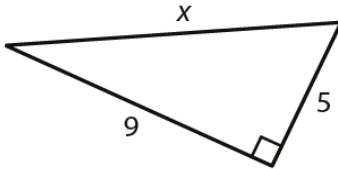


5.1

a)



Sovelletaan suorakulmaiseen kolmioon Pythagoraan lausetta.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = 9, b = 5 \text{ ja } c = x$$

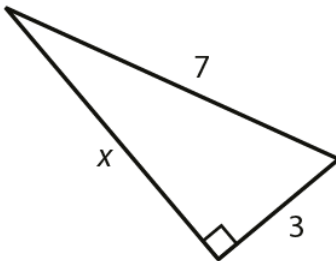
$$9^2 + 5^2 = x^2$$

$$x^2 = 106$$

$$x = \sqrt{106} \text{ tai } x = -\sqrt{106}$$

Kolmion sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = \sqrt{106}$.

b)



Sovelletaan suorakulmaiseen kolmioon Pythagoraan lausetta.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = x, b = 3 \text{ tai } c = 7$$

$$x^2 + 3^2 = 7^2$$

$$x^2 = 7^2 - 3^2$$

$$x^2 = 40$$

$$x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ tai } x = -\sqrt{40} = -2\sqrt{10}$$

Kolmion sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 2\sqrt{10}$.

Vastaus

a) $\sqrt{106}$

b) $2\sqrt{10} \text{ (} = \sqrt{40} \text{)}$

5.2

- a) Kolmio on suorakulmainen, jos se toteuttaa Pythagoraan lauseen.
Hypotenuusa on suorakulmaisen kolmion pisin sivu.

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad a = 18, b = 24 \text{ ja } c = 30$$

$$18^2 + 24^2 = 30^2$$

$$900 = 900$$

tosi

Sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, joten kolmio on suorakulmainen.

- b) Kolmio on suorakulmainen, jos se toteuttaa Pythagoraan lauseen.
Hypotenuusa on suorakulmaisen kolmion pisin sivu.

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad a = 21, b = 24 \text{ ja } c = 32$$

$$21^2 + 24^2 = 32^2$$

$$1017 = 1024$$

epätosi

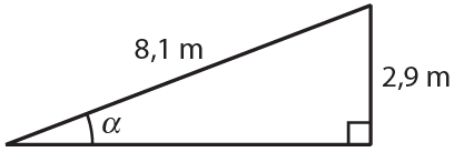
Sivujen pituudet eivät toteuta Pythagoraan lausetta, joten kolmio ei ole suorakulmainen.

Vastaus

- a) on
b) ei ole

5.3

- a) Sini on vastaisen kateetin pituuden ja suhde hypotenuusaan pituuteen.

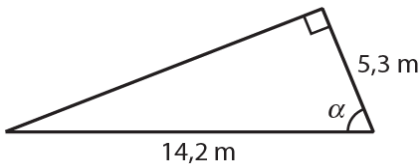


Muodostetaan yhtälö sinin avulla ja ratkaistaan kulma α .

$$\sin \alpha = \frac{2,9}{8,1}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{2,9}{8,1} \right) = 20,97...^{\circ} \approx 21^{\circ}$$

- b) Kosini on viereisen kateetin pituuden ja suhde hypotenuusaan pituuteen.



Muodostetaan yhtälö kosinin avulla ja ratkaistaan kulma α .

$$\cos \alpha = \frac{5,3}{14,2}$$

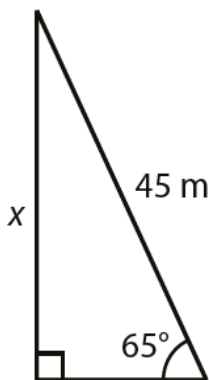
$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{5,3}{14,2} \right) = 68,08...^{\circ} \approx 68^{\circ}$$

Vastaus

a) 21°

b) 68°

5.4



Suorakulmaisesta kolmiosta tunnetaan kulma ja hypotenuusa.

Muodostetaan yhtälö sinin avulla ja ratkaistaan sivun pituus x .

$$\sin 65^\circ = \frac{x}{45}$$

Sini on vastaisen kateetin
suhde hypotenuusaan.

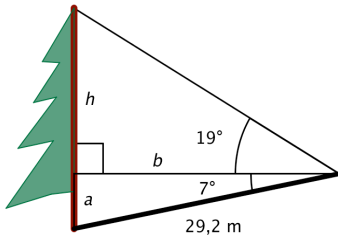
$$x = 45 \cdot \sin 65^\circ$$

$$x = 40,78... \approx 41 \text{ (m)}$$

Vastaus

41 m

5.5



Käytetään kuvan merkintöjä. Lasketaan ensin alemman suorakulmaisen kolmion avulla kateetit a ja b .

