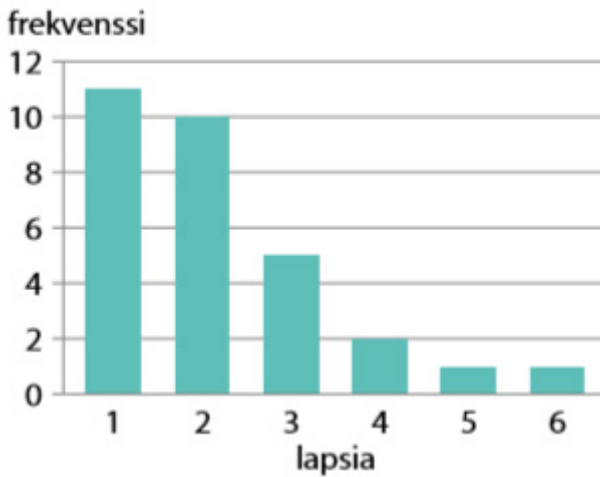


173

a)

lapsia	frekvenssi
1	11
2	10
3	5
4	2
5	1
6	1
	30

b)



**174**

Katsotaan frekvenssit taulukosta ja lasketaan suhteelliset frekvenssit.

Esim. kun frekvenssi  $f = 4$ , suhteellinen frekvenssi saadaan

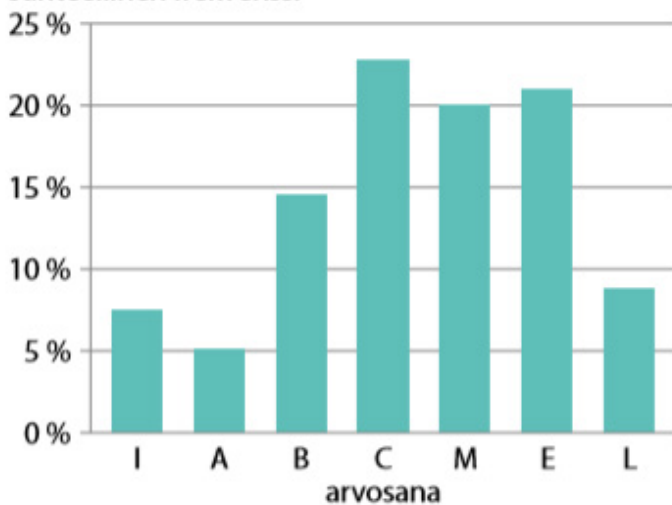
$$\frac{4}{16} = 0,250 = 25,0 \%$$

<b>muuttuja</b>	<b><math>f</math></b>	<b><math>f\%</math></b>
11	4	25,0
12	2	12,5
13	5	31,3
14	3	18,8
15	2	12,5
<b>yhteensä</b>	<b>16</b>	<b>100</b>

## 175

arvosana	$f$	$f \%$
I	43	$\frac{43}{567} \approx 0,076 = 7,6 \%$
A	29	$\frac{29}{567} \approx 0,051 = 5,1 \%$
B	83	$\frac{83}{567} \approx 0,146 = 14,6 \%$
C	129	$\frac{129}{567} \approx 0,228 = 22,8 \%$
M	114	$\frac{114}{567} \approx 0,201 = 20,1 \%$
E	119	$\frac{119}{567} \approx 0,210 = 21,0 \%$
L	50	$\frac{50}{567} \approx 0,088 = 8,8 \%$
	567	100 %

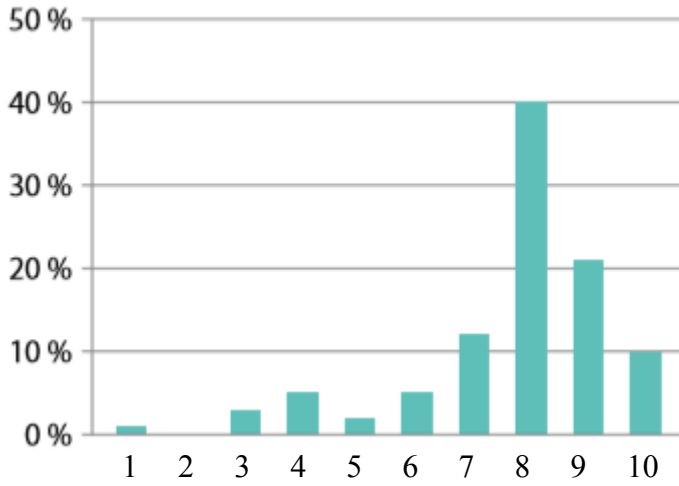
suhteellinen frekvenssi



## 176

pistemäärä	<i>f</i>	<i>f</i> %
1	2	1,3
2	0	0,0
3	5	3,2
4	7	4,5
5	3	1,9
6	8	5,2
7	19	12,3
8	62	40,3
9	32	20,8
10	16	10,4
<b>yhteensä</b>	<b>154</b>	<b>100</b>

### suhteellinen frekvenssi



**177**

Lasketaan havaintoarvojen keskiarvo.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{-3^{\circ}\text{C} + (-5^{\circ}\text{C}) + 0^{\circ}\text{C} + 1^{\circ}\text{C} + 4^{\circ}\text{C} + (-8^{\circ}\text{C}) + (-12^{\circ}\text{C})}{7} \\ &= \frac{-23^{\circ}\text{C}}{7} = -3,285\dots^{\circ}\text{C} \approx -3,3^{\circ}\text{C}\end{aligned}$$

**Vastaus**  $-3,3^{\circ}\text{C}$

**178**

Lasketaan arvosanojen keskiarvo.

**Tapa 1**

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{10 \cdot 5 + 9 \cdot 18 + 8 \cdot 24 + 7 \cdot 23 + 6 \cdot 15 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 10}{100} \\ &= 7,2\end{aligned}$$

**Tapa 2**

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 10 \cdot 0,05 + 9 \cdot 0,18 + 8 \cdot 0,24 + 7 \cdot 0,23 + 6 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,10 \\ &= 7,2\end{aligned}$$

**Vastaus** 7,2



## 179

Keskiarvo on kaikkien annettujen arvosanojen summa jaettuna niiden lukumäärällä.

Salma on saanut 10 arvosanaa ja niiden summa oli  $8,24 \cdot 10 = 82,4$ .

Salma saa vielä 3 arvosanaa. Olkoon  $x$  niiden keskiarvo, jolloin niiden summa on  $3x$ .

Lasketaan, mikä  $x$  tulee olla, että kaikkien kurssien arvosanojen keskiarvo olisi 8,50.

$$\frac{82,4 + 3x}{13} = 8,50$$

$$82,4 + 3x = 110,5$$

$$3x = 28,1$$

$$x = 9,3666\dots \approx 9,37$$

**Vastaus** 9,37

## 180

Kuntien palveluksessa olevien lukion opettajien keskipalkka on 3 878 € kuukaudessa.

Lukion opettajista 30 % on miehiä ja heidän keskipalkkansa on 3 966 €.

Naisopettajia on 70 %. Lasketaan naisopettajien keskipalkka  $x$ .

$$\frac{30 \cdot 3966 \text{ €} + 70x}{100} = 3878 \text{ €}$$

$$70x = 100 \cdot 3878 \text{ €} - 30 \cdot 3966 \text{ €}$$

$$x = \frac{100 \cdot 3878 \text{ €} - 30 \cdot 3966 \text{ €}}{70}$$

$$x = 3840,285\dots \text{ €} \approx 3840 \text{ €}$$

**Vastaus** 3840 €

**181**

Valitaan sattumanvaraisesti yksi filosofian ylioppilaskokeeseen keväällä 2017 osallistunut kokelas.

