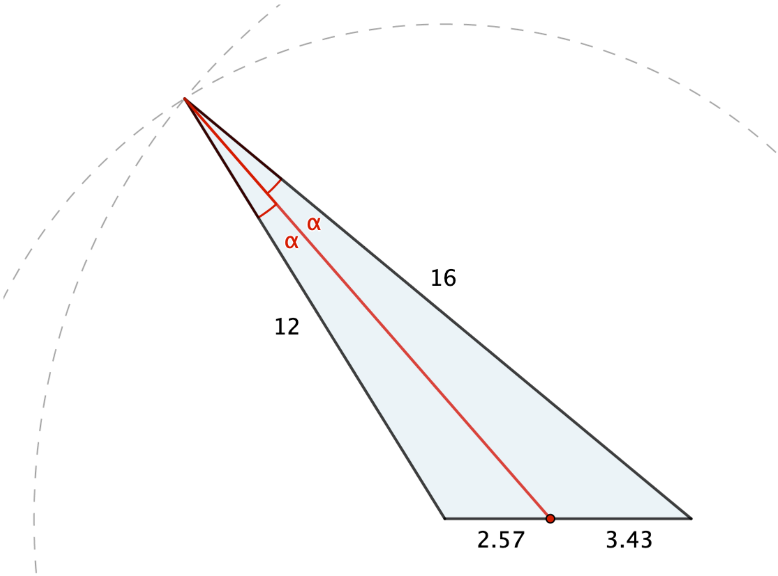
8.1

Piirretään jana, jonka pituus on 6. Piirretään tämän janan päätepisteet keskipisteinä ympyrät, joiden säteet ovat 12 ja 16. Piirretään pienimmän kulman kulmanpuolittaja. Pienin kulma on lyhymmän sivun vastainen kulma. Mitataan kulmanpuolittajan jakaman sivun osien pituudet.



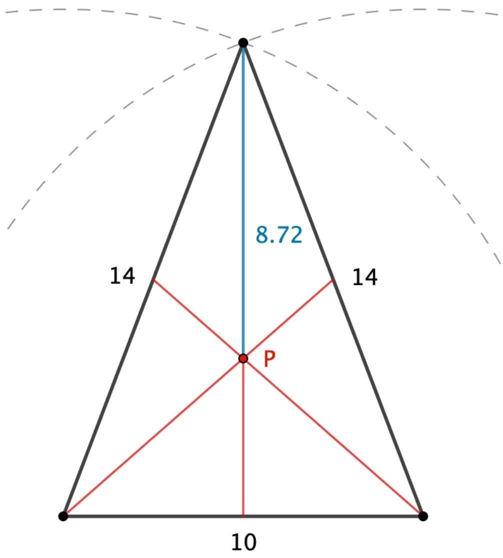
Osien pituudet ovat 3,4 ja 2,6.

Vastaus
3,4 ja 2,6

8.2

Piirretään jana, jonka pituus on 10.
Piirretään janan päätepisteet keskipisteinä ympyrät, joiden säteet ovat 14.
Ympyröiden leikkauspiste on kolmion huippukulma.

Painopiste on kolmion keskijanojen leikkauspiste. Piirretään keskijanat kolmion kärjistä vastakkaisten sivujen keskipisteisiin ja keskijanojen leikkauspiste P. Mitataan painopisteen P ja huippukulman välinen etäisyys.

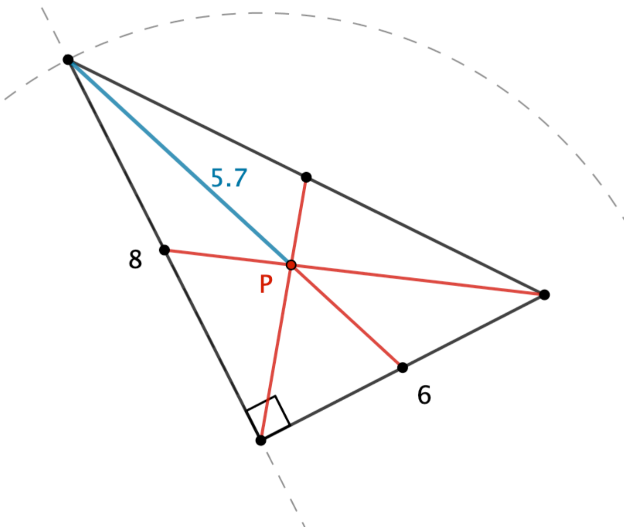


Painopisteen etäisyys kolmion huippukulman kärjestä on 8,7.

Vastaus
8,7

8.3

Piirretään jana, jonka pituus on 6. Piirretään janan toiseen päätepisteeseen janan normaali ja ympyrä, jonka säde on 8. Kolmion kolmas kärki on normaalin ja ympyrän leikkauspisteessä.
Täydennetään kuvio kolmioksi ja piirretään keskijanat kolmion kärjistä vastakkaisten sivujen keskipisteisiin. Painopiste on keskijanojen leikkauspiste P. Mitataan leikkauspisteen etäisyys pienimmän kulman kärjestä. Pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma.

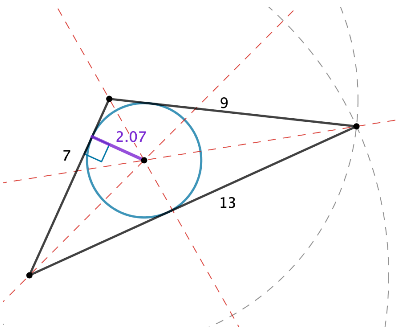


Painopisteen etäisyys pienimmän kulman kärjestä on $5,7$.

