52

a) Näytön voi valita 2 tavalla, värin 3 tavalla ja muistin määrän 2 tavalla.

Puhelimen kokoonpanon voi valita

$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ tavalla.

b) Suotuisia kokoonpanoja on vain 1. Kaikkiaan kokoonpanoja on 12.

$$P(\text{puhelimien kokoonpano on sama}) = \frac{1}{12} = 0{,}0833... \approx 0{,}083$$

Vastaus a) 12 b) $\frac{1}{12} \approx 0{,}083$

53

Rekisterikilven ensimmäinen kirjain voidaan valita 3 tavalla. Toinen ja kolmas kirjan voidaan valita kumpikin 29 tavalla.

Ensimmäinen numero voidaan valita 9 tavalla. Toinen ja kolmas numero voidaan valita kumpikin 10 tavalla.

Erilaisia rekisterikilpiä on

$3 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 2\ 270\ 700$ kappaletta.

Vastaus 2 270 700

54

a) Kuisma voi valita hihattoman paidan 3 tavalla, collegeshortsit 3 tavalla ja sandaalit 2 tavalla.

Asukokonaisuuden voi valita

$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ tavalla.

b) Kuisma voi valita paidan $4+3=7$ tavalla, shortsit $2+3=5$ tavalla ja kengät $1+2=3$ tavalla.

Asukokonaisuuden voi valita

$7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$ tavalla.

c) Olkoon tapahtuma A: ”Kuisma valitsee hihattoman paidan, collegeshortsit ja sandaalit”

Suotuisia asukokonaisuuksia on 18 kappaletta. Kaikkiaan asukokonaisuuksia on 105.

$$P(A) = \frac{18}{105} = \frac{6}{35} = 0{,}171... \approx 0{,}17$$

Vastaus a) 18 b) 105 c) $\frac{6}{35} \approx 0{,}17$

55

a) Avaimessa on 9 lovea, joissa jokaisessa on 6 vaihtoehtoista syvyyttä.

Erilaisten avainten lukumäärä on

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^9 = 10\ 077\ 696$$

b) Jos viereiset lovet eivät saa olla saman syvyiset, ensimmäinen lovi voidaan valita 6 tavalla ja loput 5 tavalla.

Erilaisten avainten lukumäärä on

$$6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 6 \cdot 5^8 = 2\ 343\ 750$$

Vastaus a) 10 077 696 b) 2 343 750

56

a) Korttipakassa on 9 numeroin merkittyä korttia.
Kaksinumeroisen luvun ensimmäinen numero voidaan valita 9 tavalla ja toinen 8 tavalla.

Kaksinumeroisia lukuja voidaan muodostaa

$9 \cdot 8 = 72$ kappaletta.

b) Kortteja, joissa numero on pienempi kuin 5, on 4 kappaletta.
Kortteja, joissa numero on suurempi kuin 5, on 4 kappaletta.

Lukuja, joissa ensimmäinen numero on pienempi kuin 5 ja toinen suurempi kuin 5 on

$4 \cdot 4 = 16$ kappaletta.

c) Lukuja, jotka ovat pienempiä kuin 20, ovat ne, joissa ensimmäinen numero on 1. Toisen numeron täytyy olla pariton eli 3, 5, 7 tai 9.

Lukuja, jotka ovat parittomia ja pienempiä kuin 20 on

$1 \cdot 4 = 4$ kappaletta.

Vastaus a) 72 b) 16 c) 4

57

a) Punaisia kortteja 26 kappaletta. Jokaisella nostolla punainen kortti voidaan nostaa 26 tavalla.

Neljä punaista korttia voidaan nostaa

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 = 456\ 976$ tavalla.

Kortteja on yhteensä 52.

Neljä korttia voidaan nostaa

$52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^4 = 7\ 311\ 616$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{kaikki 4 korttia ovat punaisia}) = \frac{456\ 976}{7\ 311\ 616} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

b) Kun kortteja ei palauteta pakkaan, jokaisella nostolla on yksi kortti vähemmän kuin edellisellä nostolla.

Neljä punaista korttia voidaan nostaa

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\ 800$ tavalla.

Neljä korttia voidaan nostaa

$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = 6\ 497\ 411$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(\text{kaikki 4 korttia ovat punaisia})$

$$= \frac{358\ 800}{6\ 497\ 411} = \frac{46}{833} = 0,05522... \approx 0,0552$$

Vastaus a) $\frac{1}{16} = 0,0625$ b) $\frac{46}{833} \approx 0,0552$

58

a) Veikkausrivin täytössä on 9 peräkkäistä vaihetta, joissa jokaisessa on 3 vaihtoehtoa.

Erilaisten veikkausrivien määrä on

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^9 = 19\ 683$.

b) Tapahtumalle ”9 oikein” suotuisia rivejä on 1 kappale.

$$P(9\text{ oikein}) = \frac{1}{19\ 683} = 5{,}080...\cdot 10^{-5} \approx 5{,}1\cdot 10^{-5}$$

c) Jokaisessa 9 vaiheessa on 2 väärää vaihtoehtoa.

Kokonaan väärien rivien lukumäärä on

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^9 = 512$.

d) $P(\text{rivissä ei ole yhtään oikein})$

$$= \frac{512}{19\ 683} = 0{,}0260... \approx 0{,}026$$

Vastaus a) 19 683 b) $5{,}1\cdot 10^{-5}$
c) 512 d) $0{,}026$

59

a) Nopan jokaisella heitolla on heitolla on 6 tulosvaihtoehtoa.

Kun noppaa heitetään kolme kertaa, tulosrivejä on yhteensä

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ kappaletta.

b) Koska sama silmäluku ei saa toistua, jokaisella heitolla on yksi vaihtoehto vähemmän kuin edellisellä.

Tulosrivejä on yhteensä

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ kappaletta.

c) Lasketaan millä todennäköisyydellä jokaisella heitolla saadaan eri silmäluku.

$P(\text{jokaisella heitolla saadaan eri silmäluku})$

$$= \frac{120}{216} = 0,555... > 0,5$$

Todennäköisyys on suurempi kuin 0,5, joten vedonlyönti kannattaa.

Vastaus a) 216 b) 120 c) kannattaa

60

Tapahtuman ”ainakin yksi on keltainen” vastatapahtuma on ”ei yhtään keltaista”.

Laatikossa on yhteensä 50 palloa. Laatikosta voidaan nostaa neljä palloa

$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = 5\ 527\ 200$ tavalla.