- a) Tapahtuman ”kokelas pääsi läpi kokeesta” vastatapahtuma on ”kokelas ei päässyt läpi kokeesta.

Kokeeseen osallistui 567 kokelasta, joista 43 sai arvosanan I.

$$\begin{aligned} P(\text{kokelas pääsi läpi kokeesta}) \\ &= 1 - P(\text{kokelas ei päässyt läpi kokeesta}) \\ &= 1 - \frac{43}{567} = 0,9241\dots \approx 0,924 \end{aligned}$$

- b) Kokelaista 50 sai arvosanan L.

$$\begin{aligned} P(\text{kokelas sai arvosanan L}) \\ &= \frac{50}{567} = 0,08818\dots \approx 0,088 \end{aligned}$$

- c) Arvosanan M sai 114, E sai 119 ja L sai 50 kokelasta.

$$\begin{aligned} P(\text{kokelas sai vähintään arvosanan M}) \\ &= \frac{114 + 119 + 50}{567} = 0,49911\dots \approx 0,499 \end{aligned}$$

**Vastaus** a) 0,924 b) 0,088 c) 0,499

**182**

- a) Heittoja on aineistossa yhteensä 154.

Sora on saanut 9 pistettä 32 kertaa ja 10 pistettä 16 kertaa.

$P(\text{Sora saa seuraavalla heitolla ainakin 9 pistettä})$

$$= \frac{32+16}{154} = 0,3116\dots \approx 0,31$$

- b) Sora voi saada kahdella peräkkäisellä heitolla ainakin 19 pistettä, jos hän heittää 9 pistettä ja 10 pistettä tai kaksi kertaa kymmenen pistettä.

9 ja 10 pistettä voidaan heittää kahdella tavalla:  
ensimmäisellä heitolla 9 ja toisella 10  
tai ensimmäisellä heitolla 10 ja toisella 9.

$P(\text{Sora saa kahdella heitolla ainakin 19 pistettä})$

$$= P(10 \text{ ja } 10 \text{ pistettä}) + 2 \cdot P(9 \text{ ja } 10 \text{ pistettä})$$

$$= \frac{16}{154} \cdot \frac{16}{154} + 2 \cdot \frac{32}{154} \cdot \frac{16}{154}$$

$$= 0,05397\dots \approx 0,054$$

**Vastaus** a) 0,31 b) 0,54

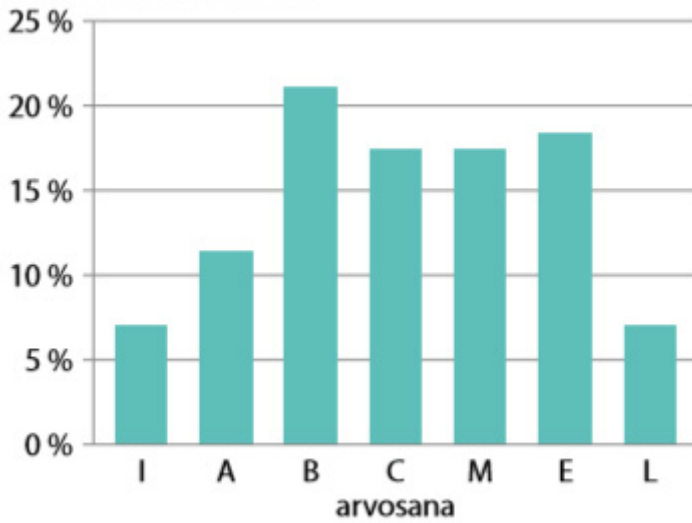
183

muuttuja	f	f %
1	10	14,9
2	15	22,4
3	14	20,9
4	16	23,9
5	12	17,9
	<b>67</b>	<b>100</b>

## 184

arvosana	$f$	$f \%$
I	8	$\frac{8}{114} \approx 0,070 = 7,0 \%$
A	13	$\frac{13}{114} \approx 0,114 = 11,4 \%$
B	24	$\frac{24}{114} \approx 0,211 = 21,1 \%$
C	20	$\frac{20}{114} \approx 0,175 = 17,5 \%$
M	20	$\frac{20}{114} \approx 0,175 = 17,5 \%$
E	21	$\frac{21}{114} \approx 0,184 = 18,4 \%$
L	8	$\frac{8}{114} \approx 0,070 = 7,0 \%$
	114	100 %

suhteellinen frekvenssi



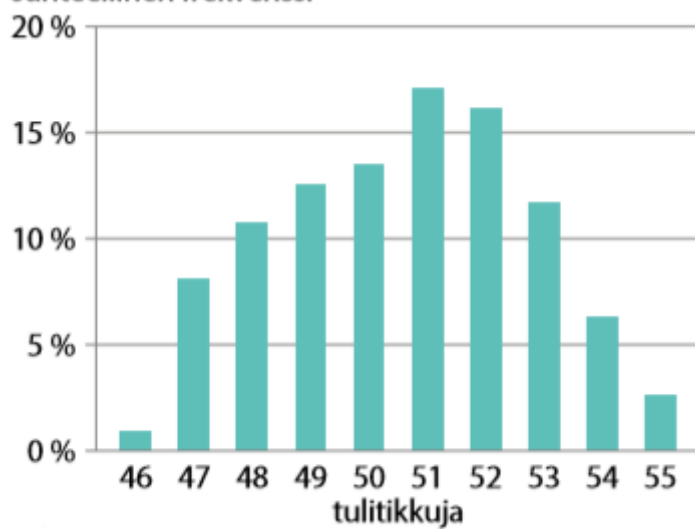
## 185

Rasioita on yhteensä 111.

tikkuja	$f$ %
46	$\frac{1}{111} \approx 0,009 = 0,9 \%$
47	$\frac{9}{111} \approx 0,081 = 8,1 \%$
48	$\frac{12}{111} \approx 0,108 = 10,8 \%$
49	$\frac{14}{111} \approx 0,126 = 12,6 \%$
50	$\frac{15}{111} \approx 0,135 = 13,5 \%$
51	$\frac{19}{111} \approx 0,171 = 17,1 \%$
52	$\frac{18}{111} \approx 0,162 = 16,2 \%$
53	$\frac{13}{111} \approx 0,117 = 11,7 \%$
54	$\frac{7}{111} \approx 0,063 = 6,3 \%$
55	$\frac{3}{111} \approx 0,027 = 2,7 \%$
	100 %



suhteellinen frekvenssi



**186**

Merkitään puuttuvaa frekvenssiä  $x$ .  
Muiden frekvenssien summa on 42.

$$\frac{0 \cdot 8 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot x + 4 \cdot 14 + 5 \cdot 2}{42 + x} = 2,2$$

$$\frac{3x + 90}{42 + x} = 2,2$$

$$3x + 90 = 2,2 \cdot (42 + x)$$

$$3x = 92,4 + 2,2x - 90$$

$$3x - 2,2x = 2,4$$

$$0,8x = 2,4$$

$$x = 3$$

**Vastaus** 3

## 187

Valtion palveluksessa olevien miespuolisten sotilaiden palkka on keskimäärin 4191 € ja naispuolisten 3439 € kuukaudessa. Sotilaista 96,7 % on miehiä ja naisia 3,3 %.