Tämän jälkeen lasketaan ylemmän suorakulmaisen kolmion avulla 19° :n kulman vastaisen kateetin pituus h .

Kysytty kuusen pituus on $a + h$.

$$\sin 7^\circ = \frac{a}{29,2}$$

$$\begin{aligned} a &= 29,2 \cdot \sin 7^\circ \\ &= 3,558... \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\cos 7^\circ = \frac{b}{29,2}$$

$$\begin{aligned} b &= 29,2 \cdot \cos 7^\circ \\ &= 28,982... \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\tan 19^\circ = \frac{h}{b}$$

$$\begin{aligned} h &= b \tan 19^\circ \\ &= 28,982... \cdot \tan 19^\circ \\ &= 9,979... \text{ (m)} \end{aligned}$$

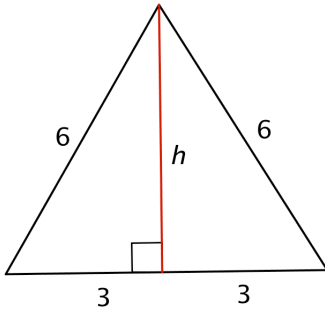
$$\begin{aligned} a + h &= 3,558... + 9,979... \\ &= 13,53... \\ &\approx 13,5 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Kuusen pituus on 13,5 m.

Vastaus

13,5 m

5.6



- a) Jaetaan tasasivuinen kolmio korkeusjanalla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan korkeus h .

$$6^2 = 3^2 + h^2$$

$$h^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

$$x = \sqrt{27} \text{ tai } x = -\sqrt{27}$$

Korkeus on positiivinen luku, joten $h = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.

b) Pinta-ala $A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

Vastaus

a) $3\sqrt{3}$

b) $9\sqrt{3}$

5.7

- a) Tutkitaan toteuttavatko kolmion sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$7^2 + 24^2 = 25^2$$

$$625 = 625$$

tosi

Kolmion sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, joten kolmio on suorakulmainen.

Kolmio ei ole tasakylkinen eikä tasasivuinen, sillä sen sivut ovat eri pituiset.

Vaihtoehto 2 on oikein.

- b) Tutkitaan, toteuttavatko kolmion sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$5^2 + 12^2 = 14^2$$

$$169 = 196$$

epätosi

Sivujen pituudet eivät toteuta Pythagoraan lausetta, joten kolmio ei ole suorakulmainen.

Kolmio ei ole tasakylkinen eikä tasasivuinen, sillä sen sivut ovat eri pituiset.

Vaihtoehto 1 on oikein.

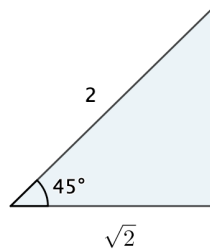
c) Tapa 1

Koska tarkasteltavan kolmion sivujen

suhde $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$, kolmio on

yhdenmuotoinen kaikkien sellaisten suorakulmaisten kolmioiden kanssa, joissa on 45° :n kulma. Siis tarkasteltava kolmio on suorakulmainen.

Kolmion toinen terävä kulma on $180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, joten kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret ja kolmio on tasakylkinen.

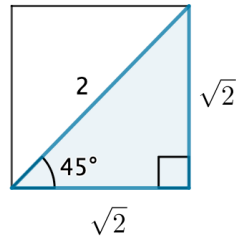


Tapa 2

Jos neliön sivun pituus on $\sqrt{2}$, niin neliön lävistäjän pituus on 2, sillä kateettien neliöiden summa on

$$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4$$

ja hypotenuusan neliö on $2^2 = 4$.



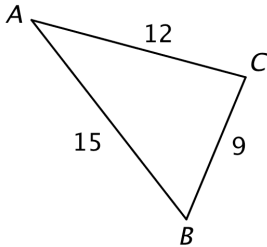
Neliön lävistäjä jakaa neliön kahdeksi suorakulmaiseksi tasakylkiseksi kolmioksi. Siis tarkasteltava kolmio on suorakulmainen ja tasakylkinen.

Vaihtoehdot 2 ja 3 ovat oikein.

Vastaus

- a) 2
- b) 1
- c) 2 ja 3

5.8



- a) Tutkitaan toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen. Pisin sivu on ehdokas hypotenuusaksi, lyhyemmät kateeteiksi.