Vastaus
5,7

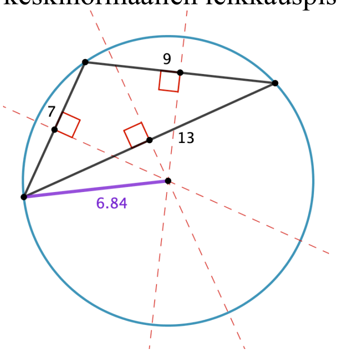
8.4

a) Piirretään jana, jonka pituus on 7.
Janan päätepisteet keskipisteinä piirretään ympyrät, joiden säteet ovat 9 ja 13.
Näiden ympyröiden leikkauspiste on kolmion kolmas kärki.
Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteessä.



Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on 2,1.

b) Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä.



Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 6,8.

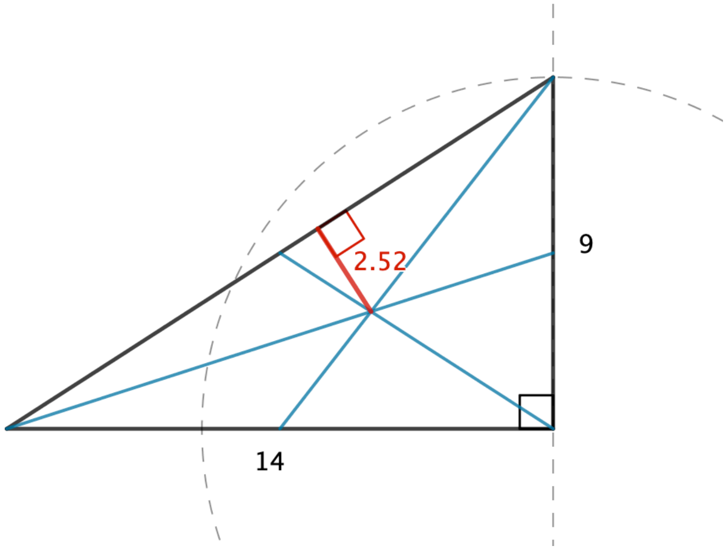
Vastaus

a) Säde on 2,1.
b) Säde on 6,8.

8.5

Piirretään jana, jonka pituus on 14.
Piirretään janan toiseen päätepisteeseen normaali ja ympyrä, jonka säde on 9. Kolmion kolmas kärki on ympyrän ja normaalin leikkauspiste.

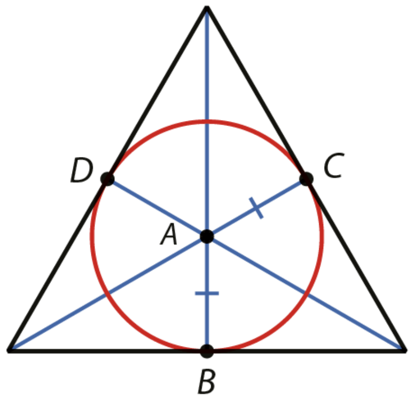
Kolmion painopiste on kolmion keskijanojen leikkauspiste. Piirretään keskijanat ja mitataan niiden leikkauspisteen etäisyys hypotenuusasta.



Kolmion painopisteen etäisyys hypotenuusasta on 2,5.

Vastaus
Etäisyys on 2,5.

8.6



Kuvassa tasasivuisen kolmion sisään on piirretty ympyrä.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste, joten piirretyt siniset janat ovat kulmanpuolittajia.

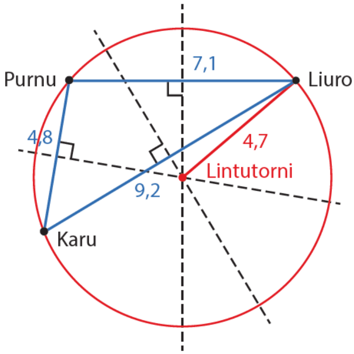
Koska kolmio on tasasivuinen, kulmanpuolittajat ovat samalla keskijanoja ja kolmion korkeusjanoja.

Tasasivuisen kolmion korkeusjanat sijaitsevat kolmion sivujen keskinormaaleilla. Keskinormaalien leikkauspiste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

Vastaus
a) *A*
b) *A*
c) *A*
d) *B*, *C*, *D*
e) *A*
f) *A*
g) *A*
h) *A*, *B*, *C*, *D*

8.7

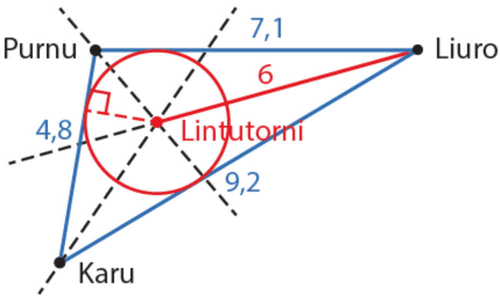
a)



Lintutorni on yhtä kaukana kaikista kolmion kärjissä sijaitsevista kylistä, joten se sijaitsee kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä.

Linturnin etäisyys Liuron kylästä on 4,7 km.

b)



Lintutorni on yhtä kaukana kolmion kylkiä pitkin kulkevista teistä, joten se sijaitsee kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteessä.

Lintutornin etäisyys Liuron kylästä on 6,0 km.

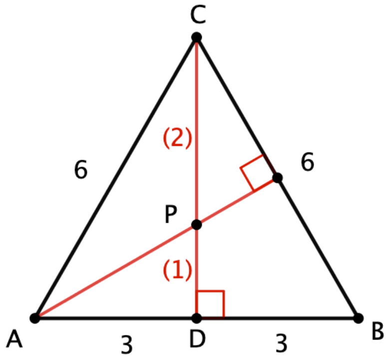
Vastaus

a) 4,7 km

b) 6,0 km

8.8

a)



Tasasivuisen kolmion keskijanat ovat samalla kolmion korkeusjanoja. Suorakulmaisesta kolmiosta ADC saadaan keskijanan CD pituus Pythagoraan lauseella.