Lasketaan sotilaiden keskimääräinen kuukausipalkka.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{96,7 \cdot 4191 \text{ €} + 3,3 \cdot 3439 \text{ €}}{100} \\ &= 4166,18\dots \text{ €} \approx 4166 \text{ €}\end{aligned}$$

**Vastaus** 4166 €

## 188

Valtion palveluksessa olevien miespuolisten tuomioistuinlakimiesten keskimääräinen kuukausipalkka on 5899 €, naispuolisten 5158 € ja kaikkien 5379 €.

Merkitään naisten osuutta  $x$ .

$$(1-x) \cdot 5899 \text{ €} + x \cdot 5158 \text{ €} = 5379 \text{ €}$$

$$5899 \text{ €} - x \cdot 5899 \text{ €} + x \cdot 5158 \text{ €} = 5379 \text{ €}$$

$$x \cdot (-741 \text{ €}) = -520 \text{ €}$$

$$x = 0,7017... \approx 0,702 = 70,2 \%$$

**Vastaus** 70,2 %

## 189

Valitaan sattumanvaraisesti yksi kevään 2017 elämäkatsomustiedon kokeeseen osallistunut kokelas. Kokelaita oli yhteensä 114.

a) Arvosanan E sai 21 kokelasta.

$$P(\text{kokelas sai arvosanan E}) = \frac{21}{114} = 0,1842\dots \approx 0,18$$

b) Arvosanan L sai 8 kokelasta.

$$\begin{aligned} P(\text{kokelas sai vähintään arvosanan E}) \\ = \frac{21+8}{114} = 0,2543\dots \approx 0,25 \end{aligned}$$

c) Tapahtuman ”kokelas sai enintään arvosanan E” vastatapahtuma on ”kokelas sai arvosanan L”.

$$\begin{aligned} P(\text{kokelas sai enintään arvosanan E}) \\ = 1 - P(\text{kokelas sai arvosanan L}) \\ = 1 - \frac{8}{114} = 0,9298\dots \approx 0,93 \end{aligned}$$

**Vastaus** a) 0,18 b) 0,25 c) 0,93

**190**

Rasioita on yhteensä 111.

- a) Rasioita, joissa on 50 tulitikkua, on 15.  
 Todennäköisyys, että yksittäisessä rasiassa on 50 tikkua,  
 on  $\frac{15}{111}$ .

$P(\text{kahdessa peräkkäisessä rasiassa 50 tikkua})$

$$= \frac{15}{111} \cdot \frac{15}{111} = 0,01826... \approx 0,02$$

- b) Rasioita, joissa on ainakin 50 tulitikkua, on 75.  
 Todennäköisyys, että yksittäisessä rasiassa on ainakin 50  
 tikkua, on  $\frac{75}{111}$ .

$P(\text{kahdessa peräkkäisessä rasiassa on ainakin 50 tikkua})$

$$= \frac{75}{111} \cdot \frac{75}{111} = 0,4565... \approx 0,46$$

**Vastaus** a) 0,02 b) 0,46

## 191

- a) 1000 miehestä 951 elää vähintään 40-vuotiaaksi.

$$\begin{aligned} P(\text{mies elää vähintään 40 vuotiaaksi}) \\ = \frac{951}{1000} = 0,951 \end{aligned}$$

- b) 1000 miehestä 294 on elossa 80-vuotiaana.  
 $1000 - 294 = 706$  ei saavuta 80-vuoden ikää.

$$\begin{aligned} P(\text{mies ei saavuta 80-vuoden ikää}) \\ = \frac{706}{1000} = 0,706 \end{aligned}$$

**Vastaus** a) 0,951 b) 0,706

**192**

- a) 992:stä 20-vuotiaasta naisesta 551 saavuttaa 80-vuoden iän.

$$\begin{aligned} P(\text{20-vuotias nainen saavuttaa 80-vuoden iän}) \\ = \frac{551}{992} \approx 0,555 \end{aligned}$$

- b) 992:stä 20-vuotiaasta naisesta 922 saavuttaa 60-vuoden iän.  
 $992 - 922 = 70$  ei saavuta 60-vuoden ikää.

$$\begin{aligned} P(\text{20-vuotias nainen ei saavuta 60-vuoden ikää}) \\ = \frac{70}{992} \approx 0,071 \end{aligned}$$

**Vastaus** a) 0,551 b) 0,071



## 193

Yleisin havaintoarvo on 8. Arvosanojen moodi  $Mo = 8$ .

Asetetaan arvosanat järjestykseen ja katsotaan, mikä on keskimäinen arvosana.

7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 10 10

Lasketaan kahden keskimäisen arvosanan keskiarvo.

$$\frac{8+9}{2} = 8,5$$

Arvosanojen mediaani  $Md = 8,5$

Lasketaan arvosanojen keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{7+5 \cdot 8+4 \cdot 9+2 \cdot 10}{12} = 8,5833... \approx 8,58$$

**Vastaus**  $Mo = 8$ ,  $Md = 8,5$  ja  $\bar{x} \approx 8,58$

## 194

Yleisin havaintoarvo sekä miesten että naisten alkoholin käytössä on ”kerran pari kuukaudessa”.

Moodi on ”kerran pari kuukaudessa”.

Naisten jakaumassa 50 %:n kohdalla on havaintoarvo ”kerran pari kuukaudessa”.

Mediaani on ”kerran pari kuukaudessa”.

Miesten jakaumassa 50 %:n kohdalla on havaintoarvot "kerran viikossa" ja ”kerran pari kuukaudessa”.

Mediaani on "kerran viikossa" ja "kerran pari kuukaudessa".

**Vastaus** Naisten alkoholinkäytön moodi ja mediaani ovat ”kerran pari kuukaudessa”.

Miesten alkoholinkäytön moodi on "kerran pari kuukaudessa" ja mediaani on "kerran viikossa" ja "kerran pari kuukaudessa".

**195**

- a) Yleisimmät havaintoarvot eli moodit ovat ”naimaton” ja ”naimisissa”.
- b) Yleisin havaintoarvo eli moodi on ”nainen”

**Vastaus** a) Moodeja ovat ”naimaton” ja ”naimisissa”.  
b) Moodi on ”nainen”.

**196**

- a) Jakauman suurin arvosana on 10 ja pienin 7.

Vaihteluvälin pituus on  $10 - 7 = 3$ .

- b) Lasketaan arvosanojen keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{7 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 10}{12} = \frac{103}{12}$$

Lasketaan arvosanojen keskihajonta.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(7 - \frac{103}{12})^2 + 5 \cdot (8 - \frac{103}{12})^2 + 4 \cdot (9 - \frac{103}{12})^2 + 2 \cdot (10 - \frac{103}{12})^2}{12}}$$

$$= 0,8620... \approx 0,86$$

**Vastaus** a) 3 b) 0,86

**197**

- a) Lasketaan havaintoarvojen keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{72,0 + 73,2 + 72,9 + 74,1 + 74,5}{5} = 73,34 \approx 73,3$$

Pituuksien keskiarvo on 73,3 metriä.

