151

Nopan heittoa voidaan ajatella toistokokeeksi. Todennäköisyys, että nopanheitolla saadaan silmäluku 1 on $\frac{1}{6}$.

a) Lasketaan todennäköisyys, että viidellä nopanheitolla saadaan täsmälleen kaksi ykköstä.

$$P(\text{täsmälleen kaksi ykköstä})$$
$$=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$
$$=\frac{625}{3888}=0,160...\approx 0,16$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että viidellä nopanheitolla saadaan täsmälleen kolme ykköstä.

$$P(\text{täsmälleen kolme ykköstä})$$
$$=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$=\frac{125}{3888}=0,0321...\approx 0,32$$

Vastaus a) $0,16$ b) $0,32$

152

Hedelmien pakkaaminen 18 kappaleen myyntipakkauksiin voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 18 toistoa. Todennäköisyys, että yksittäinen hedelmä on pilaantunut, on 3 % = 0,03.

a) Lasketaan todennäköisyys, että 18 kappaleen pakkaukseen päätyy täsmälleen yksi pilaantunut hedelmä.

$$P(\text{täsmälleen yksi pilaantunut})$$
$$=\binom{18}{1}\cdot 0,03^{1}\cdot 0,97^{17}$$
$$=0,3217...\approx 0,32$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että 18 kappaleen pakkaukseen päätyy täsmälleen kaksi pilaantunutta hedelmää.

$$P(\text{täsmälleen kaksi pilaantunutta})$$
$$=\binom{18}{2}\cdot 0,03^{2}\cdot 0,97^{16}$$
$$=0,08458...\approx 0,085$$

Vastaus a) 0,32 b) 0,085

153

Todennäköisyys, että tavaraerässä on virheellinen yksilö, on 2 % = 0,02.

Lasketaan todennäköisyys, että 20 kappaleen näytteessä on enintään kaksi virheellistä.

$P(\text{enintään 2 virheellistä})$
$= P(\text{0 virheellistä tai 1 virheellinen tai 2 virheellistä})$
$= P(\text{0 virheellistä})+P(\text{1 virheellinen})+P(\text{2 virheellistä})$
$=\binom{20}{0}\cdot 0{,}02^0\cdot 0{,}98^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0{,}02^1\cdot 0{,}98^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0{,}02^2\cdot 0{,}98^{18}$
$=0{,}9929\ldots\approx 0{,}993$

Vastaus 0,993

154

Todennäköisyys, että koira on valkoruskea, on 72 % = 0,72.

a) Lasketaan todennäköisyys, että näyttelyn 23 koirasta tasan 20 on valkoruskeita.

$$P(20 \text{ valkoruskeaa})$$
$$= \binom{23}{20} \cdot 0,72^{20} \cdot 0,28^{3}$$
$$= 0,05449... \approx 0,054$$

b) Tapahtuman ”enintään 20 koirista on valkoruskeita” vastatapahtuma on ”21, 22 tai 23 koiraa on valkoruskeita”. Lasketaan todennäkäköisyys.

$$P(\text{enintään 20 valkoruskeaa})$$
$$= 1 - P(21 \text{ tai } 22 \text{ tai } 23 \text{ valkoruskeaa})$$
$$= 1 - (P(21) + P(22) + P(23))$$
$$= 1 - (\binom{23}{21} \cdot 0,72^{21} \cdot 0,28^{2} + \binom{23}{22} \cdot 0,72^{22} \cdot 0,28^{1} + \binom{23}{23} \cdot 0,72^{23} \cdot 0,28^{0})$$
$$= 0,9747... \approx 0,97$$

Vastaus a) 0,054 b) 0,97

155

a) Koska arpojen määrä on suuri voidaan olettaa, että yksittäisen arvan voittotodennäköisyys on $\frac{1}{4}$. (Kyseessä on siis toistokoe.)

Lasketaan todennäköisyys, että viidestä ostetusta arvasta täsmälleen kaksi voittaa.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{täsmälleen kaksi voittaa})\\
&=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\\
&=0,2636...\approx 0,26
\end{aligned}
$$

b) Arpoja on jäljellä 16. Koska arpojen määrä on pieni, kyseessä ei ole toistokoe.

16 arvasta voidaan ostaa 5 arpaa $\binom{16}{5}$ tavalla.