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$6^2 = 3^2 + CD^2$$

$$CD^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

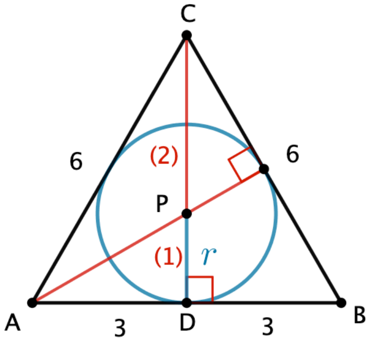
$$CD = -\sqrt{27} \text{ tai } CD = \sqrt{27}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $CD = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.
Painopisteen P etäisyys kolmion kärjestä on

$$CP = \frac{2}{3} \cdot CD = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

b) Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste.

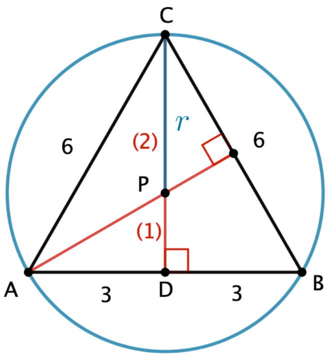
Tasasivuisen kolmion keskijanat ovat samalla kulmanpuolittajia, joten sisään piirretyn ympyrän keskipiste on myös keskijanojen leikkauspiste.



Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on

$r = PD = \frac{1}{3} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

c) Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste.
Tasasivuisen kolmion keskijanat ovat samalla sivujen keskinormaaleja, joten sisään piirretyn ympyrän keskipiste on myös keskijanojen leikkauspiste.



Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on

$r = CP = 2\sqrt{3}$

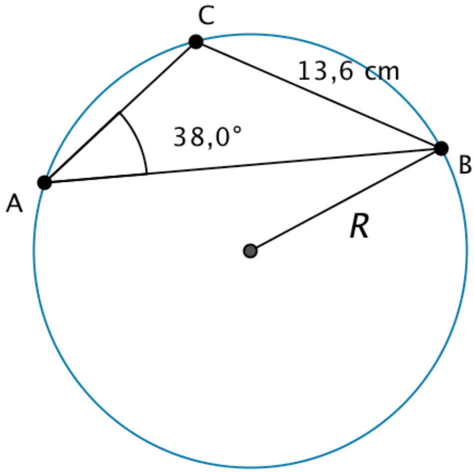
Vastaus

a) $2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{3}$

8.9



Ratkaistaan kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde laajennetun sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

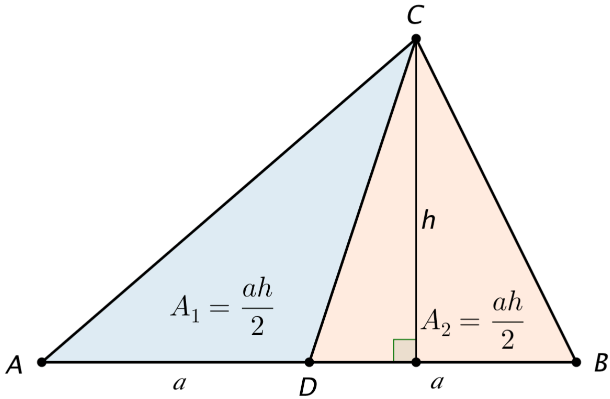
$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{13,6}{2\cdot\sin 38,0^\circ} = 11,045... \approx 11,0 \text{ (cm)}$$

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 11,0 cm.

Vastaus
R = 11,0 cm

8.10

On osoitettava, että kolmion keskijana jakaa kolmion pinta-alan kahteen yhtä suureen osaan. Merkitään kolmion kannan pituutta $2a$:lla ja piirretään keskijana kolmion huipusta kannalle.



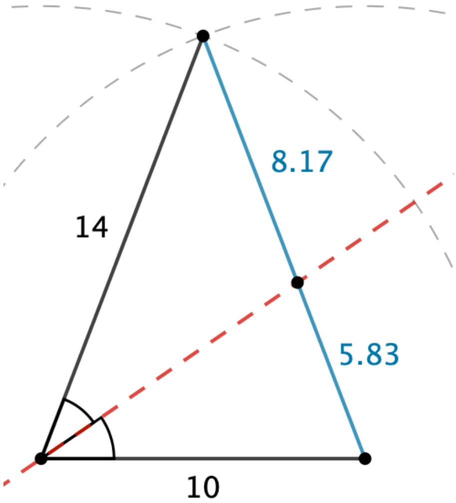
Huipusta piirretty keskijana jakaa kolmion kannan kahteen yhtä suureen osaan.

Keskijana jakaa kolmion kahteen pienempään kolmioon, joiden kummankin pinta-ala on $\frac{ah}{2}$.

Siis mediaani puolittaa kolmion pinta-alan. $\square$

8.11

Piirretään kuva ja mitataan osien pituudet.



Mitataan janojen pituudet.

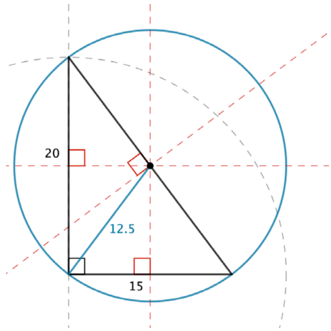
Kantakulman puolittaja jakaa vastaisen sivun osiin, joiden pituudet ovat 8,2 ja 5,8.