Laatikossa on 40 valkoista palloa. Laatikosta voidaan nostaa neljä palloa, niin ettei yksikään ole keltainen

$40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 2\ 193\ 360$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$$\begin{aligned}
&P(\text{ainakin yksi on keltainen}) \\
&= 1 - P(\text{ei yhtään keltaista}) \\
&= 1 - \frac{2\ 193\ 360}{5\ 527\ 200} \\
&= \frac{13891}{23030} = 0{,}603.. \approx 0{,}60
\end{aligned}$$

Vastaus $0{,}60$

61

200 pinssistä voidaan valita 6 pinssiä

$200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196 \cdot 195 = 59\ 334\ 210\ 936\ 000$ tavalla.

Asiakkaan pinssierässä oli ehjiä pinssejä $200 - 15 = 185$ kappaletta.

Erän ehjistä pinsseistä voidaan valita tarkastettavat 6 pinssiä

$185 \cdot 184 \cdot 183 \cdot 182 \cdot 181 \cdot 180 = 36\ 937\ 126\ 699\ 200$ tavalla.

Lasketaan millä todennäköisyydellä asiakkaan 200 pinssin erästä poimittu 6 pinssin näyte sisältää vain ehjiä pinssejä.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{vain ehjiä pinssejä}) \\
&= \frac{36\ 937\ 126\ 699\ 200}{59\ 334\ 210\ 936\ 000} \\
&= 0{,}6225... \\
&\approx 0{,}62 \\
&= 62\ \%
\end{aligned}
$$

Vastaus 62 %

62

a) Alkuruuan voi valita 5 tavalla, pääruuan 4 tavalla, jälkiruuan 2 tavalla ja ruokajuoman 6 tavalla.

Ateriakokonaisuuden voi valita

$5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 = 240$ tavalla.

b) Alku- tai jälkiruuan voi valita $5 + 2 = 7$ tavalla, pääruuan 4 tavalla ja ruokajuoman 6 tavalla.

Ateriakokonaisuuden voi valita

$7 \cdot 4 \cdot 6 = 168$ tavalla.

Vastaus a) 240 b) 168

63

a) Juhlasalissa on yhteensä 6 valokatkaisijaa, joissa jokaisessa on kaksi vaihtoehtoa (päällä/pois).

Juhlasali valaistus voidaan valita

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^6=64$ tavalla.

Kun otetaan huomioon, että salia ei ole valaistu lainkaan mikäli kaikki katkaisija ovat pois päältä saadaan valaistusvaihtoehtojen lukumääräksi $64 - 1 = 63$.

b) Tapahtuman ”näyttämö on valaistuna ja katsomo pimeänä” toteuttaa ainoastaan yksi valaistusvaihtoehto.

$$P(\text{näyttämö valaistu ja katsomo pimeä})$$
$$=\frac{1}{64}=0{,}0156...\approx 0{,}016$$

Vastaus a) 63 b) $\frac{1}{64}\approx 0{,}016$

64

a) Numerolukossa on valittavana viisi numeroa ja jokaisessa on 10 vaihtoehtoa.

Jos sama numero voi esiintyä useamman kerran numerosarjoja on yhteensä

$$10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=10^5=100\ 000.$$

b) Jos sama numero ei voi esiintyä kuin kerran numerosarjassa, vaihtoehtojen määrä pienenee aina yhdellä edelliseen verrattuna.

Tällöin numerosarjoja on yhteensä

$$10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6=30\ 240.$$

Vastaus a) 100 000 b) 30 240

65

Nelinumeroisen luvun numerot valitaan heittämällä noppaa neljä kertaa

a) Tapahtumassa ”kaksi ensimmäistä numeroa ovat ykkösiä ja muut parillisia” kaksi ensimmäistä numeroa voidaan valita kumpikin yhdellä tavalla ja kaksi jälkimmäistä kumpikin 3 tavalla.

Lukuja on yhteensä $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$.

b) Tapahtumassa ”kaksi keskimmäistä numeroa ovat ykkösiä ja muut parittomia” kaksi keskimmäistä numeroa voidaan valita kumpikin yhdellä tavalla sekä ensimmäinen ja viimeinen kumpikin 3 tavalla.

Lukuja on yhteensä $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 9$.

c) Tapahtumassa ”joka toinen numero on ykkönen ja joka toinen parillinen” ensimmäinen numero voi olla ykkönen tai parillinen.

Jos ensimmäinen numero on ykkönen, toinen on parillinen, kolmas ykkönen ja neljäs parillinen. Ensimmäinen ja kolmas numero voidaan valita kumpikin yhdellä tavalla. Toinen ja neljäs voidaan valita kumpikin 3 tavalla.

Lukuja on $1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9$.

Jos ensimmäinen numero on parillinen, toinen on ykkönen, kolmas parillinen ja neljäs ykkönen. Ensimmäinen ja kolmas numero voidaan valita kumpikin 3 tavalla. Toinen ja neljäs kimpikin yhdellä tavalla.

Lukuja on $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 9$.

Lukuja on yhteensä $9 + 9 = 18$.

d) Tapahtumassa ”numeroista täsmälleen kaksi on ykkösiä ja kaksi parillisia” on seuraavat tapaukset: (p = parillinen)
11pp, 1p1p, 1pp1, p11p, p1p1, pp11

Jokaisessa tapauksessa kaksi numeroista voidaan valita yhdellä tavalla ja kaksi 3 tavalla. Lukuja on $3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 9$ kappaletta.

Erilaisia tapauksia on 6 kappaletta, joten lukuja on yhteensä $6 \cdot 9 = 54$.

Vastaus a) 9 b) 9 c) 18 d) 54

66

Noppaa heitettäessä on 6 tulosvaihtoehtoa.

Kun noppaa heitetään neljä kertaa, on tulosrivejä on

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1\,296$ kappaletta.

Jos sama silmäluku ei saa toistua, jokaisessa heitossa silmäluvulle on yksi vaihtoehto vähemmän kuin edellisessä heitossa.

Tulosrivejä, joissa joka heitolla saadaan eri silmäluku, on

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ kappaletta.

Lasketaan, millä todennäköisyydellä jokaisella heitolla saadaan eri silmäluku.

$P(\text{jokaisella heitolla eri silmäluku})$

$= \dfrac{360}{1296} = 0{,}277... < 0{,}5$

Tapahtuman puolesta ei kannata lyödä vetoa, koska sen todennäköisyys on alle 0,5.

Vastaus ei kannata

67

a) Ensimmäisen ravilähdön voittaja voidaan veikata 11 tavalla, toisen 12 tavalla, kolmannen 10 tavalla ja neljännen 9 tavalla.

Erilaisia veikkausrivejä on yhteensä

$11 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 9 = 11\ 880$.

b) Rivejä, joissa on kaikki neljä oikein, on yksi kappale.

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{neljä oikein}) = \frac{1}{11\ 880} = 8{,}417... \cdot 10^{-5} \approx 8{,}4 \cdot 10^{-5}$$

c) Ensimmäisessä lähdössä on 10 hevosta, jotka eivät ole voittajia. Vastaavasti toisessa lähdössä on 11, kolmannessa 9 ja neljännessä 8 hevosta, jotka eivät ole voittajia.