Neljästä voittoarvasta voidaan ostaa 2 arpaa $\binom{4}{2}$ tavalla ja

loput 3 arpaa 12 tyhjästä arvasta $\binom{12}{3}$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{täsmälleen kaksi voittaa})$$
$$= \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{16}{5}}$$
$$= 0,3021... \approx 0,30$$

Vastaus a) 0,26 b) 0,30

156

Viiden tikanheittoa voidaan ajatella toistokokeena. Todennäköisyys, että Pekka osuu kymppiin, on 8 % = 0,08. Todennäköisyys, että Pekka ei osu kymppiin on 92 % = 0,92.

a) $P(\text{osuu ensimmäisellä, muttei muilla})$
$= P(\text{osuu ensimmäisellä}) \cdot P(\text{ei osu seuraavalla neljällä})$
$= 0{,}08 \cdot 0{,}92^4$
$= 0{,}05731... \approx 0{,}057$

b) Tapahtuman ”osuu ainakin yhdellä” vastatapahtuma on ”ei osu yhdelläkään”.

$P(\text{osuu ainakin yhdellä})$
$= 1 - P(\text{ei osu yhdelläkään})$
$= 1 - 0{,}92^5$
$= 0{,}3409... \approx 0{,}34$

c) Lasketaan todennäköisyys, että viidestä heitosta täsmälleen yhdellä tikalla.

$P(\text{osuu täsmälleen yhdellä})$
$= \binom{5}{1} \cdot 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^4$
$= 0{,}2865... \approx 0{,}29$

Vastaus a) 0,057 b) 0,34 c) 0,29

157

Lentokoneessa on 138 paikaa ja lennolle on myyty 141 matkalippua. Lentomatkan varannut matkustaja saapuu lennolle todennäköisyydellä 95 % = 0,95 ja ei saavu lennolle todennäköisyydellä 5 % = 0,05.

a) Jos tasan vyksi matkustaja ei mahdu koneeseen, niin lennolle saapuu tasan 139 matkustajaa.

$$\begin{aligned}
&P(\text{yksi ei mahdu koneeseen})\\
&= P(139 \text{ matkustajaa})\\
&= \binom{141}{139} \cdot 0{,}95^{139} \cdot 0{,}05^{2}\\
&= 0{,}01976... \approx 0{,}0198
\end{aligned}$$

b) Jos kaikki matkustajat mahtuvat koneeseen, matkustajia saapuu lennolle korkeintaan 138. Tapahtuman ”korkeintaan 138 matkustajaa saapuu lennolle” vastatapahtuma on ”lennolle saapuu 139, 140 tai 141 matkustajaa”.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{kaikki mahtuvat koneeseen})\\
&= P(\text{lennolle saapuu korkeintaan 138 matkustajaa})\\
&= 1 - P(\text{lennolle saapuu 139, 140 tai 141 matkustajaa})\\
&= 1 - (\binom{141}{139} \cdot 0{,}95^{139} \cdot 0{,}05^{2} + \binom{141}{140} \cdot 0{,}95^{140} \cdot 0{,}05^{1}\\
&\qquad + \binom{141}{141} \cdot 0{,}95^{141} \cdot 0{,}05^{0})\\
&= 0{,}9741... \approx 0{,}974
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 0,0198 b) 0,974

158

Todennäköisyys, että mies on punavihersokea on 8 % = 0,08 ja todennäköisyys, että nainen on punavihersokea on 0,4 % = 0,004.

Kurssin opiskelijoista 19 on tyttöjä ja 15 poikia. Kurssilla on yhteensä 34 opiskelijaa.

Tapahtuman ”ainakin kaksi opiskelijaa on punavihersokeita” vastatapahtuma on ”0 tai 1 on punavihersokeita”.

$P(\text{ainakin 2})$

$= 1 - P(\text{korkeintaan 1})$

$= 1 - P(\text{0 tai 1})$

$= 1 - \left(P(\text{0 p ja 0 t}) + P(\text{1 p ja 0 t}) + P(\text{0 p ja 1 t})\right)$

$$= 1 - (\underbrace{0{,}92^{15} \cdot 0{,}996^{19}}_{\text{0 poikaa ja 0 tyttöä}} + \underbrace{\binom{15}{1} \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^{14} \cdot 0{,}996^{19}}_{\text{1 poika ja 0 tyttöä}}$$

$$+ \underbrace{0{,}92^{15} \cdot \binom{19}{1} \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}996^{18}}_{\text{0 poikaa ja 1 tyttö}})$$

$= 0{,}3684\ldots \approx 0{,}37$

Vastaus 0,37

159

Laatikossa on 20 punaista ja 15 keltaista palloa. Laatikosta nostetaan 8 palloa ja pallot palautetaan aina nostojen välissä takaisin laatikkoon.

