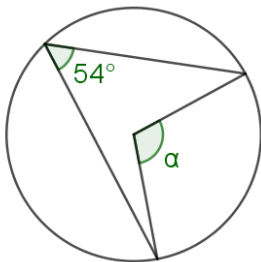


11.1

a)

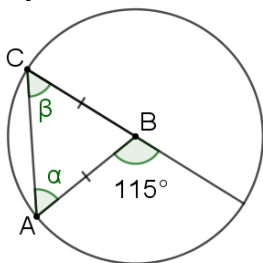


Kulma α on keskuskulma ja samaa kaarta vastaavan kehäkulma on 54° .

$$\alpha = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

b) Täydennetään kuvaa.



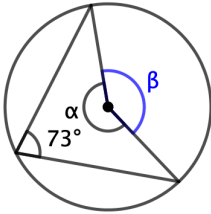
Kulma β on kehäkulma. Samaa kaarta vastaava keskuskulma on 115° .

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot 115^\circ = 57,5^\circ$$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

Kolmio ABC on tasakylkinen kolmio. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, joten $\alpha = \beta = 57,5^\circ$.

c) Täydennetään kuvaa.



Kulma β on keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on 73° .

$$\beta = 2 \cdot 73^\circ = 146^\circ$$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

Kulmat α ja β muodostavat täysikulman.

$$\alpha = 360^\circ - 146^\circ = 214^\circ.$$

Vastaus

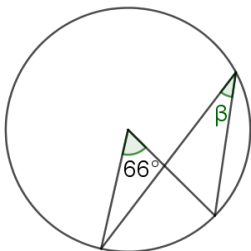
a) 108°

b) $57,5^\circ$

c) 214°

11.2

a)

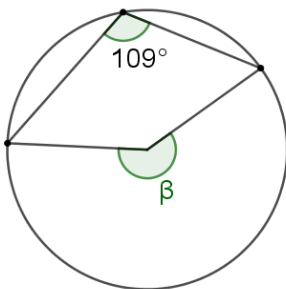


Kulma β on kehäkulma. Samaa kaarta vastaava keskuskulma on 66° .

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot 66^\circ = 33^\circ$$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

b)



Kulma β on keskuskulma.

$$\beta = 2 \cdot 109^\circ = 218^\circ$$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

Vastaus

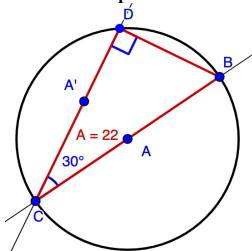
a) 33°

b) 218°

11.3

- a) Piirretään ympyrä, jonka säde on 5 (cm). Merkitään ympyrän kehälle piste B . Piirretään suora, jonka kulkee ympyrän keskipisteen ja kehäpisteen kautta. Merkitään suoran ja ympyrän toinen leikkauspiste C .
Piirretään suoran ja ympyrän leikkauspisteeseen kulma, jonka koko on 30° .
Piirretään suora leikkauspisteen ja kulman piirtämisessä syntyneen pisteen kautta. Merkitään suoran ja ympyrän leikkauspiste D .
Piirretään kolmio pisteiden B , C ja D kautta. Mitataan kolmion pinta-ala.

Kolmion pinta-ala on 22 (cm²).



- b) Ympyrän halkaisija on kolmion sivu CB . Sivun CB pituus on $2 \cdot 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$.

Ratkaistaan kolmion sivun CD pituus.

$$\cos 30^\circ = \frac{CD}{10} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$CD = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} ac \sin \beta, \text{ missä } a = 10,$$

$$b = 5\sqrt{3} \text{ ja } \beta = 30^\circ.$$

$$= 21,650\dots$$

$$= 22 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Kolmion pinta-ala on 22 cm².

Vastaus

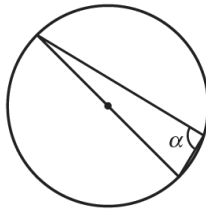
- a) 22 cm² b) 22 cm²

11.4

a)

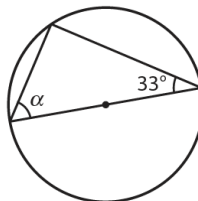
Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

$$\alpha = 90^\circ$$



b)

Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.