Vastaus
8,2 ja 5,8

8.12

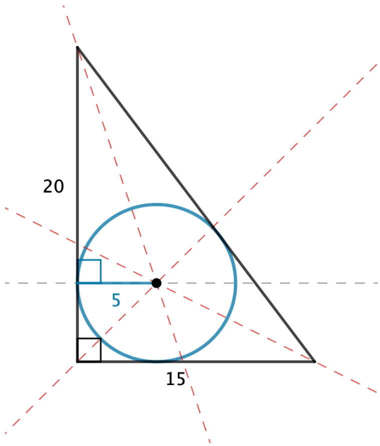
a) Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste.

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 12,5.

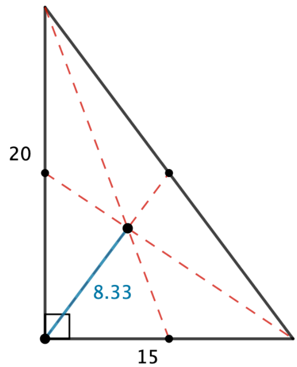


b) Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on 5,0.



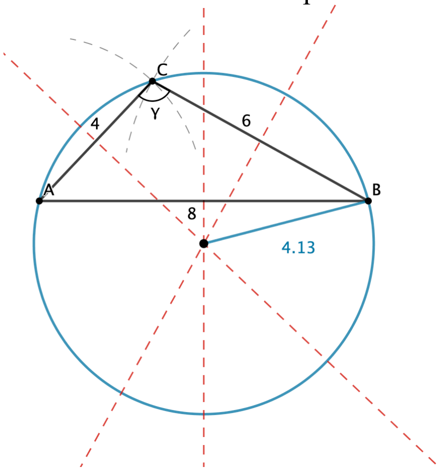
c) Kolmion painopiste on keskijanojen leikkauspiste.
Kolmion painopisteen etäisyys suoran kulman kärjestä on 8,3.



Vastaus
a) 12,5 **b)** 5,0 **c)** 8,3

8.13

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste.



Geometriaohjelmalla mitattu kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 4,1.

Tarkistetaan tulos laajennetulla sinilauseella

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Selvitetään tätä varten kulma γ kosinilauseella.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad c = 8{,}0;\ a = 4{,}0 \text{ ja } b = 6{,}0$$

$$8{,}0^2 = 4{,}0^2 + 6{,}0^2 - 2\cdot 4{,}0\cdot 6{,}0\cdot\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{8{,}0^2 - 4{,}0^2 - 6{,}0^2}{-2\cdot 4{,}0\cdot 6{,}0} = -0{,}25$$

$$\gamma = \cos^{-1}(-0{,}25) = 104{,}47...^\circ$$

Muodostetaan yhtälö säteen laskemiseksi.

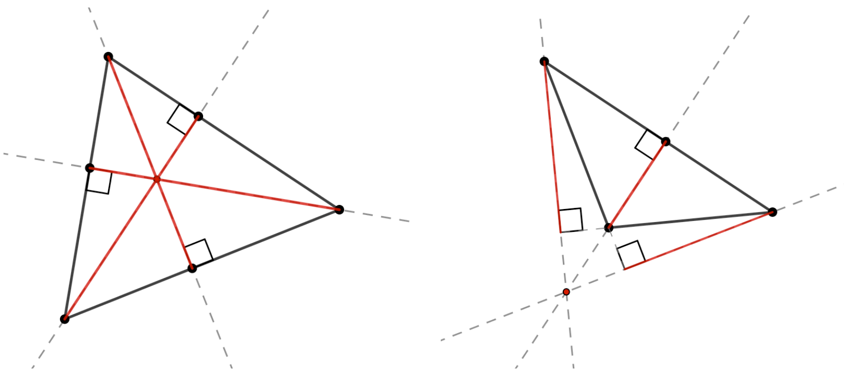
$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$R = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{8{,}0}{2\cdot\sin 104{,}47...^\circ} = 4{,}13... \approx 4{,}1$$

Vastaus

Säde on 4,1.

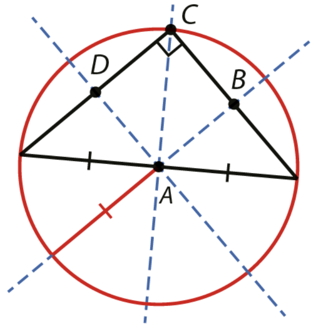
8.14



Kolmioon on piirretty punaiset korkeusjanat ja niiden jatkeet (katkoviivalla piirretyt suorat).

Kolmion muotoa muuttamalla havaitaan, että korkeusjanat tai niiden jatkeet leikkaavat aina samassa pisteessä, joka voi sijaita kolmion sisällä tai sen ulkopuolella.

8.15



Kuvassa on kolmio ja sen ympäri piirretty ympyrä. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste.

a) Vain kuvan suora AC on kolmion keskijana. Siis mikään pisteistä ei ole keskijanojen leikkauspiste.

b) Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Vain kuvan suora AC on kulmanpuolittaja (kolmio on tasakylkinen). Mikään piirretyistä pisteistä ei siis ole kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

c) Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on A.

d) Koska kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste, niin sivujen keskipisteitä ovat pisteet A, B ja D.

e) Koska kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste, niin keskinormaalien leikkauspiste on A.

f) Kolmio on tasakylkinen ja suorakulmainen. Kateetit ovat korkeusjanoja, kuten myös jana AC. Siis korkeusjanojen leikkauspiste on C.

g) Vain kuvan suora AC on kulmanpuolittaja. Kulmanpuolittajien leikkauspiste olisi kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Mikään pisteistä ei siis ole kulmanpuolittajien leikkauspiste.

h) Vain kuvan suora AC on kulmanpuolittaja. Kulmanpuoliiajan pisteitä ovat A ja C.