Punaisen pallon saamisen todennäköisyys on $\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$.

Tapahtuma ”saadaan enemmän punaisia kuin keltaisia palloja” on sama kuin tapahtuma ”saadaan 5, 6, 7 tai 8 punaista palloa.

$$\begin{aligned}
&P(\text{saadaan enemmän punaisia kuin keltaisia palloja})\\
&= P(5,\ 6,\ 7 \text{ tai } 8 \text{ punaista palloa})\\
&= P(5)+P(6)+P(7)+P(8)\\
&= \binom{8}{5}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3+\binom{8}{6}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2\\
&\qquad +\binom{8}{7}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^1+\binom{8}{8}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^8\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^0\\
&= 0{,}5272\ldots \approx 0{,}53
\end{aligned}$$

Vastaus 0,53

160

Tapahtuman ”toinen kuutonen tulee ennen 10. heittoa” vastatapahtuma on ”9 ensimmäisellä heitolla tulee 0 tai 1 kuutosta”.

Kuutosen todennäköisyys yksittäisess heitossa on $\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned}&P(\text{kuutonen tulee ennen 10. heittoa})\\&=1-P(\text{9 heitolla saadaan 0 tai 1 kuutosta})\\&=1-(P(\text{0 kuutosta})+P(\text{1 kuutonen}))\\&=1-(\left(\frac{5}{6}\right)^9+\binom{9}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^8)\\&=0,4573\ldots\approx 0,46\end{aligned}$$

Vastaus 0,46

161

Nopan heitto voidaan ajatella toistokokeeksi. Todennäköisyys, että 8-sivuisella nopalla saadaan silmäluku 7 on $\frac{1}{8}$.

Lasketaan todennäköisyys, että kymmenellä nopanheitolla puolet heitoista antaa silmäluvun 7 eli saadaan täsmälleen viisi seiskaa.

$$P(\text{täsmälleen viisi seiskaa})$$
$$=\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^5\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^5$$
$$=0,003944... \approx 0,0039$$

Vastaus 0,0039

162

Janin laskussa toinen todennäköisyyden laskulauseke on ylimääräinen. Jos heitettäessä kolikkoa 12 kertaa saadaan neljä kruunaa, niin silloin loput kahdeksan on klaavoja.

Lasketaan siis todennäköisyys, että 12 rahanheitolla saadaan täsmälleen 4 kruunaa.

$$P = \binom{12}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^8 = 0,1208... \approx 0,12\,.$$

Huomaa, että Janin laskema todennäköisyys oli kaksinkertainen.

163

Veriryhmien B ja O esiintymistodennäköisyydet ovat $P(B) = 0{,}17$ ja $P(\text{O}) = 0{,}33$.

Vampyyri puree 12 ihmistä.

a) Tapahtuman ”joukossa on enintään yhdeksän ihmistä, joiden veriryhmä on O” vastatapahtuma on ”joukossa on 10, 11 tai 12 ihmistä, joiden veriryhmä on O”.

Lasketaan todennäköisyys.

$$\begin{aligned}
&P(\text{enintään 9, joiden veriryhmä on O})\\
&= 1 - P(\text{10, 11 tai 12, joiden veriryhmä on O})\\
&= 1 - (P(10) + P(11) + P(12))\\
&= 1 - (\binom{12}{10} \cdot 0{,}33^{10} \cdot 0{,}67^{2} + \binom{12}{11} \cdot 0{,}33^{11} \cdot 0{,}67^{1}\\
&\qquad + \binom{12}{12} \cdot 0{,}33^{12} \cdot 0{,}67^{0})\\
&= 0{,}99950\ldots \approx 0{,}9995
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
&P(\text{joukossa 3 tai 4, joiden veriryhmä on B})\\
&= P(3) + P(4)\\
&= \binom{12}{3} \cdot 0{,}17^{3} \cdot 0{,}83^{9} + \binom{12}{4} \cdot 0{,}17^{4} \cdot 0{,}83^{8}\\
&= 0{,}2951\ldots \approx 0{,}295
\end{aligned}$$

Vastaus a) 0,9995 b) 0,295

164

Opiskelija tietää vastauksen 10 väitteeseen, mutta joutuu arvaamaan loput 15 vastausta. Todennäköisyys vastata oikein on $\frac{1}{2}$.