Veikkausrivejä, joissa ei ole yhtään oikein, on yhteensä

$10 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 = 7\ 920$

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{ei yhtään oikein}) = \frac{n(\text{väärät rivit})}{n(\text{kaikki})}$$

$$= \frac{7\ 920}{11\ 880} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$$

d) Tapahtuman ”ainakin yksi oikein” vastatapahtuma on ”ei yhtään oikein”.

Lasketaan todennäköisyys.

$$\begin{aligned}
&P(\text{ainakin yksi oikein})\\
&=1-P(\text{ei yhtään oikein})\\
&=1-\frac{2}{3}\\
&=\frac{1}{3}\approx 0{,}33
\end{aligned}$$

Vastaus a) 11 880 b) $8{,}4\cdot 10^{-5}$

c) $\frac{2}{3}\approx 0{,}67$ d) $\frac{1}{3}\approx 0{,}33$

68

a) Perheessä on viisi lasta. Jokaisen syntymäpäivän viikonpäivä voidaan valita 7 tavalla.

Vaihtoehtoja on yhteensä

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16\ 807.$$

Jotta jokainen olisi syntynyt eri viikonpäivänä, ensimmäinen viikonpäivä voidaan valita 7 tavalla ja seuraavilla on aina yksi päivä vähemmän vaihtoehtoja kuin edellisellä.

Suotuisia vaihtoehtoja on yhteensä

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2\ 520.$$

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{kaikki lapset ovat syntyneet eri viikonpäivänä})$$
$$= \frac{2\ 520}{16\ 807}$$
$$= \frac{360}{2401} = 0{,}1499... \approx 0{,}15$$

b) Tapahtuman ”ainakin kaksi on syntynyt samana viikonpäivänä” vastatapahtuma on ”kaikki lapset ovat syntyneet eri viikonpäivinä”.

Lasketaan todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{ainakin kaksi on syntynyt samana viikonpäivänä})\\
&= 1 - P(\text{kaikki lapset ovat syntyneet eri viikonpäivinä})\\
&= 1 - \frac{360}{2401}\\
&= \frac{2041}{2401} = 0{,}8500... \approx 0{,}85
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $0{,}15$ b) $0{,}85$

69

Raviveikkauksessa veikataan 2 ensimmäistä hevosta maaliintulojärjestyksessä.

Jos ensimmäisessä lähdössä oli x kappaletta hevosia, mahdollisia veikkausrivejä oli $x\cdot(x-1)=x^2-x$.

Toisessa lähdössä oli neljä hevosta enemmän kuin ensimmäisessä eli $x+4$ kappaletta. Tällöin mahdollisia veikkausrivejä oli $(x+4)(x+3)=x^2+7x+12$.

Toisessa lähdössä veikkausmahdollisuuksia oli 68 enemmän kuin ensimmäisessä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x^2+7x+12} &\boldsymbol{= x^2-x+68}\\ \boldsymbol{8x} &\boldsymbol{=56}\\ \boldsymbol{x} &\boldsymbol{=7}\end{aligned}$$

Ensimmäisessä lähdössä oli 7 hevosta ja toisessa $7+4=11$ hevosta.

Vastaus 7 ja 11

70

Positiivisia nelinumeroisia kokonaislukuja ovat luvut $1000-9999$, joita on yhteensä $9999 - 999 = 9000$ kappaletta.

Selvitetään ensin, kuinka monessa luvussa ei ole yhtään nelosta eikä kuutosta.

Ensimmäinen numero voidaan valita luvuista 1, 2, 3, 5, 7, 8 ja 9 eli seitsemällä tavalla. Muut kolme numeroa voidaan valita luvuista 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9 ja 0 eli kahdeksalla tavalla.

Lukuja, joissa ei ole yhtään nelosta eikä kuutosta, on yhteensä

$7\cdot 8\cdot 8\cdot 8=3584$ kappaletta.

Siis lukuja, joissa on ainakin yksi nelonen tai kuutonen, on

$9000-3584=5416$.

Vastaus 5416

71

a) Oletetaan, että Miia valitsee istumapaikkansa ensin. Pyöreässä 8 hengen pöydässä Miia voi valita paikkansa 8 tavalla. Koska Mirka haluaa istua Miian vieressä, hän voi valita paikkansa 2 tavalla. Tämän jälkeen kolmas henkilö voi valita paikkansa 6 tavalla ja neljäs 5 tavalla.

Seurue voi valita paikkansa

$8 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 = 480$ tavalla.

b) Oletetaan, että Miia valitsee istumapaikkansa ensin. Penkillä, johon mahtuu 8 henkilöä, Miia voi valita joko päätypaikan tai keskipaikan.

1) Miia voi valita päätypaikan 2 tavalla. Koska Mirka haluaa istua Miian vieressä, hän voi valita paikkansa 1 tavalla. Tämän jälkeen kolmas henkilö voi valita paikkansa 6 tavalla ja neljäs 5 tavalla.

Seurue voi valita paikkansa $2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 60$ tavalla.

2) Miia voi valita keskipaikan 6 tavalla. Koska Mirka haluaa istua Miian vieressä, hän voi valita paikkansa 2 tavalla. Tämän jälkeen kolmas henkilö voi valita paikkansa 6 tavalla ja neljäs 5 tavalla

Seurue voi valita paikkansa $6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 = 360$ tavalla.

Seurue voi täten valita paikkansa penkiltä kaikkiaan
$60 + 360 = 420$ tavalla.

Vastaus a) 480 b) 420

72

Polynomifunktion $f(x) = ax^2 - bx + c$ kertoimet arvotaan nopalla. Kertoimia arvotaan 3 ja jokaisella heitolla on 6 vaihtoehtoa.

Erilaisia funktioita on $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ kappaletta.

a) Funktiolle tulee päteä $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ a \cdot 0^2 - b \cdot 0 + c &= 1 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Kertoimet a ja b voivat olla mitä tahansa, joten ne voidaan valita kumpikin 6 tavalla. Kertoimen c on oltava 1, joten se voidaan valita yhdellä tavalla.

Suotuisia funktioita on $6 \cdot 6 \cdot 1 = 36$.

$$\begin{aligned} &P(\text{funktiolle pätee } f(0) = 1) \\ &= \frac{36}{216} \\ &= \frac{1}{6} = 0{,}166... \approx 0{,}17 \end{aligned}$$

b) Funktiolle tulee päteä $f(1)=0$.

$$
\begin{aligned}
f(1)&=0\\
a\cdot 1^2-b\cdot 1+c&=0\\
a-b+c&=0\\
c&=b-a
\end{aligned}
$$

Taulukoidaan kertoimen a ja b tulokset ja lasketaan ruutuihin kertoimen c suotuisten alkeistapausten lukumäärä.

kerroin *a* \ kerroin *b*	1	2	3	4	5	6
6	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1

Suotuisia funktioita on 15.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{funktiolle pätee } f(1)=0)\\
&=\frac{15}{216}\\
&=\frac{5}{72}=0{,}0694\ldots\approx 0{,}069
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 0,17 b) 0,069

73

Koska n-kulmiossa on n kärkeä, voidaan lävistäjän ensimmäinen kärki valita n tavalla.