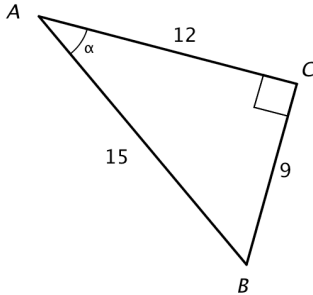
$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Toisaalta

$$15^2 = 225.$$

Kolmio toteuttaa Pythagoraan lauseen, joten se on suorakulmainen.

- b) Pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma, joten on laskettava kulma A .



Muodostetaan yhtälö tangentin avulla ja ratkaistaan kulma α .

$$\tan \alpha = \frac{9}{12}$$

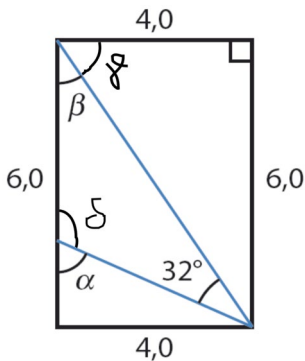
$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1} \frac{9}{12} \\ &= 36,86\dots^\circ \\ &\approx 36,9^\circ\end{aligned}$$

Vastaus

a) on suorakulmainen

b) $36,9^\circ$

5.9



Käytetään kuvan merkintöjä. Lasketaan ensin kulma γ .

$$\tan \gamma = \frac{6,0}{4,0}$$

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{6,0}{4,0}$$

$$= 56,309...^{\circ}$$

Nyt saadaan selville kulma β .

$$\beta = 90^{\circ} - \gamma = 90^{\circ} - 56,309...^{\circ} = 33,69...^{\circ} \approx 34^{\circ}$$

Kolmion kulmien summa on 180° , joten kulma δ saadaan selville kulman β avulla.

$$\delta = 180^{\circ} - 32^{\circ} - \beta = 148^{\circ} - \beta$$

Kulma α on kulman δ vieruskulma.

$$\alpha = 180^{\circ} - \delta$$

$$= 180^{\circ} - (148^{\circ} - \beta)$$

$$= 180^{\circ} - 148^{\circ} + \beta$$

$$= 32^{\circ} + \beta$$

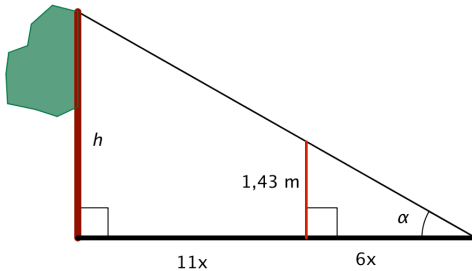
$$= 32^{\circ} + 33,69...^{\circ}$$

$$= 65,69...^{\circ} \approx 66^{\circ}$$

Vastaus

$$\alpha = 66^{\circ} \text{ ja } \beta = 34^{\circ}$$

5.10



Männyn varjon pituus on $11x + 6x = 17x$, jossa x on Juuson kengän pituus 28 cm eli 0,28 m.

a) Suorakulmaisten kolmioiden avulla saadaan yhtälöt

$$\tan \alpha = \frac{1,43}{6x} \text{ ja toisaalta } \tan \alpha = \frac{h}{17x}.$$

Merkitään oikeat puolet yhtä suuriksi ja ratkaistaan saatu yhtälö.

$$\frac{h}{17x} = \frac{1,43}{6x}$$

$$h = \frac{17 \cdot \cancel{x} \cdot 1,43}{6 \cdot \cancel{x}}$$

$$= \frac{17 \cdot 1,43}{6}$$

$$= 4,0516... \approx 4,1 \text{ (m)}$$

Huomaa: Juuson kengän
pituus x supistuu pois.

b) Muodostetaan pienemmän suorakulmaisen kolmion avulla yhtälö ja ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\tan \alpha = \frac{1,43 \cancel{\text{ m}}}{6 \cdot 0,28 \cancel{\text{ m}}}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1,43}{6 \cdot 0,28}$$

$$= 40,404...^\circ \approx 40^\circ$$

c) b-kohdan perusteella aurinko on 40° horisontin yläpuolella.

Vastaus

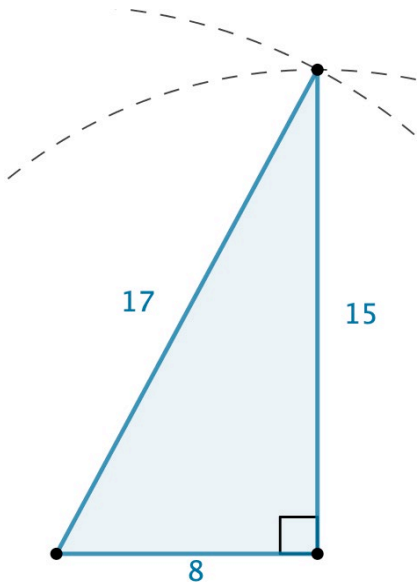
a) 4,1 m

b) 40°

c) 40°

5.11

Piirretään kolmio tehtävänannon ohjeiden mukaan.