Opiskelijan pitää saada arvatuista vastauksista vähintään 5 oikein, jotta hän läpäisee testin. Tapahtuman ”opiskelija arvaa ainakin 5 vastausta oikein” vastatapahtuma on ”opiskelija arvaa 0, 1, 2, 3 tai 4 oikein”.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{opiskelija arvaa ainakin 5 oikein})\\
&= 1 - P(\text{opiskelija arvaa 0, 1, 2, 3 tai 4 oikein})\\
&= 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4))\\
&= 1 - (\left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \binom{15}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{14} + \binom{15}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\\
&\qquad + \binom{15}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{15}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11})\\
&= \frac{30\ 827}{32\ 768} = 0{,}9407... \approx 0{,}94
\end{aligned}
$$

Vastaus $0{,}94$

165

a) Todennäköisyys, että satunnainen kaupungin asukas vastustaa rakentamista on $\frac{1}{5} = 0,2$.

Jos vastustajien osuus otoksessa olisi sama, tulisi 10 hengen otoksessa olla 2 vastustajaa. Koska kaupunki on suuri, tapahtuma voidaan ajatella toistokokeeksi.

P(10 hengestä täsmälleen kaksi vastustaa rakentamista)

$= \binom{10}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8$

$= 0,3019... \approx 0,302$

b) Lukion 40 opettajasta joka viides eli $\frac{40}{5}=8$ opettajaa vastustaa rakentamista.

Jos vastustajien osuus otoksessa olisi sama, tulisi 10 hengen otoksessa olla 2 vastustajaa.

Opettajista voidaan 10 hengen otos $\binom{40}{10}$ tavalla.

2 vastustajaa voidaan valita kahdeksan vastustajan joukosta $\binom{8}{2}$ tavalla ja 8 kannattajaa 32 kannattajan joukosta $\binom{32}{8}$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(10$ valitusta opettajasta 2 vastustaa rakentamista$)$

$$=\frac{\binom{8}{2}\binom{32}{8}}{\binom{40}{10}}$$

$$=0,3474... \approx 0,347$$

Vastaus a) 0,302 b) 0,347

166

Paras tulos ennen Mirvan ja Virven joukkuetta on 4 kymppiä.
Voittaakseen Mirvan ja Virven on heitettävä 5 tai 6 kymppiä.

Mirva osuu kymppiin todennäköisyydellä 0,75 ja Virve todennäköisyydellä 0,35.

Lasketaan todennäköisyydet.

$$
\begin{aligned}
&P(6 \text{ kymppiä}) \\
&= P(\text{Mirva saa 3 kymppiä ja Virve saa 3 kymppiä}) \\
&= P(\text{Mirva saa 3 kymppiä}) \cdot P(\text{Virve saa 3 kymppiä}) \\
&= 0,75^3 \cdot 0,35^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(5 \text{ kymppiä}) \\
&= P(\text{Mirva saa 3 ja Virve 2 TAI Mirva saa 2 ja Virve 3 kymppiä}) \\
&= P(\text{Mirva 3 ja Virve 2}) + P(\text{Mirva 2 ja Virve 3}) \\
&= 0,75^3 \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,35^2 \cdot 0,65^1 + \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^1 \cdot 0,35^3
\end{aligned}
$$

Lasketaan voiton todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{Mirva ja Virve voittavat}) \\
&= P(6 \text{ kymppiä}) + P(5 \text{ kymppiä}) \\
&= 0,75^3 \cdot 0,35^3 + 0,75^3 \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,35^2 \cdot 0,65^1 + \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^1 \cdot 0,35^3 \\
&= 0,1369... \approx 0,14
\end{aligned}
$$

Vastaus 0,14

167

Tavallisesta korttipakasta nostetaan kortteja umpimähkään niin, että nostettu kortti palautetaan aina pakkaan.

a) Tapahtuman ”ainakin yksi ässä” vastatapahtuma on ”ei yhtään ässää”. Ässän todennäköisyys on $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

Muodostetaan lauseke todennäköisyydelle, että n:stä kortista ainakin yksi on ässä.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi ässä}) &= 1-P(\text{ei yhtään ässää}) \\ &= 1-\left(\frac{12}{13}\right)^n \end{aligned}$$

Todennäköisyyden tulee olla yli $0,8$. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$1-\left(\frac{48}{52}\right)^n > 0,8$$ Ratkaistaan laskimella.

$$n > 20,107...$$

Kortteja on nostettava vähintään 21 kappaletta.

b) Tapahtuman ”ainakin kaksi ässää” vastatapahtuma on ”0 tai 1 ässä”.