Lävistäjä yhdistää kaksi kärkipistettä. Lävistäjän toinen kärki ei voi olla ensin valittu kärki, eikä kumpikaan valitun viereisistä kärjistä. Toinen kärki voidaan siis valita $n-3$ tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan lävistäjien määrä olisi $n(n-3)$. Nyt mukaan on kuitenkin laskettu jokainen lävistäjä kaksi kertaa: jos A ja B ovat n-kulmion kärkiä, niin lävistäjä AB on sama kuin lävistäjä BA.

Lävistäjiä on siis $\dfrac{n(n-3)}{2}$ kappaletta.

Vastaus $\dfrac{n(n-3)}{2}$

74

a) Daltonin neljä veljestä voivat asettua jonoon $4! = 24$ tavalla.

b) Seitsemän veljestä voivat asettua jonoon $7! = 5040$ tavalla.

c) Hallituksen 17 ministeriä voivat asettua jonoon
$17! = 355\ 687\ 428\ 096\ 000 \approx 3{,}55 \cdot 10^{14}$ tavalla.

Vastaus a) 24
b) 5040
c) $355\ 687\ 428\ 096\ 000 \approx 3{,}55 \cdot 10^{14}$

75

a) Yhdeksän kirjaa voidaan järjestää riviin $9! = 362\,880$ tavalla.

b) Kuusi runokirjaa voidaan järjestää riviin $6! = 720$ tavalla.

Kolme laulukirjaa voidaan järjestää riviin $3! = 6$ tavalla.

Kirjojen järjestys voidaan valita 2 tavalla, joko runokirjat tai laulukirjat ensin.

Rivejä, joissa saman aihepiirin kirjat ovat peräkkäin, on $6! \cdot 3! \cdot 2 = 8640$.

Vastaus a) 362 880 b) 8640

76

Seitsemän kääpiötä voidaan asettaa jonoon $7! = 5040$ tavalla.

a) Viisas voidaan asettaa jonon ensimmäiseksi 1 tavalla ja muut kuusi kääpiötä voidaan asettaa jonoon $6! = 720$ tavalla.

Kääpiöt voidaan asettaa jonoon niin, että Viisas on ensimmäisenä, $1 \cdot 6! = 6! = 720$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{Viisas on jonossa ensimmäisenä}) = \frac{6!}{7!}$$
$$= \frac{1}{7} = 0{,}142... \approx 0{,}14$$

b) Lystikäs voidaan asettaa jonon kuudenneksi 1 tavalla ja muut kuusi kääpiötä voidaan asettaa jonoon $6! = 720$ tavalla.

Kääpiöt voidaan asettaa jonoon niin, että Lystikäs on kuudes, $1 \cdot 6! = 6! = 720$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{Lystikäs on jonossa kuudes}) = \frac{6!}{7!}$$
$$= \frac{1}{7} = 0{,}142... \approx 0{,}14$$

c) Viisas voidaan asettaa jonon ensimmäiseksi 1 tavalla ja Lystikäs voidaan asettaa jonon kuudenneksi 1 tavalla ja muut viisi kääpiötä voidaan asettaa jonoon $5! = 120$ tavalla.

Kääpiöt voidaan asettaa jonoon niin, että Viisas on ensimmäinen ja Lystikäs kuudes, $1 \cdot 1 \cdot 5! = 5! = 120$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

P(Viisas on jonossa ensimmäisenä ja Lystikäs kuudentena)

$$= \frac{5!}{7!} = \frac{1}{42} = 0{,}0238... \approx 0{,}024$$

Vastaus a) $\frac{1}{7} \approx 0{,}14$ b) $\frac{1}{7} \approx 0{,}14$ c) $\frac{1}{42} \approx 0{,}024$

77

15 elokuvan joukosta voidaan muodostaa 7 elokuvan jono

$(15)_7 = \frac{15!}{(15-7)!} = \frac{15!}{8!} = 32\,432\,400$ tavalla.

Vastaus 32 432 400

78

a) 16 retkeilijää voivat asettua 16 paikalle

$16! = 20\,922\,789\,888\,000 \approx 2{,}1 \cdot 10^{13}$ tavalla.

b) 16 retkeilijää voivat asettua 25 paikalle

$$\begin{aligned}(25)_{16} &= \frac{25!}{(25-16)!} \\ &= \frac{25!}{9!} \\ &= 42\,744\,736\,671\,436\,800\,000 \approx 4{,}3 \cdot 10^{19}\end{aligned}$$ tavalla.

Vastaus a) $2{,}1 \cdot 10^{13}$ b) $4{,}3 \cdot 10^{19}$

79

Laatikossa on kirjaimet PERMUTOIDA. Kymmenestä kirjaimesta voidaan muodostaa kuuden kirjaimen jono

$(10)_6 = 151\ 200$ tavalla.

a) Sana MUOTIA voidaan muodostaa kirjaimista yhdellä tavalla. Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{kirjaimista muodostuu sana MUOTIA})$$
$$= \frac{1}{151\ 200} = 6{,}613... \cdot 10^{-6} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-6}$$

b) Sanan alku TAI voidaan muodostaa kirjaimista yhdellä tavalla. Loput kolme kirjainta voidaan valita jäljellä olevista 7 kirjaimesta $(7)_3 = 210$ tavalla.

Suotuisia järjestyksiä on siis $1 \cdot 210 = 210$ kappaletta.

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{kirjaimista muodostuu sana, joka alkaa TAI})$$
$$= \frac{210}{151\ 200}$$
$$= \frac{1}{720} = 0{,}00138... \approx 0{,}0014$$

Vastaus a) $6{,}6 \cdot 10^{-6}$ b) $0{,}0014$

80

12 pallosta voidaan muodostaa 3 pallon jono

$(12)_3 = 1320$ tavalla.

Suotuisia arvauksia, joilla voittaa päävoiton, on vain yksi.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(\text{yhdellä arvatulla rivillä voittaa päävoiton})$

$= \dfrac{1}{1320} = 0,000757... \approx 0,00076$

Vastaus $\dfrac{1}{1320} \approx 0,00076$

81

a) Valitaan ensin istumapaikka yhdelle vieraalle. Loput 9 vierasta voidaan sijoittaa pöytään

$9! = 362\,880$ tavalla.

b) Valitaan ensin istumapaikka yhdelle naisvieraalle. Lopuille neljälle naiselle on käytössä neljä paikkaa (joka toinen paikka), joille heidät voidaan sijoittaa $4! = 24$ tavalla.