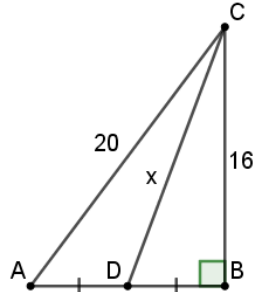
Kolmio on suorakulmainen.

Vastaus

Kolmio on suorakulmainen.

5.12

- a) Ratkaistaan sivun AB pituus Pythagoraan lauseella kolmiosta ABC .



$$16^2 + AB^2 = 20^2$$

$$AB^2 = 400 - 256$$

$$AB^2 = 144$$

$$AB = \sqrt{144} = 12 \text{ tai } AB = -\sqrt{144} = -12$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AB = 12$.

Sivun DB pituus on puolet sivun AB pituudesta.

$$DB = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Ratkaistaan sivun CD pituus x Pythagoraan lauseella kolmiosta DBC .

$$x^2 = 6^2 + 16^2$$

$$x^2 = 292$$

$$x = \sqrt{292} \text{ tai } x = -\sqrt{292}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = \sqrt{292} = \sqrt{4 \cdot 73} = 2\sqrt{73}$.

- b) Jos kolmion sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, kolmio on suorakulmainen. Pisin sivu on ehdokas hypotenuusaksi.

$$84^2 + 63^2 = 105^2 \quad a = 84, b = 63 \text{ ja } c = 105.$$

$$11025 = 11025$$

tosi

Kolmio on suorakulmainen.

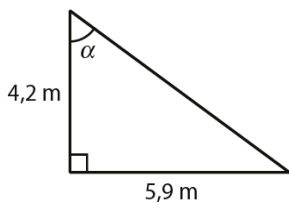
Vastaus

a) $x = 2\sqrt{73}$

b) on

5.13

a)

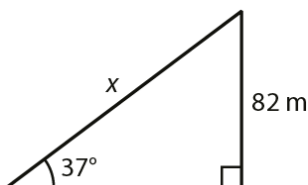


Ratkaistaan kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{5,9}{4,2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5,9}{4,2}\right) = 54,55\dots^\circ \approx 55^\circ$$

b)



Ratkaistaan hypotenuusan pituus x sinin avulla.

$$\sin 37^\circ = \frac{82}{x}$$

$$x = \frac{82}{\sin 37^\circ}$$

$$x = 136,25\dots \approx 140 \text{ (m)}$$

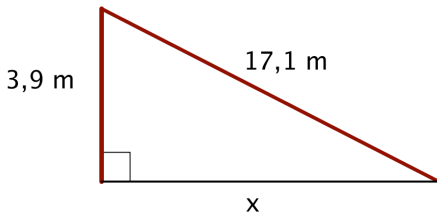
Vastaus

a) $\alpha \approx 55^\circ$

b) $x \approx 140 \text{ m}$

5.14

Männyn taittuneen latvaosan pituus on $21 - 3,9 = 17,1$ metriä.
Piirretään tilanteesta kuva.



Selvitetään vaakasuoran kateetin pituus x ja verrataan sitä oravan käypäjän 16 m pitkään etäisyyteen männyn tyvestä.

Pythagoraan lauseella saadaan

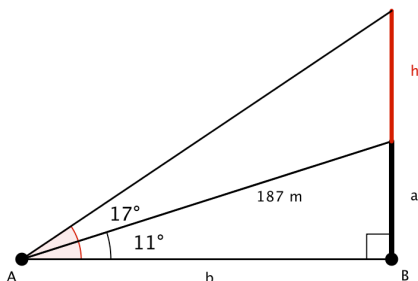
$$\begin{aligned}x^2 + 3,9^2 &= 17,1^2 \\x^2 &= 17,1^2 - 3,9^2 \\&= 277,2 \\x &= \sqrt{277,2} = 16,64... \approx 16,6 \\&\text{tai} \\x &= -\sqrt{277,2} = -16,64... \approx -16,6\end{aligned}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = 16,6$ m.

Koska $16,6 \text{ m} > 16 \text{ m}$, niin orava ei ole turvassa käypäjälläan.

Vastaus Ei ole turvassa.