Muodostetaan lauseke todennäköisyydelle, että n:stä kortista ainakin kaksi on ässää.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{ainakin kaksi ässä}) \\
&= 1 - P(\text{ei yhtään ässää tai yksi ässä}) \\
&= 1 - P(\text{ei yhtään ässää}) + P(\text{yksi ässä}) \\
&= 1 - (\left(\frac{12}{13}\right)^n + \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^1 \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^{n-1}) \\
&= 1 - (\left(\frac{12}{13}\right)^n + \frac{n}{13} \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^{n-1})
\end{aligned}
$$

Todennäköisyys, että saadaan ainakin kaksi ässää, on sitä suurempi, mitä enemmän kortteja nostetaan. Epäyhtälön $P > 0{,}8$ ratkaisu voidaan selvittää kokeilemalla esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	1	0
2	2	0,00592
3	3	0,01684
…	…	…
36	36	0,77581
37	37	0,78874
38	38	0,80101
39	39	0,81264

Kaava soluun B1:

=1–((12/13)^A1+A1/13*(12/13)^(A1–1))

Kortteja on nostettava vähintään 38 kappaletta.

Vastaus a) 21 b) 38

168

Kuukauden aikana Ava ja Severi pelaavat tennistä n peliä. Ava voittaa yksittäisen pelin todennäköisyydellä 0,40.

Muodostetaan lauseke todennäköisyydelle, että Ava voittaa täsmälleen 2 peliä.

P(Ava voittaa täsmälleen kaksi peliä)

$$= \binom{n}{2} \cdot 0,40^2 \cdot 0,60^{n-2}$$

$$= 2 \cdot 0,6^n \cdot n \cdot (n-1)$$

Mitä enemmän pelejä pelataan, sitä suurempi on todennäköisyys, että Ava voittaa täsmälleen kaksi peliä. Yhtälö $P = 0,121$ voidaan ratkaista kokeilemalla esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	**B**
1	1	0
2	2	0,160
3	3	0,288
…	…	
9	9	0,161
10	10	0,121
11	11	0,089

Ava ja Severi pelaavat 10 peliä.

Vastaus 10 peliä

169

Tehtaan arvion mukaan sen tuottamista LED-lampuista viallisia on 1 %. Lamput pakataan kahdeksan lampun pakkauksiin.

a) Tapauksen ”pakkauksessa on ainakin yksi viallinen lamppu” vastatapahtuma on ”kaikki lamput ovat ehjiä”. Lamppu on ehjä todennäköisyydellä 0,99.

$$P(\text{ainakin yksi viallinen lamppu})$$
$$=1-P(\text{kaikki lamput ehjiä})$$
$$=1-0,99^8$$
$$=0,07725...\approx 0,077$$

b) $P(\text{pakkauksessa on täsmälleen kaksi viallista lamppua})$

$$=\binom{8}{2}\cdot 0,01^2\cdot 0,99^6$$
$$=0,002636\approx 0,0026$$

c) Kyseessä on ehdollinen todennäköisyys: pakkauksessa on täsmälleen kaksi viallista, kun tiedetään, että pakkauksessa on ainakin yksi viallinen.

$$P(\text{täsmälleen kaksi viallista} \mid \text{ ainakin yksi viallinen})$$
$$= \frac{P(\text{täsmälleen kaksi viallista ja ainakin yksi viallinen})}{P(\text{ainakin yksi viallinen})}$$
$$= \frac{P(\text{täsmälleen kaksi viallista})}{P(\text{ainakin yksi viallinen})}$$
$$= \frac{\binom{8}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^6}{1 - 0{,}99^8}$$
$$= 0{,}03412 \approx 0{,}034$$

Vastaus a) 0,077 b) 0,0026 c) 0,034

170

Olkoon tapahtuman A todennäköisyys yksittäisessä toistossa p.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p.

$$P(3 \text{ toistossa kerran}) = 0,27$$
$$\binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^2 = 0,27$$
$$3p(1-p)^2 = 0,27$$

Ratkaistaan laskimella.