Kolmion kulmien summa on 180° .

$$\alpha = 180^\circ - 33^\circ - 90^\circ = 57^\circ$$

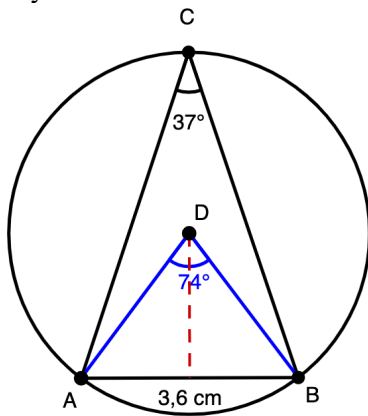
Vastaus

a) 90°

b) 57°

11.5

Täydennetään kuvaa.



Kulma $\angle ADB$ on keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on 37° .

$$\angle ADB = 2 \cdot 37^\circ = 74^\circ$$

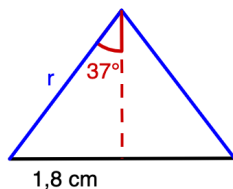
Tasakylkisen kolmion huippukulmasta kannalle piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

Ratkaistaan ympyrän säde r .

$$\sin 37^\circ = \frac{1,8}{r}$$

Ratkaistaan CAS-laskimell

$$r = 2,9909... \approx 3,0 \text{ (cm)}$$

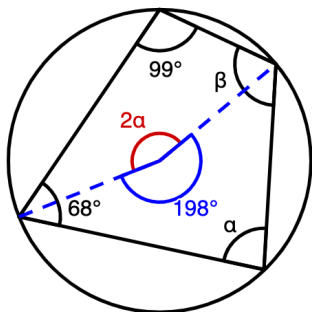


Vastaus

3,0 cm

11.6

Täydennetään kuvaa.



Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

Kehäkulmaa α vastaava keskuskulma on 2α .

Kehäkulmaa 99° vastaava keskuskulma on $2 \cdot 99^\circ = 198^\circ$.

Kulmat 2α ja 198° muodostavat täysikulman.

$$2\alpha + 198^\circ = 360^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 81^\circ$$

Nelikulmion kulmien summa on 360° .

$$\beta + 99^\circ + 68^\circ + 81^\circ = 360^\circ$$

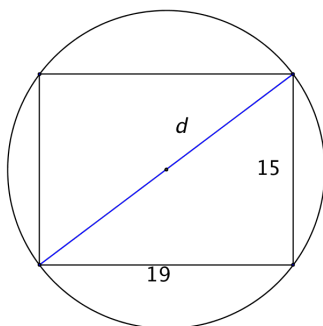
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\beta = 112^\circ$$

Vastaus

$$\alpha = 81^\circ, \beta = 112^\circ$$

11.7



Puukiekon halkaisija on suorakulmion lävistäjä. Ratkaistaan halkaisijan pituus Pythagoraan lauseella.

$$19^2 + 15^2 = d^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$d = -24,207... \text{ tai } d = 24,207...$$

Halkaisijan pituus on positiivinen luku, joten $d = 24,207 \text{ cm}$.

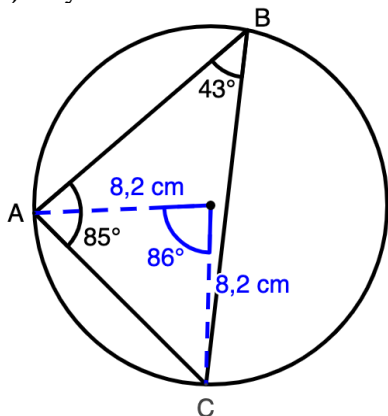
Puukiekon säde oli $\frac{24,207... \text{ cm}}{2} = 12,103... \text{ cm} \approx 12,1 \text{ cm}$.

Vastaus

12,1 cm

11.8

a) Täydennetään kuvaa.



Ratkaistaan sivun AC pituus kosinilauseella.

$$AC^2 = 8,2^2 + 8,2^2 - 2 \cdot 8,2 \cdot 8,2 \cdot \cos 86^\circ \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AC = -11,184... \text{ tai } AC = 11,184...$$

Pituus on positiivinen, joten $AC = 11,184... \text{ cm} \approx 11,2 \text{ cm}$.