5.15



Merkitään suon pinnasta mitattua mäen korkeutta kirjaimella a ja tornin korkeutta kirjaimella h .

a) Muodostetaan mäen korkeuden a laskemiseksi yhtälö sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 11^\circ &= \frac{a}{187} \\ a &= 187 \sin 11^\circ \\ &= 35,68... \\ &\approx 36 \text{ (m)}\end{aligned}$$

b) Tornin korkeuden h laskemiseksi selvitetään ensin kosinin avulla tarkastelupisteen A vaakasuora etäisyys b tornin jatkeella olevasta pisteestä B .

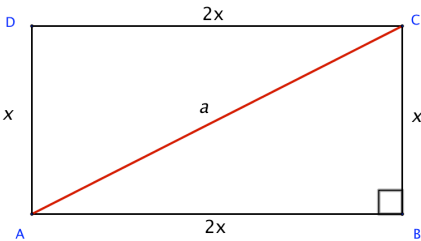
Lasketaan sen jälkeen tangentin avulla tornin ja mäen yhteinen korkeus $a + h$, josta selvitetään kysytty h .

$$\begin{aligned}\cos 11^\circ &= \frac{b}{187} \\ b &= 187 \cos 11^\circ \\ \tan 17^\circ &= \frac{a + h}{b} \\ b \tan 17^\circ &= a + h \\ h &= b \tan 17^\circ - a \\ &= 187 \cos 11^\circ \cdot \tan 17^\circ - 187 \sin 11^\circ \\ &= 20,43... \\ &\approx 20 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Vastaus

a) 36 m **b)** 20 m

5.16



Lasketaan oikotien eli suorakulmion lävistäjän AC pituus a sekä peltoa kiertävän reitin ABC pituus.

Verrataan saatuja matkoja toisiinsa.

Pythagoraan lauseella saadaan

$$a^2 = (2x)^2 + x^2$$

$$= 4x^2 + x^2$$

$$= 5x^2$$

$$a = \sqrt{5x^2} \quad \text{tai} \quad a = -\sqrt{5x^2}$$

Pituus on positiivinen luku, joten

$$a = \sqrt{5x^2}$$

$$= \sqrt{5} |x| \quad |x > 0$$

$$= \sqrt{5}x.$$

Peltoa kiertävän reitin ABC pituus on $2x + x = 3x$.

Verrataan oikoreitin pituutta peltoa kiertävän reitin pituuteen:

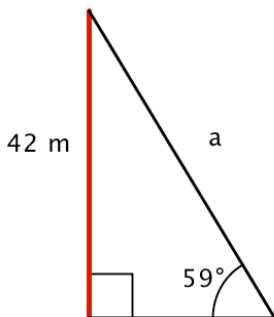
$$\frac{\sqrt{5}x}{3x} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,74535\dots = 74,535\dots\%$$

Oikotie on $100\% - 74,535\dots\% = 25,464\dots\% \approx 25,5\%$ lyhyempi.

Vastaus

25,5 %

5.17



Merkitään yhden vaijerin pituutta kirjaimella a .

Muodostetaan yhtälö sinin avulla.

$$\sin 59^\circ = \frac{42}{a}$$

$$a \sin 59^\circ = 42$$

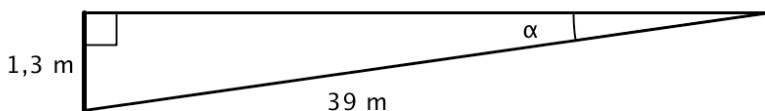
$$a = \frac{42}{\sin 59^\circ}$$

Vaijeria tarvitaan $3a = 3 \cdot \frac{42}{\sin 59^\circ} = 146,99... \approx 150$ (m).

Vastaus

150 metriä

5.18



Merkitään kysytyn kulman suuruutta kirjaimella α .

Muodostetaan yhtälö sinin avulla ja ratkaistaan α .

$$\sin \alpha = \frac{1,3}{39}$$

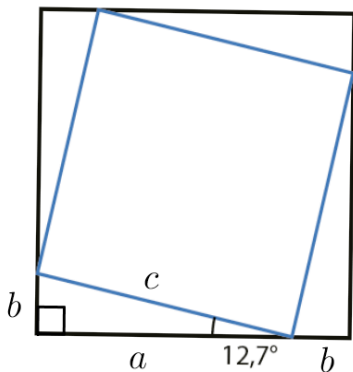
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1,3}{39}\right) = 1,91\dots^\circ \approx 1,9^\circ$$

Vastaus

1,9°

5.19

Merkitään kolmion sivuja kirjaimilla a , b ja c .