Miehille jää viisi paikkaa, joille miehet voidaan sijoittaa $5! = 120$ tavalla

Vieraat voidaan sijoittaa 10 istumapaikalle $4! \cdot 5! = 2880$ tavalla.

Vastaus a) 362 880 b) 2880

82

a) 52 kortin korttipakasta voidaan valita seitsemän korttia

$\binom{52}{7} = 133\ 784\ 560$ tavalla.

b) 11 erilaisen suklaakonvehdin rasiasta voidaan valita kaksi konvehtia $\binom{11}{2} = 55$ tavalla.

c) 15 kravatista voidaan valita matkalle kolme kravattia $\binom{15}{3} = 455$ tavalla

Vastaus a) 133 784 560 b) 55 c) 455

83

a) Samaan ruudukkoon on merkitty 8 numeroa.
8 numerosta voidaan muodostaa 7 numeron rivejä

$\binom{8}{7} = 8$ kappaletta.

b) Samaan ruudukkoon on merkitty 9 numeroa.
9 numerosta voidaan muodostaa 7 numeron rivejä

$\binom{9}{7} = 36$ kappaletta.

c) Samaan ruudukkoon on merkitty 10 numeroa.
10 numerosta voidaan muodostaa 7 numeron rivejä

$\binom{10}{7} = 120$ kappaletta.

d) Samaan ruudukkoon on merkitty 11 numeroa.
11 numerosta voidaan muodostaa 7 numeron rivejä

$\binom{11}{7} = 330$ kappaletta.

Vastaus a) 8 b) 36 c) 120 d) 330

84

a) 18 opiskelijasta voidaan valita työpajaan A osallistuvat 8 opiskelijaa

$\binom{18}{8} = 43\ 758$ tavalla.

b) 18 opiskelijasta voidaan valita työpajaan B osallistuvat 10 opiskelijaa

$\binom{18}{10} = 43\ 758$ tavalla.

Vastaus a) 43 758 b) 43 758

Huomaa, että valittaessa työpajaan A osallistuvat 8 opiskelijaa, tulee samalla valittua työpajaan A osallistuvat 10 opiskelijaa.

85

a) 40 lottonumerosta voidaan arpoa 7 voittonumeroa
$\binom{40}{7} = 18\ 643\ 560$ tavalla.

Neljä oikeaa numeroa arvotuista 7 numerosta voidaan valita
$\binom{7}{4} = 35$ tavalla.

Kolme väärää numeroa voidaan valita 33 muun numeron joukosta $\binom{33}{3} = 5456$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(\text{Petra saa täsmälleen 4 voittonumeroa oikein})$

$$= \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{33}{3}}{\binom{40}{7}} = \frac{4774}{466\ 089} = 0{,}0102... \approx 0{,}010$$

b) Kolme oikeaa numeroa 7 arvotun numeron joukosta voidaan valita $\binom{7}{3} = 35$ tavalla.

Yksi oikea lisänumero voidaan valita yhdellä tavalla.

Kolme väärää numeroa voidaan valita 32 muun numeron joukosta $\binom{32}{3} = 4960$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{Petra saa täsmälleen 3 voittonumero ja lisänumeron oikein})$$
$$= \frac{\binom{7}{3} \cdot 1 \cdot \binom{32}{3}}{\binom{40}{7}} = \frac{4340}{466\ 089} = 0{,}00931... \approx 0{,}0093$$

Vastaus a) $0{,}010$ b) $0{,}0093$

86

a) 50 hedelmän joukosta voidaan tehdä 5 hedelmän otos

$\binom{50}{5} = 2\ 118\ 760$ tavalla.

42 tuoreen hedelmän joukosta voidaan tehdä 5 hedelmän otos

$\binom{42}{5} = 850\ 668$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(\text{otoksessa ei ole yhtään pilaantunutta hedelmää})$

$$= \frac{\binom{42}{5}}{\binom{50}{5}} = \frac{30\ 381}{75\ 670} = 0{,}401... \approx 0{,}40$$

b) 8 pilaantuneen hedelmän joukosta voidaan tehdä yhden hedelmän otos $\binom{8}{1} = 8$ tavalla.

42 tuoreen hedelmän joukosta voidaan tehdä 4 hedelmän otos $\binom{42}{4} = 111\ 930$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

P(otoksessa on täsmälleen yksi pilaantunut hedelmä)

$$= \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{42}{4}}{\binom{50}{5}} = \frac{3198}{7567} = 0{,}422... \approx 0{,}42$$

c) Tapahtuman ”otoksessa on ainakin yksi pilaantunut hedelmä” vastatapahtuma on ”otoksessa ei ole yhtään pilaantunutta hedelmää”

Lasketaan todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{otoksessa on ainakin yksi pilaantunut hedelmä})\\
&= 1 - P(\text{otoksessa ei ole yhtään pilaantunutta hedelmää})\\
&= 1 - \frac{30\,381}{75\,670} = \frac{45\,289}{75\,670} = 0{,}598... \approx 0{,}60
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 0,40 b) 0,42 c) 0,60

87

a) 3 pojan joukosta voidaan valita 2 poikaa $\binom{3}{2} = 3$ tavalla.

5 tytön joukosta voidaan valita 2 tyttöä $\binom{5}{2} = 10$ tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan ryhmä, jossa on 2 poikaa ja 2 tyttöä, voidaan valita $\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2} = 30$ tavalla.

b) 'Ainakin yksi poika' tarkoittaa, että näytelmään valitaan 1 poika ja 3 tyttöä TAI 2 ja 2 tyttöä TAI 3 poikaa ja 1 tyttö. Vaihtoehtojen kokonaismäärä saadaan tuloperiaatteella.

$$\underbrace{\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{3}}_{\substack{\text{1 poika} \\ \text{3 tyttöä}}} + \underbrace{\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2}}_{\substack{\text{2 poikaa} \\ \text{2 tyttöä}}} + \underbrace{\binom{3}{3} \cdot \binom{5}{1}}_{\substack{\text{3 poikaa} \\ \text{1 tyttö}}} = 30 + 30 + 5 = 65$$

Vastaus a) 30 b) 65

88

Tapahtuman ”ainakin yksi ensimmäisen kerroksen huoneista” vastatapahtuma on ”ensimmäisessä kerroksessa ei ole yhtään vapaata huonetta”.

Kaikkiaan 22 huoneesta vapaina olevat 4 huonetta voidaan valita $\binom{22}{4}$ tavalla.