- b) Lasketaan havaintoarvojen keskihajonta.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(72,0 - 73,34)^2 + (73,2 - 73,34)^2 + (72,9 - 73,34)^2 + (74,1 - 73,34)^2 + (74,5 - 73,34)^2}{5}}$$
$$= 0,8867... \approx 0,89$$

Pituuksien keskihajonta on 0,89 metriä.

**Vastaus** a) 73,3 m b) 0,89 m

## 198

Syötetään data laskimeen ja analysoidaan aineistoa laskimen tilastotoiminnoilla.

	A karam...	B pusseja	C	D
=				
1	36	1		
2	37	0		41.6329113924
3	38	5		2.14757570232
4	39	8		
5	40	10		
6	41	14		
7	42	13		
8	43	11		
9	44	9		
10	45	6		
11	46	2		

- a) Keskiarvo  $\bar{x} \approx 42$ .
- b) Keskihajonta  $\sigma \approx 2,1$

**Vastaus** a) 42 b) 2,1

## 199

Syötetään data laskimeen ja analysoidaan aineistoa laskimen tilastotoiminnoilla.

arvosana	$f$ %
0	4.1
2	9.4
3	20.6
4	24.7
5	22.0
6	15.2
7	4.1

$\bar{x}$	4,1
$s_n$	1,6
$n$	7
min	0
median	4
max	7

Kaikki laskinohjelmistot eivät laske mediaania ja keskihajontaa, jos sarakkeissa on desimaalilukuja. Tästä ongelmasta selviää esimerkiksi kertomalla kaikki suhteelliset frekvenssit kymmenellä.

**Vastaus** a) 4,1 b) 4 c) 1,6

**200**

Lasketaan lasten pituuksia vastaavat normitetut arvot.

Syksy:

$$\bar{x} = 142$$

$$\sigma = 6$$

$$x = 150$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \\ &= \frac{150 - 142}{6} = 1,333\dots \approx 1,3 \end{aligned}$$

Suvi:

$$\bar{x} = 124$$

$$\sigma = 5$$

$$x = 130$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \\ &= \frac{130 - 124}{5} = 1,2 \end{aligned}$$

Syksy on suhteellisesti pidempi, koska hänen pituuttaan vastaava normitettu arvo on suurempi.

**Vastaus** Syksy 1,3 ja Suvi 1,2. Syksy on suhteellisesti pidempi.



**201**

Lasketaan, miten pitkiä lapset ovat kolmen vuoden kuluttua, jos heidän pituutensa pysyy suhteellisesti samana verrattuna ikäluokkaan.

Syksy:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

$$1,333 = \frac{x - 160}{8}$$

$$10,664 = x - 160$$

$$x = 170,664 \approx 171$$

Syksy on noin 171 cm.

Suvi:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

$$1,2 = \frac{x - 141}{6}$$

$$7,2 = x - 141$$

$$x = 148,2 \approx 148$$

Suvi on noin 148 cm.

**Vastaus** Syksy 171 cm ja Suvi 148 cm

**202**

Lasketaan Nikon pistemäärää vastaava normitettu arvo.

$$\bar{x} = 29$$

$$\sigma = 14$$

$$x = 25$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \\ &= \frac{25 - 29}{14} = -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Lasketaan Aminan pistemäärä  $y$ , kun hän menestyi suhteellisesti yhtä hyvin.

$$\bar{x} = 36$$

$$\sigma = 17$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{y - \bar{x}}{\sigma} \\ -\frac{2}{7} &= \frac{y - 36}{17} \\ -7(y - 36) &= 2 \cdot 17 \\ -7y + 252 &= 34 \\ -7y &= -218 \\ y &= 31,14\dots \approx 31 \end{aligned}$$

**Vastaus** 31 pistettä

## 203

Yleisin havaintoarvo on 120 asiakasta.  $M_o = 120$ .

Asetetaan asiakasmäärät järjestykseen ja katsotaan, mikä on keskimäinen.

75 94 100 **102** 120 120 128

$M_d = 102$ .

Lasketaan asiakasmäärien keskiarvo.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{94+102+120+100+120+128+75}{7} \\ &= 105,57\dots \approx 106\end{aligned}$$

**Vastaus**  $M_o = 120$ ,  $M_d = 102$  ja  $\bar{x} = 106$

**204**

- a) Yleisin havainto arvo on 1. Perheen lapsiluvun moodi  $M_o = 1$ .

Frekvenssien summa on 60, joka on parillinen määrä.

Järjestyksessä 30. perheellä on 1 lapsi

ja 31. perheellä 2 lasta.

$$M_d = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

Lasketaan lapsiluvun keskiarvo.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 27 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 3 + 5}{60} \\ &= 1,7333... \approx 1,7 \end{aligned}$$

- b) Yleisin havaintoarvo on Suomi. Kotikielen moodi on Suomi

**Vastaus** a)  $M_o = 1$ ,  $M_d 1,5$  ja  $\bar{x} = 1,7$   
 b) moodi on Suomi

## 205

- a) Selvitetään, missä kohdassa suhteellinen frekvenssi ylittää 50 %.

$$13 \% + 34 \% = 47 \%$$

$$13 \% + 34 \% + 27 \% = 74 \%$$

Mediaani on ”pari kertaa kuukaudessa”.

- b) Useimmin käyvä neljäsosa kuuluu joko ryhmään ”vähintään kahdesti viikossa” tai ”kerran viikossa”. Useimmiten käyvä neljäsosa käy siis elokuvissa kerran tai useammin viikon aikana eli vähintään kerran viikossa.

**Vastaus** a) pari kertaa kuukaudessa b) vähintään kerran viikossa

## 206

Lasketaan tehtävien keskiarvo ja keskihajonta.

A1:

$$\bar{x}_1 = \frac{3 \cdot 14}{14} = 3$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{14 \cdot (3-3)^2}{14}} = 0$$

A2:

$$\bar{x}_2 = \frac{6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2}{14} = 3$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{2((6-3)^2 + (5-3)^2 + (4-3)^2 + (3-3)^2 + (2-3)^2 + (1-3)^2 + (0-3)^2)}{14}} = 2$$

A3:

$$\bar{x}_3 = \frac{6 \cdot 7 + 0 \cdot 7}{14} = 3$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{7(6-3)^2 + 7(0-3)^2}{14}} = 3$$

**Vastaus** A1:  $\bar{x} = 3$  ja  $\sigma = 0$

A2:  $\bar{x} = 3$  ja  $\sigma = 2$

A3:  $\bar{x} = 3$  ja  $\sigma = 3$

## 207

- a) Lasketaan polkupyörien määrän keskiarvo.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1 \cdot 15 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 47 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2}{90} \\ &= \frac{109}{90} = 2,2222... \approx 2,2\end{aligned}$$

- b) Lasketaan polkupyörien määrän keskihajonta.

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{15 \cdot (1 - \frac{109}{90})^2 + 26 \cdot (2 - \frac{109}{90})^2 + 47 \cdot (3 - \frac{109}{90})^2 + 0 \cdot (4 - \frac{109}{90})^2 + 2 \cdot (5 - \frac{109}{90})^2}{90}} \\ &= 0,8429... \approx 0,84\end{aligned}$$

- c) Frekvenssien summa on 90, joka on parillinen luku. 45. perheellä on 3 pyörää ja 46. perheellä on myös 3 pyörää.

Polkupyörien määrän mediaani  $Md = 3$ .