Selvitetään yhteys pienemmän neliön sivun pituuden c ja suuremman neliön sivun pituuden $a+b$ välillä.

$$\tan 12,7^\circ = \frac{b}{a}$$

$$b = a \cdot \tan 12,7^\circ$$

Suuremman neliön sivun pituus on

$$a+b = a + a \cdot \tan 12,7^\circ = a \cdot (1 + \tan 12,7^\circ).$$

$$\cos 12,7^\circ = \frac{a}{c}$$

$$c = \frac{a}{\cos 12,7^\circ}$$

Pienemmän neliön sivun pituus on $c = \frac{a}{\cos 12,7^\circ}$.

Lasketaan pienemmän neliön sivun pituuden suhde suuremman neliön sivun pituuteen.

$$\begin{aligned}\frac{c}{a+b} &= \frac{\frac{a}{\cos 12,7^\circ}}{a \cdot (1 + \tan 12,7^\circ)} \\ &= \frac{\cancel{a}}{\cos 12,7^\circ} \cdot \frac{1}{\cancel{a} \cdot (1 + \tan 12,7^\circ)} \\ &= \frac{1}{\cos 12,7^\circ \cdot (1 + \tan 12,7^\circ)} \\ &= 0,83655... \\ &\approx 0,84 \\ &= 84 \%\end{aligned}$$

Pienemmän neliön sivun pituus on 84 % suuremman neliön sivun pituudesta.

Neliön ovat yhdenmuotoiset, joten niiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_{\text{pieni}}}{A_{\text{suuri}}} = (0,83655...)^2 = 0,69982... \approx 0,70 = 70 \%$$

Pienemmän neliön pinta-ala on 84 % suuremman neliön pinta-alasta.

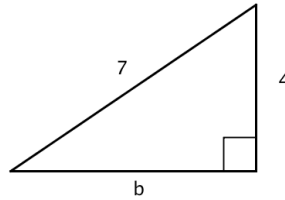
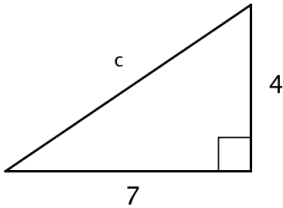
Vastaus

sivu 84 %, pinta-ala 70 %

Huomaa:

Tehtävän ratkaisussa ei välttämättä tarvita tietoa suuremman neliön sivun pituudesta.

5.20



Kun suorakulmaisesta kolmiosta tunnetaan kaksi sivua, niin kolmannen sivun pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla.

Annettu pidempi sivun pituus 7 voi olla joko kateetin tai hypotenuusan pituus. Käsitellään nämä tapaukset erikseen.

- 1) Selvitetään hypotenuusan pituus c , kun kateettien pituudet ovat 4 ja 7.

$$\begin{aligned}c^2 &= 7^2 + 4^2 \\&= 49 + 16 \\&= 65 \\c &= \pm\sqrt{65}\end{aligned}$$

Pituus on positiivinen, joten hypotenuusan pituus on $\sqrt{65}$.

- 2) Selvitetään kateetin pituus b , kun toisen kateetin pituus on 4 ja hypotenuusan pituus 7.

$$\begin{aligned}7^2 &= b^2 + 4^2 \\b^2 &= 7^2 - 4^2 \\&= 49 - 16 \\&= 33 \\b &= \pm\sqrt{33}\end{aligned}$$

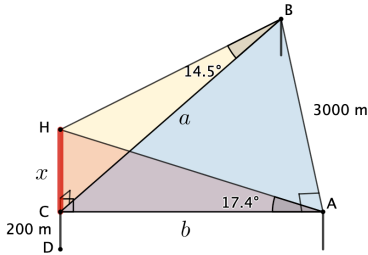
Pituus on positiivinen, joten kateetin pituus on $\sqrt{33}$.

Kolmion kolmannen sivun pituus on $\sqrt{33}$ tai $\sqrt{65}$.

Vastaus

$$\sqrt{33} \text{ tai } \sqrt{65}$$

5.21



Tavoitteena on laskea ensin vuoren huipun etäisyys x havaintopisteiden kautta kulkevasta vaakasuorasta tasosta (kolmio ABC). Tämän jälkeen saadaan kysytty vuoren korkeus merenpinnasta D lisäämällä laskettuun arvoon 200 metriä.

Muodostetaan yhtälöt kuvan kolmen suorakulmaisen kolmion avulla.