Vastaus

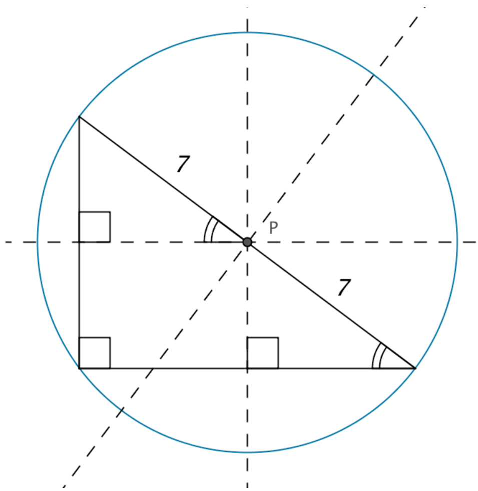
a) ei mikään	**b)** ei mikään	**c)** A	**d)** A, B, D
e) A	**f)** C	**g)** ei mikään	**h)** A, C

8.16

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste.

Kateettien suuntaiset keskinormaalit erottavat suorakulmaisesta kolmiosta pienemmät suorakulmaiset kolmiot, jotka ovat alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoisia mittakaavassa 1 : 2.

Kateettien suuntaiset keskinormaalit leikkaavat hypotenuusan keskipisteessä. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde r on puolet hypotenuusan pituudesta.

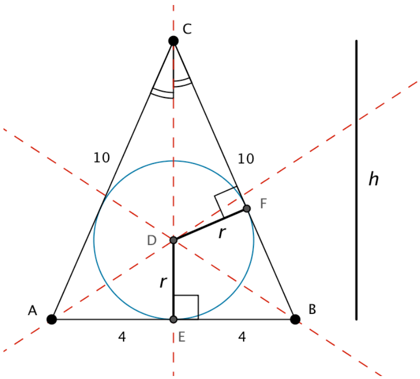


Hypotenuusan pituus on siis sama kuin ympyrän halkaisija d.

$$d = 2r = 2 \cdot 7 = 14$$

Vastaus
Hypotenuusan pituus on 14.

8.17



Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion huippukulman puolittava jana on samalla myös kolmion korkeusjana.
Kolmiot BCE ja DFC ovat yhdenmuotoiset (kk), koska

- niissä on molemmissa suora kulma
- niillä on yhteisenä kulmana huippukulman puolikas: $\sphericalangle DCF = \sphericalangle ECB$.

Vastinjanojen suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r.
Lasketaan ensin kolmion korkeus h.

$10^2 = h^2 + 4^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$h = -2\sqrt{2}$ tai $h = 2\sqrt{2}$

Korkeus on positiivinen luku, joten $h = 2\sqrt{2}$.

$$\frac{DF}{BE} = \frac{DC}{BC} \qquad \left| \begin{array}{l} DF = r,\ BE = 4 \\ DC = h - r,\ BC = 10 \end{array} \right.$$

$$\frac{r}{4} = \frac{h-r}{10} \qquad \left| h = 2\sqrt{21} \right.$$

$$\frac{r}{4} = \frac{2\sqrt{21} - r}{10}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

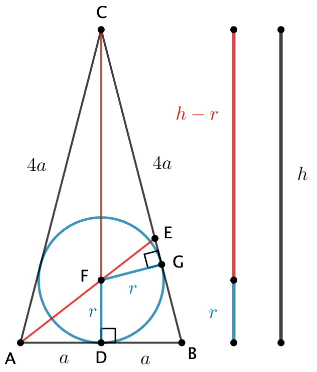
$$r = \frac{4\sqrt{21}}{7}$$

Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on $\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

Vastaus

$\frac{4\sqrt{21}}{7}$

8.18



Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion huippukulman puolittava jana on myös kolmion korkeusjana.
Kolmiot FGC ja DBC ovat yhdenmuotoiset (kk), koska

- molemmissa on suora kulma
- kolmioilla on yhteinen kulma $\sphericalangle FCG = \sphericalangle DCB$.

Vastinjanojen suhde on vakio. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan sisään piirretyn ympyrän säde r.
Ratkaistaan ensin kolmion korkeus h.

$(4a)^2 = h^2 + a^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$h = -\sqrt{15}a$ tai $h = \sqrt{15}a$ $(a > 0)$

Korkeus on positiivinen luku, joten $h = \sqrt{15}a$.
Muodostetaan verranto ja ratkaistaan säde r.

$$\frac{FC}{BC} = \frac{FG}{BD} \qquad \left| \begin{array}{l} FC = h - r,\ BC = 4a \\ FG = r,\ BD = a \end{array} \right.$$

$$\frac{h-r}{4a} = \frac{r}{a} \qquad \left| h = \sqrt{15}a \right.$$

$$\frac{\sqrt{15}a - r}{4a} = \frac{r}{a}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

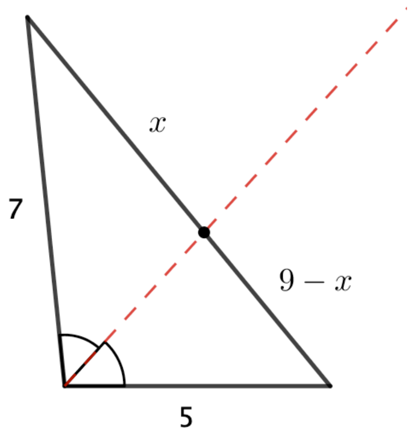
Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on $\frac{\sqrt{15}}{5}a$.

Vastaus

$\frac{\sqrt{15}}{5}a$

8.19

Suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma. Kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen pituuksien suhteessa.
Merkitään kolmion sivun toisen osan pituutta kirjaimella x, jolloin toisen osan pituus on $9-x$.