Muualla kuin ensimmäisessä kerroksessa on 18 huonetta. Näistä huoneista 4 vapaata huonetta voidaan valita $\binom{18}{4}$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
&\text{P(ainakin yksi ensimmäisen kerroksen huone on vapaana)} \\
&= 1 - \text{P(ensimmäisessä kerroksessa ei ole yhtään vapaata huonetta)} \\
&= 1 - \frac{\binom{18}{4}}{\binom{22}{4}} \\
&= \frac{851}{1463} = 0{,}581\ldots \approx 0{,}58
\end{aligned}
$$

Vastaus $0{,}58$

89

a) Riviin tulee viisi palloa.

Sijoitetaan riviin ensin kolme keltaista palloa. Viidestä paikasta kolme voidaan valita $\binom{5}{3}$ tavalla.

Sijoitetaan sen jälkeen riviin kaksi sinistä palloa. Näille voidaan valita paikat yhdellä tavalla.

Pallot voidaan asettaa riviin $\binom{5}{3} \cdot 1 = 10$ tavalla.

b) Riviin tulee 12 palloa.

Sijoitetaan riviin ensin neljä keltaista palloa. 12 paikasta neljä voidaan valita $\binom{12}{4}$ tavalla.

Sijoitetaan riviin seuraavaksi kolme sinistä palloa. Vapaana olevista kahdeksasta paikasta voidaan kolme paikkaa valita $\binom{8}{3}$ tavalla.

Sijoitetaan lopuksi riviin viisi punaista palloa. Näille voidaan valita paikat yhdellä tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan pallot voidaan asettaa riviin $\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{3}\cdot 1 = 27\ 720$ tavalla.

Vastaus a) 10 b) 27 720

90

Tasoon piirretyillä n suoralla voi olla korkeintaan yhtä monta leikkauspistettä kuin suorista voidaan muodostaa pareja.

n:stä suorasta voidaan valita 2 leikkaavaa suoraa $\binom{n}{2}$ tavalla.

Sievennetään lauseke.

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{\cancelto{1}{(n-2)!} \cdot (n-1) \cdot n}{2 \cdot \cancelto{1}{(n-2)!}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Vastaus $\frac{n(n-1)}{2}$

91

a) Seitsemän kirjaa voidaan järjestää riviin $7! = 5040$ tavalla.

b) Neljä lintukirjaa voidaan järjestää riviin $4!$ tavalla.

Kolme kasvikirjaa voidaan järjestää riviin $3!$ tavalla.

Kirjojen järjestys voidaan valita 2 tavalla, joko lintukirjat tai kasvikirjat ensin.

Rivejä, joissa saman aihepiirin kirjat ovat peräkkäin, on $4! \cdot 3! \cdot 2 = 288$.

c) Neljä lintukirjaa voivat olla peräkkäin seitsemän kirjan rivissä joko ensimmäisestä, toisesta, kolmannesta tai neljännestä kirjasta alkaen. Lintukirja-sarjan paikka rivissä voidaan valita 4 tavalla.

Lintukirjojen keskinäinen järjestys voidaan valita $4!$ tavalla ja kasvikirjojen keskinäinen järjestys voidaan valita $3!$ tavalla.

Järjestyksiä, joissa lintukirjat ovat peräkkäin, on kaikkiaan $4 \cdot 4! \cdot 3! = 576$.

Vastaus a) 5040 b) 288 c) 576

92

52 kortin pakka voidaan järjestää $52!$ $(\approx 8{,}1 \cdot 10^{67})$ tavalla.

Yhdessä vuodessa on 60 · 60 · 24 · 365 = 31 536 000 sekuntia. Jos tulostetaan yksi järjestys sekunnissa, aikaa kuluu

$$\frac{52!}{31\,536\,000} = 2{,}557... \cdot 10^{60} \approx 2{,}6 \cdot 10^{60} \text{ vuotta.}$$

Vastaus $2{,}6 \cdot 10^{60}$ vuotta

93

20 kuljettajan joukosta voidaan muodostaa 3 kuljettajan jono
$(20)_3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 6840$ tavalla.

Veikkauksista ainoastaan yksi on oikein.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(\text{veikkaus osuu oikein})$
$= \frac{1}{6840} = 0,000146... \approx 0,00015$

Vastaus $\frac{1}{6840} \approx 0,00015$

94

a) 72 matkustajaa voivat sijoittua istumaan 72 paikalle

$72! = 6{,}123... \cdot 10^{103} \approx 6{,}1 \cdot 10^{103}$ tavalla.

b) 72 matkustajaa voivat sijoittua istumaan 100 paikalle

$(100)_{72} = 3{,}060... \cdot 10^{128} \approx 3{,}1 \cdot 10^{128}$ tavalla.

Vastaus a) noin $6{,}1 \cdot 10^{103}$ b) noin $3{,}1 \cdot 10^{128}$

95

Kun sama kirjain voi esiintyä koodissa useamman kerran, niin 29 kirjaimesta voidaan arpoa 6 merkkinen koodi

$29^6 = 594\ 823\ 321$ tavalla.

a) MARKUS voidaan arpoa yhdellä tavalla. Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{koodi on MARKUS})$$
$$= \frac{1}{594\ 823\ 321} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-9}$$

b) Jos Timon koodi alkaisi kirjaimilla TIMO, neljä ensimmäistä kirjainta voidaan valita yhdellä tavalla ja kaksi viimeistä kumpikin 29 tavalla. Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{koodi alkaa kirjaimilla TIMO})$$
$$= \frac{1 \cdot 29 \cdot 29}{594\ 823\ 321} = \frac{1}{707\ 281} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-6}$$

c) Koodissa voi olla kirjainyhdistelmä PIA alkaen ensimmäisestä, toisesta, kolmannesta tai neljännestä kirjaimesta. Kirjainyhdistelmän paikka voidaan arpoa 4 tavalla.

Kirjain yhdistelmä PIA voidaan arpoa yhdellä tavalla ja muut 3 kirjainta kukin 29 tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(\text{koodissa on kirjainyhdistelmä PIA})$

$$= \frac{4 \cdot 1 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29}{594\ 823\ 321} = \frac{4}{24\ 389} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4}$$

Vastaus a) $1{,}7 \cdot 10^{-9}$
b) $1{,}4 \cdot 10^{-6}$
c) $1{,}6 \cdot 10^{-4}$

96

Sanan O S A J O U K K O kirjaimet voidaan järjestää jonoon uudeksi sanaksi 9! tavalla.

Sanassa O S A J O U K K O on kuitenkin 3 O-kirjainta, joiden keskinäinen järjestys ei vaikuta muodostuvaan sanaan. Samoin K-kirjaimia on 2 kappaletta ja näiden keskinäinen järjestys ei vaikuta muodostuvaan sanaan. Saaduista 9! sanasta on samoja sanoja siis $3! \cdot 2!$ kappaletta.