1) Kolmio ACH : $\tan 17,4^\circ = \frac{x}{b}$

2) Kolmio BCH : $\tan 14,5^\circ = \frac{x}{a}$

3) Kolmio CAB : $a^2 = b^2 + 3000^2$

Huomataan, että saatiin kolme yhtälöä, joissa on yhteensä kolme tuntematonta muuttujaa. Tarkoituksena on ratkaista muuttuja x .

Ratkaistaan ensin a ja b yhtälöistä 1 ja 2. Sijoitetaan ne sen jälkeen yhtälöön 3 ja ratkaistaan x .

1) $\tan 17,4^\circ = \frac{x}{b}$ eli $b = \frac{x}{\tan 17,4^\circ}$

2) $\tan 14,5^\circ = \frac{x}{a}$ eli $a = \frac{x}{\tan 14,5^\circ}$

3) $a^2 = b^2 + 3000^2$

$$\left(\frac{x}{\tan 14,5^\circ} \right)^2 = \left(\frac{x}{\tan 17,4^\circ} \right)^2 + 3000^2$$

Ratkaistaan
CAS-laskimella.

$$x = -1373,7... \text{ tai } x = 1373,7...$$

Etäisyys x on positiivinen luku, joten $x = 1373,7... \text{ m}$.

Vuoren korkeus merenpinnasta on

$$x + 200 \text{ m} = 1373,7... \text{ m} + 200 \text{ m} = 1573,7... \text{ m} \approx 1570 \text{ m}.$$

Vastaus

1570 m

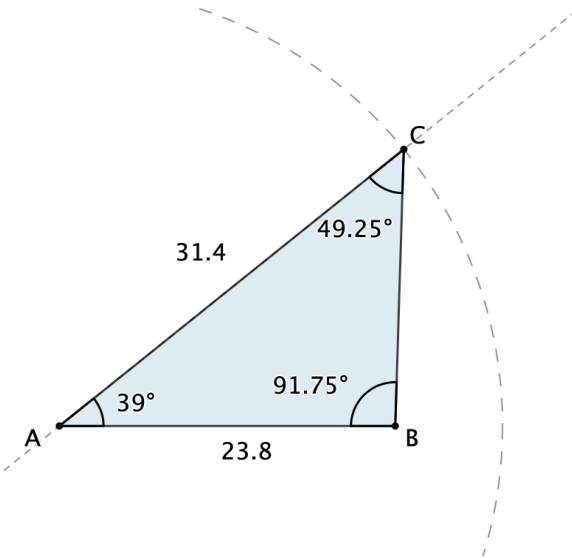
5.22

Piirretään jana AB , jonka pituus on $23,8$ (cm).

Piirretään janan AB päätepisteeseen A suora, joka muodostaa 39° :n suuruinen kulman janan AB kanssa ja ympyrä, jonka säde on $31,4$ (cm).

Piirretään suoran ja ympyrän leikkauspisteeseen kolmion kolmas kärki C ja piirretään kolmio ABC .

Mitataan kolmion kulmien suuruudet.

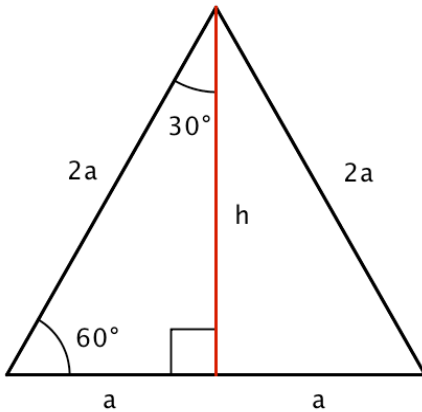


Koska kolmion kulmista mikään ei ole suora, kolmio ei ole suorakulmainen.

Vastaus

Kolmio ei ole suorakulmainen.

5.23



Merkitään tasasivuisen kolmion kannan puolikkaan pituutta kirjaimella a , jolloin kaikkien kolmion sivujen pituus on $2a$.

Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat suuruudeltaan 60° .

Kun tasasivuinen kolmio jaetaan korkeusjanan avulla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi, niissä molemmissa on 60° :n ja 30° :n kulmat.