Muodostetaan verranto ja ratkaistaan x.

$$\frac{x}{9-x}=\frac{7}{5}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$$

Lasketaan toisen osan pituus.

$$9-x=9-5\frac{1}{4}=3\frac{3}{4}$$

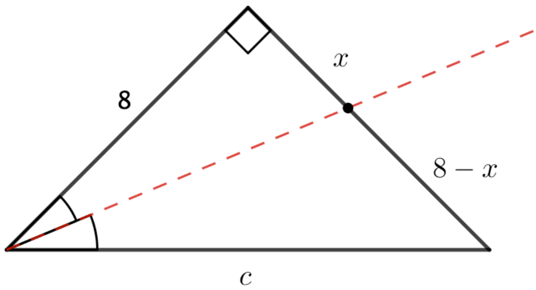
Vastaus

$3\frac{3}{4}$ ja $5\frac{1}{4}$

8.20

Merkitään kolmion hypotenuusan pituutta kirjaimella c ja

kulmanpuolittajan jakaman sivun toisen osan pituutta kirjaimella x. Toisen osan pituus on tällöin $8-x$.



Ratkaistaan hypotenuusan pituus c Pythagoraan lauseella.

$c^2 = 8^2 + 8^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$c = -8\sqrt{2}$ tai $c = 8\sqrt{2}$

Pituus on positiivinen luku, joten $c = 8\sqrt{2}$.

Kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen pituuksien suhteessa. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan x.

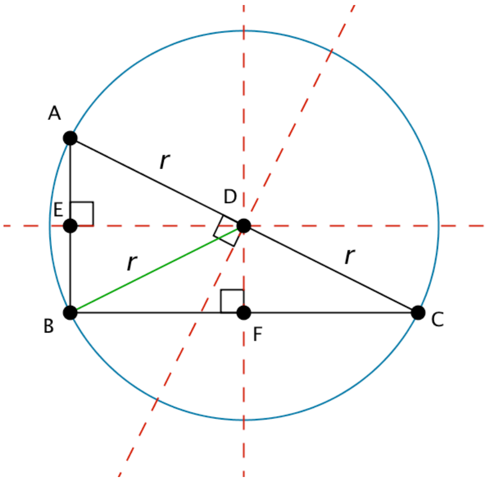
$\frac{x}{8-x} = \frac{8}{8\sqrt{2}}$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} = 8\sqrt{2} - 8 \approx 3,3$

Toisen osan pituus on $8 - x = 8 - (8\sqrt{2} - 8) = 16 - 8\sqrt{2} \approx 4,7$.

Vastaus
$16 - 8\sqrt{2} \approx 4,7$ ja $8\sqrt{2} - 8 \approx 3,3$

8.21



Käytetään kuvan merkintöjä.

Oletuksena on, että kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivulla AC. On osoitettava, että kolmio ABC on suorakulmainen.

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Koska ympyrän keskipiste D on kolmion sivulla AC, se on välttämättä samalla sivun AC keskipiste.

Ympyrän säde $r = AD = DC = BD$.

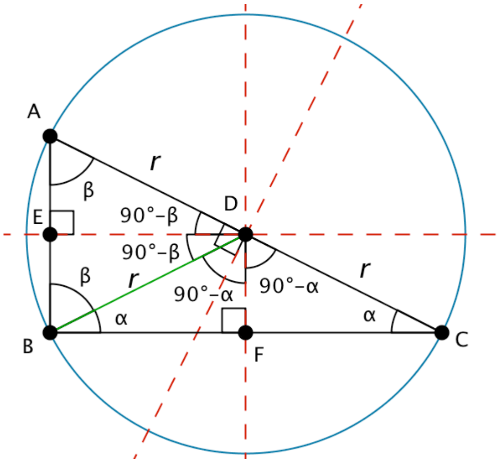
Alkuperäinen kolmio ABC jakautuu ympyrän säteen BD sekä keskinormaaleilla olevien janojen ED ja FD avulla neljään pienempään kolmioon.

Kolmioissa BDE ja AED on yhtä pitkät vastinsivut:
$AD = BD = r$, $BE = EA$ ja sivu ED on yhteinen.
Siis kolmiot BDE ja AED ovat yhdenmuotoiset mittakaavassa 1 : 1 eli ne ovat yhtenevät.

Vastaavasti kolmioissa BFD ja CDF on yhtä pitkät vastinsivut:
$BF = FC$, $BD = DC = r$ ja sivu FD on yhteinen.

Siis myös kolmiot BFD ja CFD ovat yhdenmuotoiset mittakaavassa 1 : 1 eli ne ovat yhtenevät.

Täydennetään kuvioon kulmat α ja β.



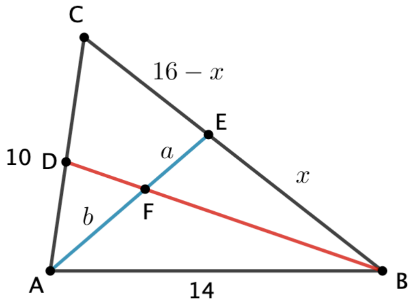
Kulmat ADB ja BDC ovat vieruskulmia, joten

$$
\begin{aligned}
\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC &= 180^\circ \\
2\cdot(90^\circ-\beta)+2\cdot(90^\circ-\alpha) &= 180^\circ \\
180^\circ-2\beta+180^\circ-2\alpha &= 180^\circ \qquad \left|\, -180^\circ-180^\circ \right. \\
-2\alpha-2\beta &= -180^\circ \qquad \left|\, :(-2) \right. \\
\alpha+\beta &= 90^\circ
\end{aligned}
$$

Siis kolmion ABC kulma $\sphericalangle CBA = \alpha+\beta = 90^\circ$, joten kolmio ABC on suorakulmainen. $\square$

8.22

Suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma, pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma.



Käytetään kuvan merkintöjä.