Erilaisia sanoja, kun käytetään kaikki kirjaimet, on

$$\frac{9!}{3! \cdot 2!} = 30\,240 \text{ kappaletta.}$$

Vastaus 30 240

97

Noppaa heitetään neljä kertaa. Mahdollisia silmälukujen järjestyksiä on yhteensä $6^4 = 1296$.

Järjestyksiä, joissa saadaan peräkkäiset silmäluvut, ovat
(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1),
(2, 3, 4, 5), (5, 4, 3, 2),
(3, 4, 5, 6) ja (6, 5, 4, 3).

Suotuisia järjestyksiä on siis 6.

Lasketaan todennäköisyys.

P(neljällä heitolla saadaan peräkkäiset silmäluvut)

$$= \frac{6}{1296} = \frac{1}{216} = 0,00463... \approx 0,0046$$

Vastaus $\frac{1}{216} \approx 0,0046$

98

a) Tavallisessa korttipakassa on 26 punaista korttia. 5 korttia voidaan nostaa 26 kortin joukosta $\binom{26}{5} = 65\ 780$ tavalla.

b) Tavallisessa korttipakassa on 26 mustaa korttia. 5 korttia voidaan nostaa 26 kortin joukosta $\binom{26}{5} = 65\ 780$ tavalla.

c) Jos kaikki kortit ovat samanvärisiä, ne ovat kaikki punaisia tai kaikki mustia.

Pakasta voidaan nostaa 5 korttia, jotka ovat kaikki samanvärisiä $\binom{26}{5} + \binom{26}{5} = 131\ 560$ tavalla.

d) Kaksi punaista korttia voidaan nostaa 26 punaisen kortin joukosta $\binom{26}{2}$ tavalla ja kolme mustaa korttia voidaan nostaa 26 mustan kortin joukosta $\binom{26}{3}$ tavalla.

Pakasta voidaan nostaa kaksi punaista ja kolme mustaa korttia $\binom{26}{2} \cdot \binom{26}{3} = 845\ 000$ tavalla.

Vastaus a) 65 780 b) 65 780 b) 131 560 d) 845 000

99

a) Kymmenestä opiskelijasta voidaan valita ensimmäiseen joukkueeseen viisi opiskelijaa $\binom{10}{5} = 252$ tavalla.

Loput viisi opiskelijaa muodostavat toisen viiden opiskelijan joukkueen.

Joukkueet voidaan siis valita 252 tavalla.

b) 15 opiskelijasta voidaan valita ensimmäiseen joukkueeseen viisi opiskelijaa $\binom{15}{5} = 3003$ tavalla.

Jäljelle jäävistä 10 opiskelijasta voidaan valita toiseen joukkueeseen viisi opiskelijaa $\binom{10}{5} = 252$ tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan joukkueet voidaan valita $\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} = 756\ 756$ tavalla.

Vastaus a) 252 b) 756 756

100

Vikinglotossa arvotaan 6 päänumeroa ja yksi vikingnumero.

a) Samaan ruudukkoon on merkitty 9 päänumeroa ja 2 vikingnumeroa.

9 päänumerosta voidaan muodostaa 6 numeron rivejä
$\binom{9}{6} = 84$ kappaletta.

2 vikingnumerosta voidaan muodostaa 1 numeron rivejä
$\binom{2}{1} = 2$ kappaletta.

Tuloperiaatteen mukaan järjestelmä sisältää yksittäisrivejä
$\binom{9}{6} \cdot 2 = 168$ kappaletta.

b) Samaan ruudukkoon on merkitty 10 päänumeroa ja 3 vikingnumeroa.

10 päänumerosta voidaan muodostaa 6 numeron rivejä $\binom{10}{6} = 210$ kappaletta.

3 vikingnumerosta voidaan muodostaa 1 numeron rivejä $\binom{3}{1} = 3$ kappaletta.

Tuloperiaatteen mukaan järjestelmä sisältää yksittäisrivejä $\binom{10}{6} \cdot 3 = 630$ kappaletta.

Vastaus a) 168 b) 630

101

Tavallisesessa Vikinglottorivissä on kuusi päänumeroa lukujen $1-48$ joukosta sekä yksi vikingnumero lukujen $1-8$ joukosta.

Mahdollisia rivejä on yhteensä $\binom{48}{6}\cdot\binom{8}{1}=98\ 172\ 096$ kappaletta.

a) Neljä oikeaa päänumeroa kuuden joukosta voidaan valita $\binom{6}{4}$ tavalla ja kaksi muuta päänumeroa voidaan valita 42 numeron joukosta $\binom{42}{2}$ tavalla.

Oikea vikingnumero voidaan valita yhdellä tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(\text{täsmälleen 4 päänumeroa ja vikingnumero oikein})$

$$=\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{42}{2}\cdot 1}{\binom{48}{6}\cdot\binom{8}{1}}=1{,}315...\cdot 10^{-4}\approx 0{,}000132$$

b) Neljä oikeaa päänumeroa kuuden joukosta voidaan valita $\binom{6}{4}$ tavalla ja kaksi muuta päänumeroa voidaan valita 42 numeron joukosta $\binom{42}{2}$ tavalla.

Väärä vikingnumero voidaan valita 7 numeron joukosta $\binom{7}{1}$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$P($täsmälleen 4 päänumeroa, mutta ei vikingnumero oikein)

$$= \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{42}{2}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{48}{6}\cdot\binom{8}{1}} 9,208...\cdot 10^{-4} \approx 0,000921$$

Vastaus a) 0,000132 b) 0,000921

102

a) Kättelyyn osallistuu kerralla kaksi henkilöä. Lasketaan, kuinka monta kahden hengen osajoukkoa voidaan muodostaa 25 vieraan joukosta.

$$\binom{25}{2} = 300$$

Juhlissa suoritettiin 300 kättelyä.

b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, kuinka monen henkilön joukosta voidaan muodostaa yhteensä 703 kahden hengen osajoukkoa.

Olkoon x = vieraiden lukumäärä $(x > 0)$.

$$\binom{x}{2} = 703 \qquad \text{Sievennetään laskimella.}$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = 703 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$

$$x = -37 \quad \text{tai} \quad x = 38$$

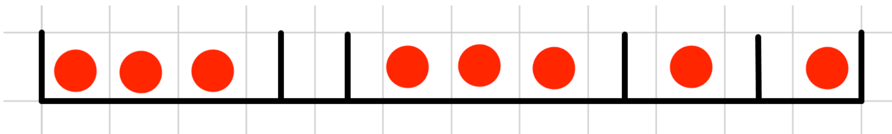
Koska vierasmäärä x on positiivinen, niin $x = 38$.

Vastaus a) 300 kättelyä b) 38 vierasta

103

Urholla on 8 samanlaista palloa. Pallot viiteen numeroituun lokeroon. Ajatellaan lokerot sijoitetun vierekkäin lokerikoksi. Tällöin lokerikossa on kaksi päätyseinää ja neljä väliseinää.