**Vastaus** a)  $\bar{x} \approx 2,2$  b)  $\sigma \approx 0,84$  c)  $Md = 3$

**208**

Syötetään data laskimeen ja analysoidaan aineistoa laskimen tilastotoiminnoilla.

arvosana	$f$ %
0	16,0
2	8,0
3	16,0
4	4,0
5	4,0
6	20,0
7	32,0

$\bar{x}$	4,4
$s_n$	2,6
$n$	7
min	0
median	6,0
max	7

**Vastaus** a) 4,4 b) 6,0 c) 2,6



**209**

Syötetään data laskimeen ja analysoidaan aineistoa laskimen tilastotoiminnoilla

$x$	$x$
12,1	14,1
12,9	12,8
12,3	12,7
11,9	13,1
13,2	13,6
13,4	14,2
12,5	13,7
13,0	12,1
13,5	12,8
13,3	14,0

$\bar{x}$	13,11
$s_n$	0,62
$n$	20
sum	262,2
min	11,9
median	13,1
max	14,2

**Vastaus** a) 13,11 b) 0,62 c) 262,2 d) 11,9 e) 14,2 f) 13,1

**210**

Lasketaan Kasperin pistemäärää vastaava normitettu arvo.

$$\bar{x} = 67$$

$$\sigma = 20$$

$$x = 75$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \\ &= \frac{75 - 67}{20} = 0,4 \end{aligned}$$

Lasketaan Jesperin pistemäärää vastaava normitettu arvo.

$$\bar{x} = 61$$

$$\sigma = 16$$

$$x = 69$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \\ &= \frac{69 - 61}{16} = 0,5 \end{aligned}$$

Jesper menestyi suhteellisesti paremmin kokeessa, koska hänen pistemääräänsä vastaava normitettu arvo on suurempi.

**Vastaus** Kasperin tuloksen normitettu arvo on 0,4 ja Jesperin 0,5. Jesper menestyi suhteellisesti paremmin.

**211**

Lasketaan, millä pistemäärällä  $x$  normitettu arvo on suurempi kuin Kasperin eli 0,4, mutta pienempi kuin Jesperin eli 0,5.

$$\bar{x} = 64$$

$$\sigma = 18$$

$$\frac{x - 64}{18} > 0,4$$

$$x - 64 > 7,2$$

$$x > 71,2$$

$$\frac{x - 64}{18} < 0,5$$

$$x - 64 < 9$$

$$x < 73$$

Saadaan  $71,2 < x < 73$ .

Joonatanin olisi pitänyt saada 72 pistettä.

**Vastaus** 72

**212**

- a) Palkansaajia on yhteensä 36.  
Lasketaan keskipalkka ennen uudistusta.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1400 \cdot 10 + 1700 \cdot 12 + 2000 \cdot 5 + 3000 \cdot 4 + 4000 \cdot 3 + 5000 \cdot 2}{36} \\ &= 2177,777\dots \approx 2177,78\end{aligned}$$

Lasketaan keskipalkka korotuksen jälkeen.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1480 \cdot 10 + 1800 \cdot 12 + 2200 \cdot 5 + 3300 \cdot 4 + 4500 \cdot 3 + 6000 \cdot 2}{36} \\ &= 2391,666\dots \approx 2391,67\end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia keskipalkka nousi.

$$\frac{2391,67 \text{ €}}{2177,78 \text{ €}} = 1,09821\dots \approx 1,098$$

Keskipalkka nousi noin 9,8 %.

- b) Palkansaajia on 36, joka on parillinen luku.  
18. ja 19. palkansaaja sai 1700 € ennen korotusta.  
Mediaanipalkka oli 1700 €.

Korotuksen jälkeen 18. ja 19. palkansaaja saivat 1800 €.  
Mediaanipalkka oli 1800 €.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia mediaanipalkka nousi.

$$\frac{1800 \text{ €}}{1700 \text{ €}} = 1,05882... \approx 1,059$$

Mediaanipalkka nousi noin 5,9 %

c) Jaetaan taulukko puoliksi.

ennen	jälkeen	$f$
1400	1480	10
1700	1800	8
1700	1800	4
2000	2200	5
3000	3300	4
4000	4500	3
5000	6000	2

Lasketaan vähemmän ansaitsevan puoliskon keskipalkat.

$$\bar{x} = \frac{1400 \cdot 10 + 1700 \cdot 8}{18} \approx 1533,33$$

$$\bar{x} = \frac{1480 \cdot 10 + 1800 \cdot 8}{18} \approx 1622,22$$

Lasketaan vähemmän ansaitsevan puoliskon palkan kasvu.

$$\frac{1622,22 \text{ €}}{1533,33 \text{ €}} = 1,05797... \approx 1,058$$

Palkka nousi noin 5,8 %.

Lasketaan enemmän ansaitsevan puoliskon keskipalkat.

$$\bar{x} = \frac{1700 \cdot 4 + 2000 \cdot 5 + 3000 \cdot 4 + 4000 \cdot 3 + 5000 \cdot 2}{18} \approx 2822,22$$

$$\bar{x} = \frac{1800 \cdot 4 + 2200 \cdot 5 + 3300 \cdot 4 + 4500 \cdot 3 + 6000 \cdot 2}{18} \approx 3161,11$$

Lasketaan enemmän ansaitsevan puoliskon palkan kasvu.

$$\frac{3161,11 \text{ €}}{2822,22 \text{ €}} = 1,12007... \approx 1,120$$

Palkka nousi noin 12,0 %.

- Vastaus**
- a) ennen 2177,78; jälkeen 2391,67; nousi 9,8 %
  - b) ennen 1700; jälkeen 1800; nousi 5,9 %
  - c) vähemmän: nousi 5,8 %; enemmän: nousi 12,0 %

## 213

a) Koko histogrammin pinta-ala on 20 ruutua.

1. pylväs on 8 ruutua.

$$\frac{8}{20} = 0,4 = 40 \%$$

2. pylväs on 6 ruutua.

$$\frac{6}{20} = 0,3 = 30 \%$$

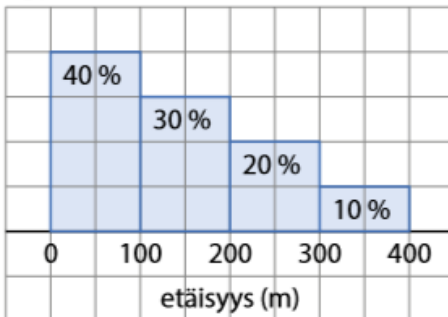
3. pylväs on 4 ruutua.

$$\frac{4}{20} = 0,2 = 20 \%$$

4. pylväs on 2 ruutua.

$$\frac{2}{20} = 0,1 = 10 \%$$

b)





- Vastaus**
- a) 1. pylväs: 8 ruutua, 40 %
  - b) 2. pylväs: 6 ruutua, 30 %
  - c) 3. pylväs: 4 ruutua, 20 %
  - d) 4. pylväs: 2 ruutua, 10 %

**214**

- a) Pituudet on mitattu yhden senttimetrin tarkkuudella. Esimerkiksi luokan 41–43 todellinen alaraja on 40,5 ja todellinen yläraja on 43,5. Luokkakeskus on luokan todellisten rajojen keskiarvo.