On laskettava suhde $\frac{b}{a}$ (tai $\frac{a}{b}$).

Kolmio ABC:

Suurimman kulman puolittaja (sininen) jakaa vastaisen sivun BC viereisten sivujen pituuksien suhteessa.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{x}{16-x} = \frac{14}{10}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \frac{28}{3}$$

Kolmio ABE:

Pienimmän kulman puolittaja (punainen) jakaa vastaisen sivun AE viereisten sivujen pituuksien suhteessa.

Muodostetaan yhtälö ja lasketaan suhde $\frac{b}{a}$.

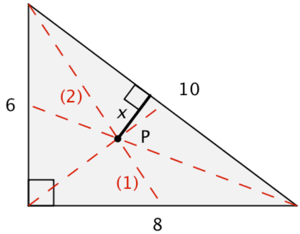
$$\frac{b}{a} = \frac{14}{\frac{28}{3}} = \frac{3}{2}$$

Pienimmän kulman puolittaja jakaa suurimman kulman puolittajan suhteessa $3:2$ (tai suhteessa $2:3$).

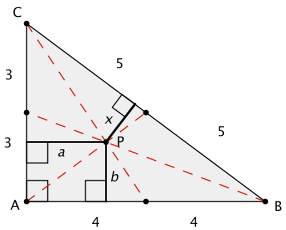
Vastaus

$3:2$ (tai $2:3$)

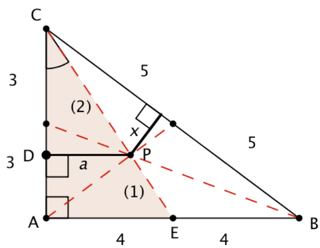
8.23



Painopiste P jakaa mediaanit 2 : 1 kärjestä lukien.
Merkitään kysyttyä painopisteen P etäisyyttä hypotenuusasta kirjaimella x.
Huomaa, että keskijana jakaa kolmion kulman vasteisen sivun kahteen yhtä pitkään osaan. Tutkittava x:n pituinen jana ei ole osa keskijanaa, joten se ei jaa hypotenuusaa kahteen yhtä pitkään osaan.
Täydennetään kuvaa.



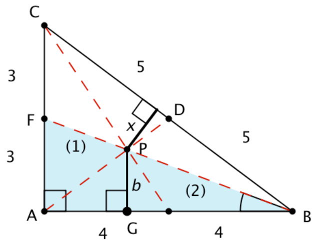
Selvitetään kirjaimilla a ja b merkittyjen janojen pituudet yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Lasketaan tämän jälkeen kysytty x kolmion pinta-alan avulla.



Kolmiot AEC ja DPC ovat yhdenmuotoiset (kk), koska
- molemmissa on suora kulma ja
- kulma ACE on yhteinen.

Saadaan yhtälö vastinpituuksien suhteen avulla.

$$\frac{a}{4} = \frac{2}{3} \quad \text{eli} \quad a = \frac{8}{3}$$

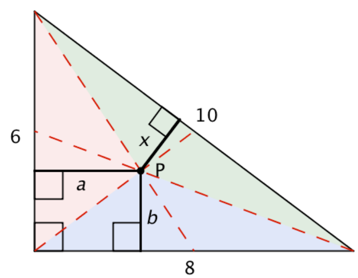


Vastaavasti kolmiot ABF ja GBP ovat yhdenmuotoiset (kk).
Saadaan yhtälö vastinpituuksien suhteen avulla.

$$\frac{b}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{eli} \quad b = \frac{6}{3}$$

Alkuperäisen kolmion ABC pinta-ala on

$$A = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 .$$



Toisaalta kolmion ABC pinta-ala on

$$A = \frac{6 \cdot a}{2} + \frac{8 \cdot b}{2} + \frac{10 \cdot x}{2} \qquad \left| \begin{array}{l} a = \frac{8}{3} \\ b = \frac{6}{3} \end{array} \right.$$

$$= \frac{6 \cdot \frac{8}{3}}{2} + \frac{8 \cdot \frac{6}{3}}{2} + \frac{10x}{2}$$

$$= 8 + 8 + 5x$$

$$= 16 + 5x.$$

Sijoitetaan $A = 24$ yhtälöön $A = 16 + 5x$ ja ratkaistaan x.

$$16 + 5x = 24 \quad \text{eli}$$

$$5x = 8 \quad \text{eli}$$

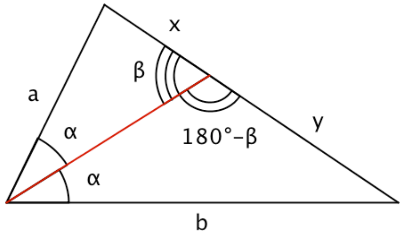
$$x = \frac{8}{5}$$

Painopisteen etäisyys hypotenuusasta on $\frac{8}{5}$.

Vastaus

$\frac{8}{5}$

8.24



On osoitettava, että kolmion kulmanpuolittaja jakaa kulman vastaisen sivun viereisten sivujen pituuksien suhteessa eli $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.

Tapa 1
Sovelletaan sinilausetta erikseen molempiin syntyneisiin osakolmioihin.

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sin\beta}\\ \dfrac{y}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin(180^\circ-\beta)}\end{cases} \qquad \left|\ \sin(180^\circ-\beta)=\sin\beta\right.$$

$$\begin{cases}x\sin\beta=a\sin\alpha\\ y\sin\beta=b\sin\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{x\sin\beta}{a}\\ y\sin\beta=b\sin\alpha\end{cases} \qquad \left|\ \text{Sijoitetaan alempaan yhtälöön.}\right.$$

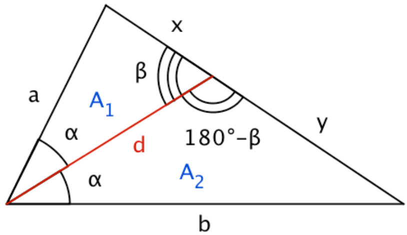
$$y\sin\beta=b\cdot\frac{x\sin\beta}{a} \qquad \left|\cdot\frac{a}{\sin\beta}\right.$$

$$y\cdot a=b\cdot x \qquad \left|:by\right.$$

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$$

Saatiin osoitettua, että $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, joten väite on todistettu. □

Tapa 2 Tutkitaan osakolmioiden pinta-aloja.