Tasasivuisen kolmion korkeus h voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla suorakulmaisesta kolmiosta.

$$(2a)^2 = a^2 + h^2$$

$$h^2 = 4a^2 - a^2$$

$$= 3a^2$$

$$h = -\sqrt{3a^2} \quad \text{tai} \quad h = \sqrt{3a^2}$$

Kolmion korkeus on positiivinen luku, joten

$$\begin{aligned}h &= \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a| \quad |a > 0 \\&= \sqrt{3}a\end{aligned}$$

Määritetään kysytyt sinin, kosinin ja tangentin arvot suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\begin{aligned}\text{a) } \sin 30^\circ &= \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{h}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30^\circ &= \frac{a}{h} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \sin 60^\circ &= \frac{h}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ &= \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \\ \tan 60^\circ &= \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Vastaus

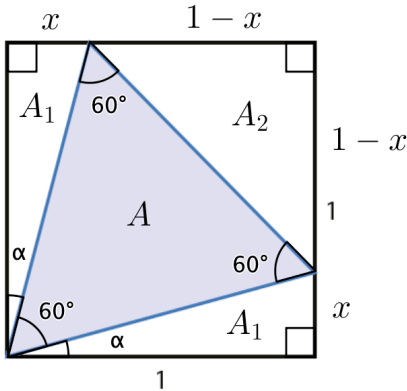
$$\begin{array}{ll}\text{a) } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} & \text{b) } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} & \tan 60^\circ = \sqrt{3}\end{array}$$

5.24

Tapa 1 Vähennetään neliön alasta suorakulmaisten kolmioiden alat.

Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat suuruudeltaan 60° .

Käytetään kuvan merkintöjä.



Symmetrian ansiosta kärkeen, jossa neliön ja tasasivuisen kolmion kärjet kohtaavat, syntyy kaksi yhtä suurta kulmaa α .

$$\alpha + \alpha + 60^\circ = 90$$

$$2\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = 15^\circ$$

Ratkaistaan suorakulmaisen kolmion kateetin pituus x .

$$\tan \alpha = \frac{x}{1}$$

$$x = \tan \alpha = \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

Lasketaan tasasivuisen kolmion pinta-ala vähentämällä neliön pinta-alasta suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat.

$$A = 1^2 - 2A_1 - A_2$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} (1-x)^2$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2} (1-x)^2 \quad \left| x = 2 - \sqrt{3} \right.$$

$$= 1 - (2 - \sqrt{3}) - \frac{1}{2} (1 - (2 - \sqrt{3}))^2 \quad \text{Sievennetään CAS-laskimella.}$$

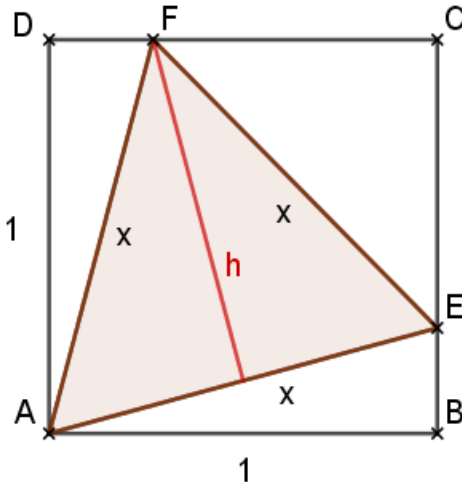
$$= 2\sqrt{3} - 3$$

Vastaus

$$2\sqrt{3} - 3$$

Tapa 2 Lasketaan tutkittavan kolmion kanta ja korkeus.

Piirretään kuva.



Kolmiot ABE ja AFD ovat yhtenevät.

Ratkaistaan sivujen DF ja EB pituudet Pythagoraan lauseella.

$$1^2 + DF^2 = x^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$DF^2 = x^2 - 1$$

$$DF = \pm \sqrt{x^2 - 1} = EB \quad \text{Yhtenevät kolmiot}$$

Lasketaan sivujen FC ja EC pituus.

$$FC = EC = 1 - EB$$

Kolmioista ABE ja AFD voidaan Pythagoraan lauseella todeta kateettien neliöiden summien olevan yhtä suuret.

$$1^2 + EB^2 = (1 - EB)^2 + (1 - EB)^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$EB = 2 - \sqrt{3} \approx 0,27 \quad \text{tai} \quad EB = \sqrt{3} + 2 \approx 3,7$$

Jälkimmäinen arvo ei käy, sillä neliön sivun pituus on 1, eikä jana EB voi olla neliön sivua pitempi.

Ratkaistaan sivun x pituus.

$$1^2 + (2 - \sqrt{3})^2 = x^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \quad \text{Pituus on positiivinen.}$$

$$x = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$$

Ratkaistaan tasasivuisen kolmion korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{2} \right)^2 = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$h = -\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} \quad \text{tai} \quad h = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}} \quad \text{Pituus on positiivinen.}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{6 - 3\sqrt{3}} \quad \text{Sievennetään laskimella.}$$

$$= 2\sqrt{3} - 3$$

Vastaus

$$2\sqrt{3} - 3$$