $1, 2, 3, \dots, 29$, koska suomalaisissa aakkosissa on 29 kirjainta.

d) Funktio voi saada arvoksi kaikki suomalaisten aakkosten kirjaimet
A, B, C, ..., Ö.

Vastaus

a) $g(2) = B$, $g(8) = H$

b) $n = 16$

c) kokonaisluvut $1, 2, 3, \dots, 29$

d) Kaikki suomalaiset aakkoset.