$$\frac{40,5 \text{ cm} + 43,5 \text{ cm}}{2} = 42 \text{ cm}$$

$$\frac{43,5 \text{ cm} + 46,5 \text{ cm}}{2} = 45 \text{ cm}$$

$$\frac{46,5 \text{ cm} + 49,5 \text{ cm}}{2} = 48 \text{ cm}$$

$$\frac{49,5 \text{ cm} + 52,5 \text{ cm}}{2} = 51 \text{ cm}$$

$$\frac{52,5 \text{ cm} + 55,5 \text{ cm}}{2} = 54 \text{ cm}$$

$$\frac{55,5 \text{ cm} + 58,5 \text{ cm}}{2} = 57 \text{ cm}$$

- b) Lasketaan pituuksien keskiarvo.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2 \cdot 42 + 14 \cdot 45 + 33 \cdot 48 + 34 \cdot 51 + 14 \cdot 54 + 3 \cdot 57}{100} \\ &= 49,49 \approx 49,6 \end{aligned}$$

Pituuksien keskiarvo on 49,6 cm.

c) Lasketaan pituuksien keskihajonta.

$$\sigma = \sqrt{\frac{2(42 - 49,49)^2 + 14(45 - 49,49)^2 \dots + 3(57 - 49,49)^2}{100}}$$

$\approx 3,16$

Pituuksien keskihajonta on 3,16 cm.

**Vastaus** a) 42 cm, 45 cm, 48 cm, 51 cm, 54 cm ja 57 cm  
b) 49,6 cm c) 3,16 cm

## 215

- a) Aineiston pienin arvo on 0,3 ja suurin 4,8. Luokitellaan aineisto tasalevyisiin luokkiin.

koulumatka (km)	$f$	$f \%$
0 – 0,9	4	$\frac{4}{30} \approx 0,13 = 13 \%$
1,0 – 1,9	6	$\frac{6}{30} = 0,2 = 20 \%$
2,0 – 2,9	7	$\frac{7}{30} \approx 0,23 = 23 \%$
3,0 – 3,9	5	$\frac{5}{30} \approx 0,17 = 17 \%$
4,0 – 4,9	8	$\frac{8}{30} \approx 0,27 = 27 \%$
	30	100 %

- b) Lasketaan luokkien luokkakeskukset ja syötetään aineisto laskinohjelmistoon ja tutkitaan dataa taulukkolaskentatoiminnoilla.

Aineisto on luokiteltu 0,1 km tarkkuudella. Esimerkiksi luokan 0–0,9 todellinen alaraja on 0 ja todellinen yläraja 1,95. Luokkakeskus on todellisten rajojen keskiarvo.

Taulukkolaskentatoiminnoilla saadaan:

$$\bar{x} \approx 2,7$$

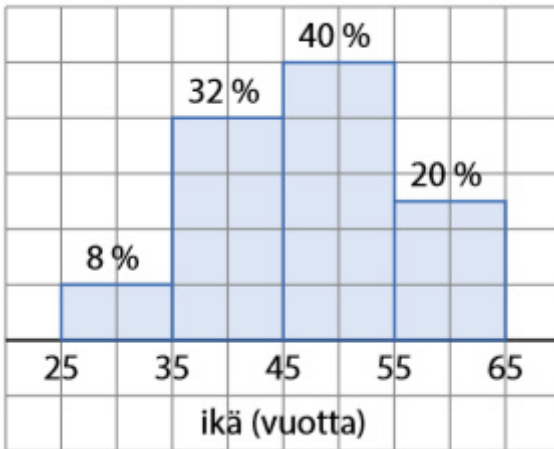
$$\sigma_x \approx 1,4$$

**Vastaus** b) keskiarvo on 2,7 km ja keskihajonta 1,4 km

216

- a) Histogrammi muodostuu toisissaan kiinni olevista pylväistä. Koska luokat ovat tasalevyiset, niin pylväiden korkeudet ja samalla myös pinta-alat ovat suoraan verrannolliset luokan suhteelliseen frekvenssiin.

Piirretään histogrammi.



- b) Lasketaan luokkakeskukset. Esimerkiksi luokan 25–34 todellinen alaraja on 25 ja todellinen yläraja on 35.

$$\frac{25 + 35}{2} = 30$$

$$\frac{35 + 45}{2} = 40$$

$$\frac{45 + 55}{2} = 50$$

$$\frac{55 + 65}{2} = 60$$

Lasketaan keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 30 + 32 \cdot 40 + 40 \cdot 50 + 20 \cdot 60}{100} = 47,2 \approx 47$$

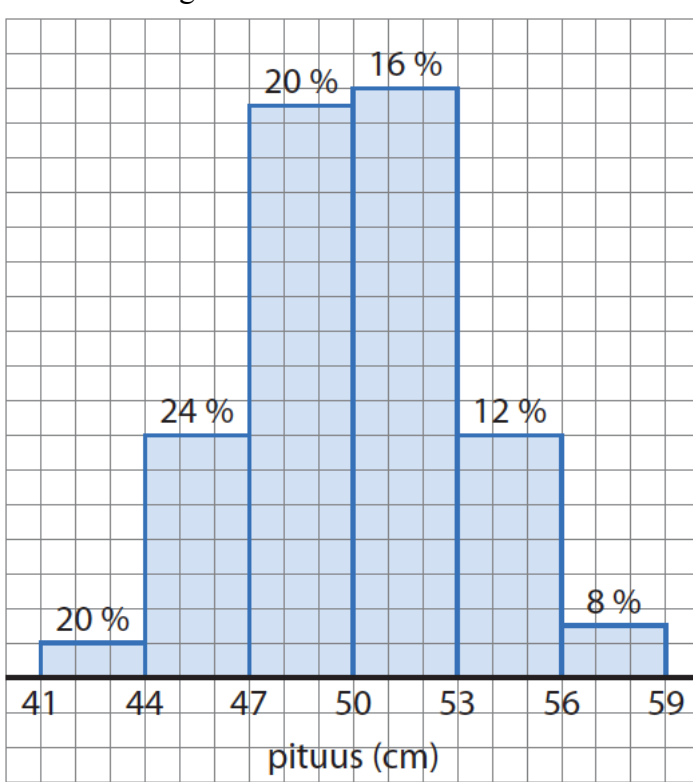
Eniten opettajia on luokassa 45–54. Moodiluokka on 45–54.

**Vastaus** b) keskiarvo 47 vuotta, moodiluokka 45–54 vuotta.

## 217

Histogrammi muodostuu toisissaan kiinni olevista pylväistä. Koska luokat ovat tasalevyiset, niin pylväiden korkeudet (ja samalla myös pinta-alat) ovat suoraan verrannolliset luokan suhteelliseen frekvenssiin.

Piirretään histogrammi.





## 218

- a) Massat on taulukoitu gramman tarkkuudella.  
Esimerkiksi luokan 140–144 todellinen alaraja on 139,5 ja todellinen yläraja on 144,5.  
Luokkakeskus on todellisten rajojen keskiarvo.

$$\frac{139,5 \text{ g} + 144,5 \text{ g}}{2} = 142 \text{ g}$$

$$\frac{144,5 \text{ g} + 149,5 \text{ g}}{2} = 147 \text{ g}$$

$$\frac{149,5 \text{ g} + 154,2 \text{ g}}{2} = 152 \text{ g}$$

$$\frac{154,5 \text{ g} + 159,5 \text{ g}}{2} = 157 \text{ g}$$

- b) Lasketaan pakkausten massan keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 142 + 35 \cdot 147 + 30 \cdot 152 + 15 \cdot 157}{100} = 149$$

Massan keskiarvo on 149 g.