Lasketaan osakolmioiden pinta-alat A_1 ja A_2 ja muodostetaan yhtälöpari.

$$(A_1 =)\frac{1}{2}ad\sin\alpha = \frac{1}{2}xd\sin\beta \qquad \Big| \cdot \frac{2}{d}$$

$$a\sin\alpha = x\sin\beta$$

$$(A_2 =)\frac{1}{2}bd\sin\alpha = \frac{1}{2}yd\sin(180^\circ-\beta) \qquad \Big| \cdot \frac{2}{d}$$

$$b\sin\alpha = y\sin(180^\circ-\beta) \qquad \Big| \sin(180^\circ-\beta) = \sin\beta$$

$$b\sin\alpha = y\sin\beta$$

Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a\sin\alpha = x\sin\beta \\ b\sin\alpha = y\sin\beta \end{cases}$$

Ratkaistaan ylemmästä $\sin\alpha$ ja sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{x\sin\beta}{a} \\ b\sin\alpha = y\sin\beta \end{cases}$$

$$b\sin\alpha = y\sin\beta$$

$$b\cdot\frac{x\sin\beta}{a} = y\sin\beta \qquad \Big| : \sin\beta$$

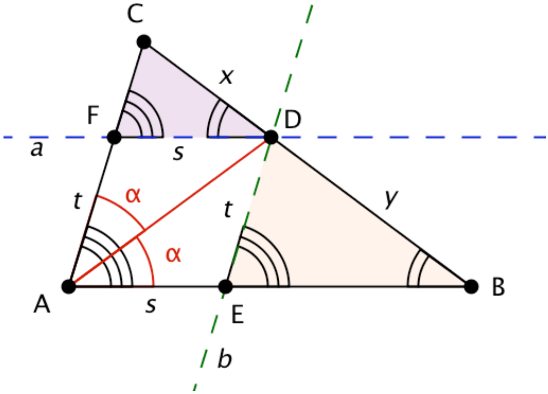
$$b\cdot\frac{x}{a} = y \qquad \Big| \cdot \frac{a}{by}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

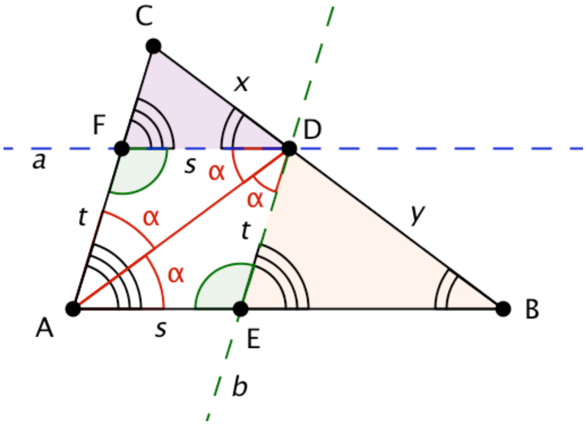
Saatiin osoitettua, että $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, joten väite on todistettu. $\square$

Tapa 3
Tutkitaan yhdenmuotoisia kolmioita.

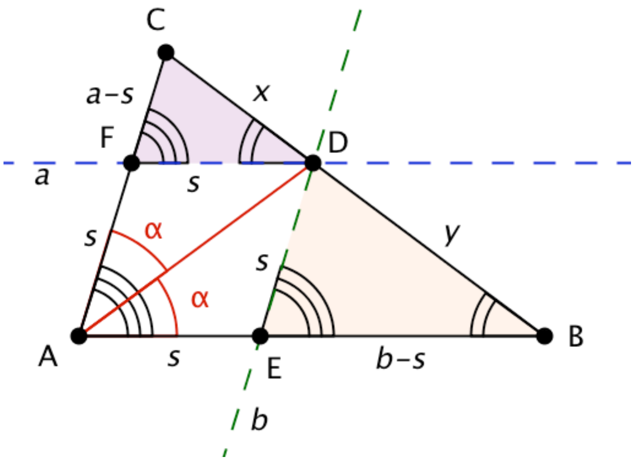
Piirretään kulmanpuolittajan ja sivun BC leikkauspisteeseen sivujen AC ja AB suuntaiset suorat. Syntyy kolme kolmiota: ΔABC, ΔEBD ja ΔFDC.



Kolmiot ΔABC, ΔEBD ja ΔFDC ovat yhdenmuotoiset (kk), koska niissä on kaksi samaa vastinkulmaparia (samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, koska piirretyt suorat ovat yhdensuuntaisia kolmion sivujen kanssa).



Lisäksi havaitaan, että kolmiot AED ja ADF ovat tasakylkisiä, koska niiden kantakulmat ovat yhtäsuuret (α, punainen kaari), joten $s = t$.



Yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinpituuksien suhde on vakio.

Yhdenmuotoisten kolmioiden ABC ja EBD avulla saadaan yhtälö

$$\frac{AC}{AB} = \frac{ED}{EB}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{s}{b-s}$$

Toisaalta yhdenmuotoisten kolmioiden FDC ja EBD avulla saadaan yhtälö

$$\frac{CD}{DB} = \frac{FD}{EB}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{s}{b-s}$$

Siis $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ ja väite on todistettu. $\square$