$p = 0,1148\ldots$ tai $p = 0,6185\ldots$ tai $p = 1,266\ldots$

Koska todennäköisyys $0 \leq p \leq 1$, niin $p = 0,1148\ldots$ tai $p =$ $0,6185\ldots$.

Lasketaan todennäköisyys, että A tapahtuu 6 toistossa täsmälleen kaksi kertaa.

1) $p = 0,1148\ldots$

$$P(A \text{ tapahtuu 6 toistossa 2 kertaa})$$
$$= \binom{6}{2} \cdot 0,1148...^2 \cdot (1-0,1148...)^4$$
$$= 0,1215 \approx 0,12$$

2) $p = 0{,}6185\ldots$

$P(A$ tapahtuu 6 toistossa 2 kertaa$)$

$= \binom{6}{2} \cdot 0{,}6185...^2 \cdot (1 - 0{,}6185...)^4$

$= 0{,}1215 \approx 0{,}12$

Vastaus 0,12

171

HPV voittaa pelin todennäköisyydellä $60\ \% = 0{,}6$.

Koska voittoon tarvitaan neljän ottelun voitto, pelataan loppuotteluissa korkeintaan seitsemän ottelua. HPV voittaa mestaruuden seuraavissa tapauksissa:

1) Pelataan 4 ottelua: HPV voittaa kaikki 4.
2) Pelataan 5 ottelua: HPV voittaa neljästä ensimmäisestä kolme ja viidennen ottelun.
3) Pelataan 6 ottelua: HPV voittaa viidestä ensimmäisestä kolme ja kuudennen ottelun.
4) Pelataan 7 ottelua: HPV voittaa kuudesta ensimmäisestä kolme ja seitsemännen ottelun.

Lasketaan tapahtumien todennäköisyydet.

1) $P(\text{HPV 4 ekaa}) = 0{,}60^4 = 0{,}1296$

2) $P(\text{HPV 3, PPS 1, HPV})$
$$= \binom{4}{3} \cdot 0{,}60^3 \cdot 0{,}40^1 \cdot 0{,}60 = 0{,}20736$$

3) $P(\text{HPV 3, PPS 2, HPV})$
$$= \binom{5}{3} \cdot 0{,}60^3 \cdot 0{,}40^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}20736$$

4) $P(\text{HPV3, PPS 3, HPV})$
$$= \binom{6}{3} \cdot 0{,}60^3 \cdot 0{,}40^3 \cdot 0{,}60 = 0{,}165888$$

Lasketaan todennäköisyys, että HPV voittaa mestaruuden.

$$\begin{aligned}&P(\text{HPV voittaa mestaruuden})\\&=0{,}1296+0{,}20736+0{,}20736+0{,}165888\\&=0{,}7102...\approx 0{,}71\end{aligned}$$

Vastaus 0,71

172

Kun rahaa on heitetty 17 kertaa on Paulilla 8 pistettä ja Ollilla 9 pistettä.

Jotta Pauli voi voittaa eli saada 12 pistettä, kolikkoa on heitettävä vielä ainakin 4 kertaa.

Olli voi saada korkeintaan 2 pistettä, jotta Pauli voi voittaa. Siis kolikkoa voidaan heittää korkeintaan 6 kertaa niin, että Pauli voittaa.

Pauli voittaa seuraavissa tapauksissa:

1) Neljällä seuraavalla heitolla saadaan kruuna.
(Paulin pisteet 8 + 4 = 12.)

$P(4 \text{ kruunaa})$
$= 0,5^4 = 0,0625$

2) Neljällä seuraavalla heitolla saadaan kolme kruunaa ja yksi klaava ja viides heitto on kruuna.
(Paulin pisteet 8 + 4 = 12, Ollin 9 + 1 = 10.)

$P(3 \text{ kruunaa, 1 klaava, kruuna})$
$= \binom{4}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5 = 0,125$

3) Viidellä seuraavalla heitolla saadaan kolme kruunaa ja kaksi klaavaa ja kuudes heitto on kruuna.
(Paulin pisteet 8 + 4 = 12, Ollin 9 + 2 = 11.)

$P(\text{3 kruunaa, 2 klaavaa, kruuna})$
$= \binom{5}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 = 0,15625$

Lasketaan todennäköisyys, että Pauli voittaa pelin.

$P(\text{Pauli voittaa pelin})$
$= 0,0625 + 0,125 + 0,15625$
$= 0,34375 \approx 0,34$

Vastaus 0,34