- c) Lasketaan pakkausten massan keskihajonta.

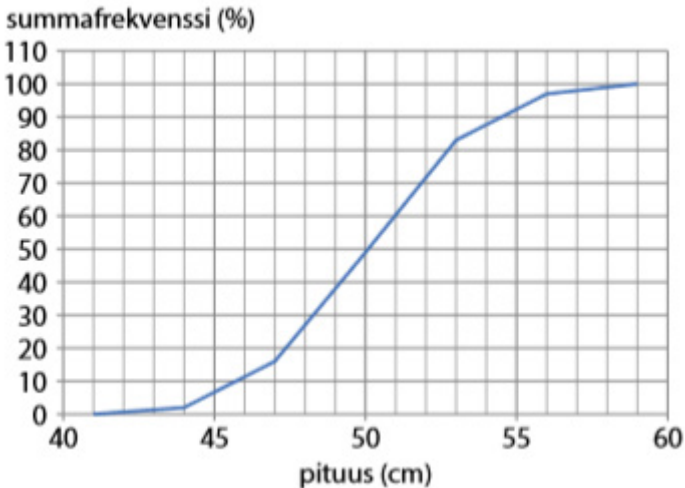
$$\sigma = \sqrt{\frac{20(142 - 149)^2 + \dots + 15(157 - 149)^2}{100}} \approx 4,8$$

Massan keskihajonta on 4,8 g.

- Vastaus**
- a) 142 g, 147 g, 152 g ja 157 g
  - b) 149 g
  - c) 4,8 g

219

Piirretään kertymäkuvaaja koordinaatistoon, jonka vaaka-akselilla on pituus ja pystyakselilla suhteellinen summafrekvenssi.

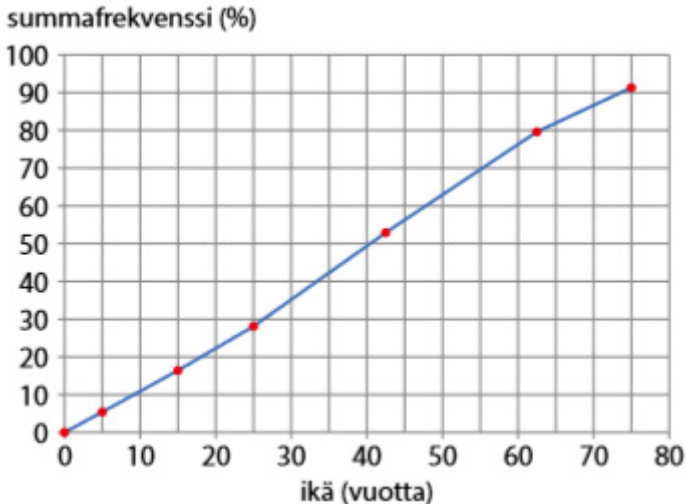


- Kuvaaja ylittää 50 %:n rajan pituuden 50 cm kohdalla. Mediaanipituus on 50 cm.
- Kuvaaja ylittää 80%:n rajan noin pituuden 53 cm kohdalla. Pituus, jota pidempiä oli 20 % tyttövauvoista, on 53 cm.
- Kuvaaja ylittää 25%:n rajan pituuden 48 cm kohdalla. Pituus, jota lyhyempiä oli 25 % tyttövauvoista, on 48 cm.

**Vastaus** a) 50 cm b) 53 cm c) 48 cm

## 220

Piirretään kertymäkuvaaja suomalaisten ikäjakaumasta vuonna 2005.



- Kuvaaja ylittää 50 %:n rajan noin iän 43 kohdalla. Mediaani-ikä on 43 vuotta.
- Kuvaaja ylittää 25 %:n rajan noin iän 22 kohdalla. Nuorempi neljännes suomalaisista oli alle 22 vuotiaita.
- Kuvaaja ylittää 75 %:n rajan noin iän 62 kohdalla. Vanhempi neljännes suomalaisista oli yli 62 vuotiaita.

**Vastaus** a) 43 b) alle 22 c) yli 62

## 221

Koko histogrammin pinta-ala on 36 ruutua.

1. pylväs on 6 ruutua.

Lasketaan suhteellinen frekvenssi.

$$\frac{6}{36} = 0,1666 \approx 17 \%$$

2. pylväs on 8 ruutua.

$$\frac{8}{36} = 0,222... \approx 22 \%$$

3. pylväs on 10 ruutua.

$$\frac{10}{36} = 0,277... \approx 28 \%$$

4. pylväs on 12 ruutua.

$$\frac{12}{36} = 0,333... \approx 33 \%$$

Lisätään suhteelliset frekvenssit taulukkoon.

ikä (vuotta)	f%
7-8	17
9-10	22
10-12	28
13-15	33

## 222

- a) Aineiston pienin arvo on 38 ja suurin arvo on 105.  
Luokitellaan pinta-alat viiteen tasalevyiseen luokkaan ja määritetään suhteelliset frekvenssit.

pinta-ala (m <sup>2</sup> )	<i>f</i>	<i>f</i> %
35–49	4	13,8
50–64	6	20,7
65–79	8	27,6
80–94	7	24,1
95–109	4	13,8
	29	100

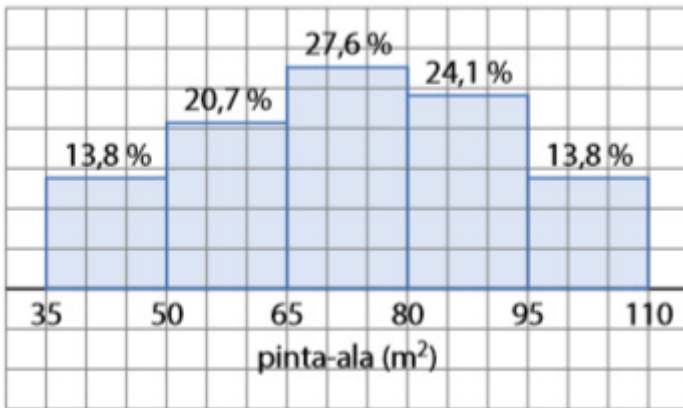
- b) Pinta-alojen keskiarvo on 73 m<sup>2</sup> ja keskihajonta 19 m<sup>2</sup>.

**Vastaus** b) keskiarvo 73 m<sup>2</sup>, keskihajonta 19 m<sup>2</sup>

**223**

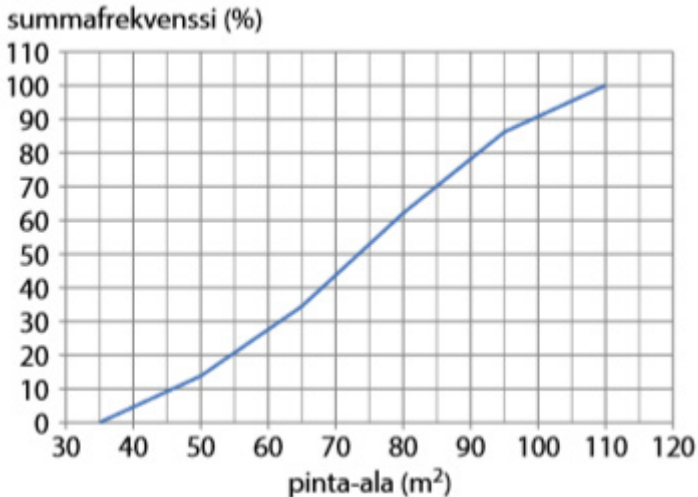
Histogrammi muodostuu toisissaan kiinni olevista pylväistä. Koska luokat ovat tasalevyiset, niin pylväiden korkeudet (ja samalla myös pinta-alat) ovat suoraan verrannolliset luokan suhteelliseen frekvenssiin.