Päätyseinät on kiinteät. Näiden väliin voidaan ajatella sijoitettavan pallot sekä väliseinät. Jokainen sijoittelu vastaa yhtä tapaa jakaa pallot lokeroihin ja osa lokeroista voi jäädä tyhjiksi. Pallot ja väliseinät asetetaan siis jonoon, jossa on $8+4=12$ paikkaa.



Sijoitetaan jonoon ensin 8 palloa. 12 paikasta voidaan valita 8

$\binom{12}{8}=495$ tavalla.

Väliseinät voidaan tämän jälkeen sijoittaa yhdellä tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan pallot ja väliseinät voidaan sijoittaa

$\binom{12}{8}\cdot 1=495$ tavalla.

Vastaus 495

104

a) Osoitetaan, että $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, missä $n \geq k \geq 0$.

Sievennetään yhtälön molemmilla puolilla olevat lausekkeet.

Vasen puoli:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Oikea puoli:

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k}&=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}\\&=\frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}\\&=\frac{n!}{(n-k)!k!}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

Sievennetyt lausekkeet ovat samat, joten $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

b) $\binom{6}{2} = \binom{6}{6-2} = \binom{6}{4}$

Kuuden alkion joukosta voidaan valita 2 alkiota yhtä monella tavalla kuin 4 alkiota. Kun valitaan 2 alkion osajoukko, niin ne 4 alkiota, joita ei valittu muodostavat 4-alkioisen osajoukon.

c) Lennolle mukaan pääsevät 297 matkustajaa voidaan valita 305 lipun ostanee joukosta niin, että valitaan ne 8 matkustajaa, jotka eivät pääse lennolle.

105

a) Tasoon on merkitty n pistettä ($n \geq 2$), joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Piirretään kaikki mahdolliset suorat, jotka kulkevat pistejoukon kahden pisteen kautta.

Suorien määrä on yhtä suuri, kuin pistejoukosta muodostettujen kahden pisteen osajoukkojen lukumäärä.

n pisteen joukosta voidaan muodostaa kahden pisteen osajoukkoja $\binom{n}{2}$ kappaletta.

b) Suorat voivat leikata muissa pisteissä, jos $n \geq 4$. Kukin suora voi leikata jokaista kyseisen suoran ulkopuolelle jäävien $n-2$ pisteen kautta kulkevaa suoraa. Näitä suoria on $\binom{n-2}{2}$ kappaletta.

Tuloperiaatteen mukaan leikkauspisteitä on $\underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{Suorien lukumäärä}} \cdot \underbrace{\binom{n-2}{2}}_{\text{Leikkauspisteiden lukumäärä}}$

Koska kahdella suoralla on vain yksi leikkauspiste on leikkauspisteiden määrä puolet edellä lasketusta.

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$$ Sievennetään laskimella.

$$=\frac{n!}{8(n-4)!}$$

c) Kun $n = 15$, suoria voidaan piirtää $\binom{15}{2} = 105$ kappaletta.

Leikkauspisteitä voi enintään olla $\dfrac{15!}{8(15-4)!} = 4095$ kappaletta.

Vastaus a) $\binom{n}{2}$

b) $\dfrac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} = \dfrac{n!}{8(n-4)!}$

c) 105 suoraa ja 4095 leikkauspistettä

106

Pokerissa jaetaan 5 korttia 52 kortin pakasta. Erilaisia käsiä on $\binom{52}{5}$ kappaletta.

a) Yhdestä maasta voi saada suoran 10 tavalla:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.	x	x	x	x	x									
2.		x	x	x	x	x								
3.			x	x	x	x	x							
4.				x	x	x	x	x						
5.					x	x	x	x	x					
6.						x	x	x	x	x				
7.							x	x	x	x	x			
8.								x	x	x	x	x		
9.									x	x	x	x	x	
10.										x	x	x	x	x

Maita on 4, joten värisuoria on yhteensä $4 \cdot 10 = 40$.

$$P(\text{pelaaja saa värisuoran}) = \frac{40}{\binom{52}{5}} = 0{,}000015390... \approx 0{,}0000154$$

b) Pakassa on 4 maata, joissa jokaisessa on 13 korttia.

13 kortista voidaan pelaajalle jakaa 5 korttia $\binom{13}{5} = 1287$ tavalla.

”Värin” voi saada mistä tahansa neljästä maasta mutta kortit eivät saa olla peräkkäisiä (eli muodostaa ”värisuoraa”).
”Väri”, joka ei ole ”värisuora” voidaan saada

$4 \cdot \binom{13}{5} - 40 = 5108$ tavalla.

$$P(\text{pelaaja saa värin}) = \frac{5108}{\binom{52}{5}} = 0{,}001965... \approx 0{,}00197$$

c) a-kohdan perusteella suoran numeroarvot voidaan valita kymmennellä tavalla (1–5, 2–6, ...).

Kun korttien ei tarvitse olla samaa maata voidaan kukin numerokortti valita neljällä tavalla (neljä eri maata). Yksi suora voidaan siis saada $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$ tavalla.

Suora voidaan siis saada $10 \cdot 1024 = 10\,240$ tavalla. Tässä on mukana myös värisuorat, joten ”suora”, joka ei ole ”värisuora” voidaan saada 10 240 – 40 = 10 200 tavalla.

$$P(\text{pelaaja saa suoran}) = \frac{10\,200}{\binom{52}{5}} = 0{,}003924... \approx 0{,}00392$$

d) Samaa numeroa on korttipakassa neljä korttia (yksi kutakin maata). Näistä korteista kolme voidaan valita $\binom{4}{3} = 4$ tavalla.

Kolme samaa numeroa on mahdollista saada 13 numeron (huomaa, että ässä on nyt vain yksi numero) joukosta, joten kolmoset voidaan nostaa $13 \cdot 4 = 52$ tavalla.

Kahden muun kortin joukossa ei voi olla samaa numeroa, kuin nostetut kolmoset (tällöin saataisiin neloset) eivätkä ne voi olla myöskään keskenään sama numero (tällöin käsi ei olisi kolmoset vaan täyskäsi).

Jäljellä on siis 12 mahdollista numeroa, joista voidaan nostaa 2 $\binom{12}{2}$ tavalla. Jokaista numeroa on pakassa 4 kappaletta, joten kaksi muuta korttia voidaan nostaa $\binom{12}{2} \cdot 4 \cdot 4 = \binom{12}{2} \cdot 16 = 1056$ tavalla.

$$P(\text{pelaaja saa kolmoset}) = \frac{52 \cdot 1056}{\binom{52}{5}} = 0{,}02112.. \approx 0{,}0211$$

Vastaus a) 0,0000154 b) 0,00197
c) 0,00392 d) 0,0211