Piirretään histogrammi.



224

Piirretään kertymäkuvaaja jakaumasta.



- a) Kuvaaja ylittää 50 %:n kohdassa 74.  
Pinta-alan mediaani on 74 m<sup>2</sup>.
- b) Kuvaaja ylittää 20 %:n rajan kohdassa 55.  
Pinta-ala, jota pienempiä oli 20 % kodeista, on 55 m<sup>2</sup>.
- c) Kuvaajan ylittää 90 %:n rajan kohdassa 99.  
Pinta-ala, jota suurempia oli 10 % kodeista, on 99 m<sup>2</sup>.

**Vastaus** a) 74 m<sup>2</sup> b) 55 m<sup>2</sup> c) 99 m<sup>2</sup>



## 225

- a) Ajat ovat taulukoitu tunnin tarkkuudella. Luokan 3–5 todellinen alaraja on 2,5 h ja todellinen yläraja 5,5 h.

Luokkakeskus on todellisten rajojen keskiarvo.

$$\frac{2,5 + 5,5}{2} = 4$$

Luokkakeskus on 4 h.

- b) Oletetaan, että viimeisen luokan yläraja on 59. Syötetään arvot taulukko-ohjelmistoon ja analysoidaan dataa taulukkolaskentaohjelmalla.

$$\bar{x} \approx 16,3$$

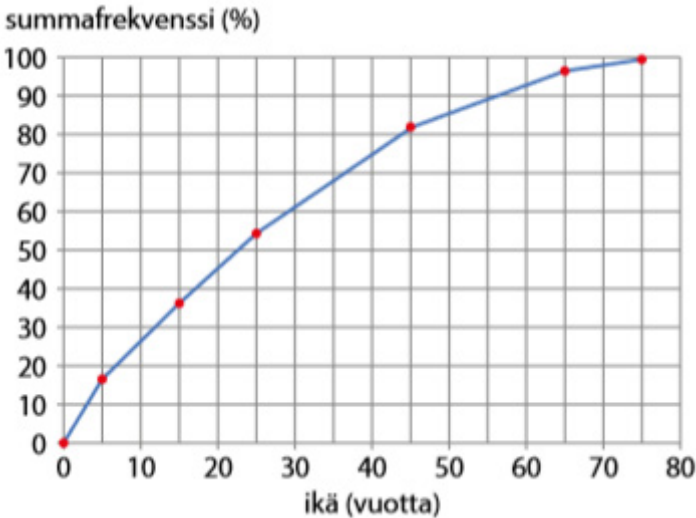
$$\sigma_x \approx 14,2$$

Keskiarvo on 16,3 h ja keskihajonta 14,2

- Vastaus** a) todelliset rajat 2,5 h ja 5,5 h; luokkakeskus 4 h  
b) keskiarvo on 16,3 h ja keskihajonta 14,2 h

## 226

Piirretään kertymäkuvaaja suomalaisten ikäjakaumasta vuonna 1800.



- Kuvaaja ylittää 50 %:n kohdassa 23.  
Suomalaisten mediaani-ikä oli 23 vuotta.
- Kuvaaja ylittää 25 %:n kohdassa 10.  
Nuorin neljännes oli alle 10 vuotta.
- Kuvaaja ylittää 75%:n kohdassa 40.  
Vanhin neljännes oli yli 40 vuotta.

**Vastaus** a) 23 vuotta b) alle 10 vuotta c) yli 40 vuotta

## 227

- a) Koko histogrammin pinta-ala on yhteensä 100 ruutua. Laskemalla kuviosta luokan ruutujen määrä saadaan myös suoraan luokan suhteellinen frekvenssi.

pituus (cm)	$f$ %
167–170	8
171–176	24
177–179	18
180–182	21
183–188	21
189–193	8
	<b>100</b>

- b) Pojista  $8\% + 24\% = 32\%$  on alle 177 cm.

$$P(\text{satunnaisesti valittu poika on alle 177 cm}) = 0,32$$

- c) Pojista  $18\% + 21\% = 39\%$  on välillä 177 cm–183 cm.

$$P(\text{satunnaisesti valittu poika on 177-183 cm}) = 0,39$$

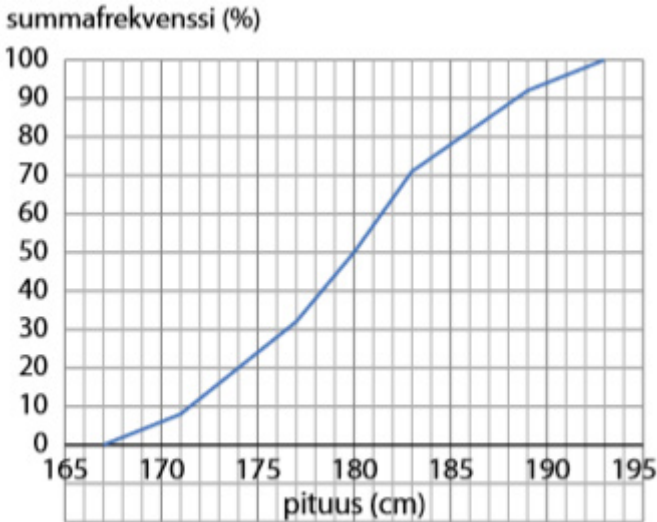
- d) Pojista  $21\% + 8\% = 29\%$  on yli 183 cm.

$$P(\text{satunnaisesti valittu poika on yli 183 cm}) = 0,29$$

**Vastaus** a) 8 %, 24 %, 18 %, 21 %, 21 %, 8 %  
 b) 0,32 c) 0,39 d) 0,29

228

Piirretään kertymäkuvaaja aineistosta.



- a) Kuvaaja ylittää 50 %:n kohdassa 180.  
Pituuden mediaani on 180 cm.
- b) Alakvartiili on arvo, jonka alapuolelle jää noin 25 %  
aineistosta. Kuvaaja ylittää 25 %:n kohdassa 175 cm.
- Yläkvartiili on arvo, jonka yläpuolelle jää noin 25 %  
aineistosta. Kuvaaja ylittää 75 %:n kohdassa 184 cm.

c) Desiilit ilmoittavat muuttujan arvot, joiden alapuolelle jakaumassa jää 10 %, 20 %, ..., 90 % tapauksista.

10 %: 171 cm

20 %: 174 cm

30 %: 176 cm

40 %: 178 cm

50%: 180 cm

60 %: 181 cm

70 %: 183 cm

80 %: 186 cm

90 %: 188 cm

**Vastaus** a) 180 cm  
b) alakvartiili 175 cm, yläkvartiili 184 cm  
c) 171 cm, 174 cm, 176 cm, 178 cm, 180 cm,  
181 cm, 183 cm, 186 cm, 188 cm