Sivun AB vastainen kulma on $180^\circ - 85^\circ - 43^\circ = 52^\circ$. Ratkaistaan sivun AB pituus sinilauseella.

$$\frac{AB}{\sin 52^\circ} = \frac{11,184...}{\sin 43^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AB = 12,923... \approx 12,9 \text{ (cm)}$$

Ratkaistaan sivun BC pituus sinilauseella.

$$\frac{BC}{\sin(85^\circ)} = \frac{11,183...}{\sin(43^\circ)} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$BC = 16,337... \approx 16,3 \text{ (cm)}$$

b) Ratkaistaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12,923... \cdot 16,337... \cdot \sin 43^\circ$$

$$A = 71,94... \approx 72 \text{ (cm}^2\text{)}$$

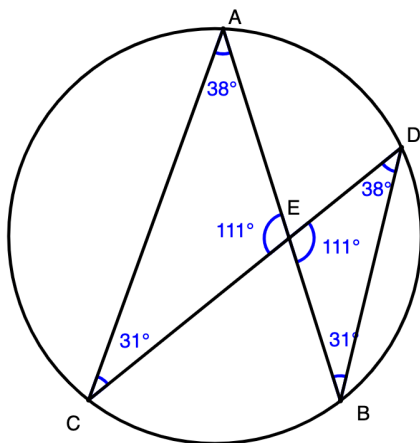
Vastaus

a) $AC = 11,2 \text{ cm}$, $AB = 16,3 \text{ cm}$ ja $BC = 12,9 \text{ cm}$

b) 72 cm^2

11.9

a) Piirretään kuva.



Mitataan syntyvien kolmioiden ACE ja DEB kulmat. Kolmioiden kulmat ovat yhtä suuret, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

b) Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret. Kärjissä A ja D olevat kehäkulmat sekä kärjissä B ja C olevat kehäkulmat vastaavat samaa kaarta.

Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

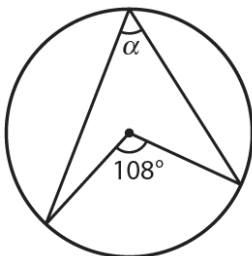
Vastaus

a) Ovat.

b) Kolmioissa on pareittain kaksi samaa kaarta vastaavaa kehäkulmaa, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

11.10

a)

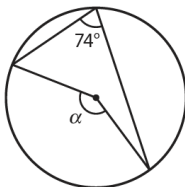


Kulma α on kehäkulma, ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on 108° .

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 108^\circ = 54^\circ$$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

b)



Kulma α on keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on 74° .

$$\alpha = 2 \cdot 74^\circ = 148^\circ$$

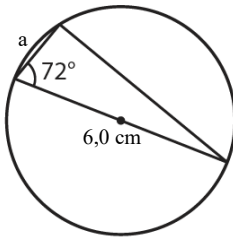
Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

Vastaus

a) $\alpha = 54^\circ$

b) $\alpha = 148^\circ$

11.11



Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

Ympyrän halkaisija on $2 \cdot 3,0 \text{ cm} = 6,0 \text{ cm}$.

Ratkaistaan sivun a pituus.

$$\cos 72^\circ = \frac{a}{6,0} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a = 1,85... \text{ (cm)}$$

Ratkaistaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1,85... \cdot 6,0 \cdot \sin 72^\circ \quad A = \frac{1}{2} ac \sin \beta, \text{ missä } a = 1,85..., \\ b = 6,0 \text{ ja } \beta = 72^\circ.$$

$$= 5,27...$$

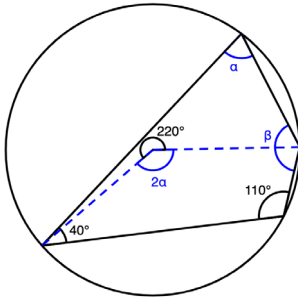
$$\approx 5,3 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus

$$5,3 \text{ cm}^2$$

11.12

Piirretään kuva.



Kulma 110° on kehäkulma, ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on $2 \cdot 110^\circ = 220^\circ$.

Kulma α on kehäkulma, ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on 2α .

Keskuskulmien 220° ja 2α summa on 360° .

Ratkaistaan kulma α .

$$220^\circ + 2\alpha = 360^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 70^\circ$$

Nelikulmion kulmien summa on 360° . Ratkaistaan neljäs kulma β .

$$\beta + 110^\circ + 40^\circ + 70^\circ = 360^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

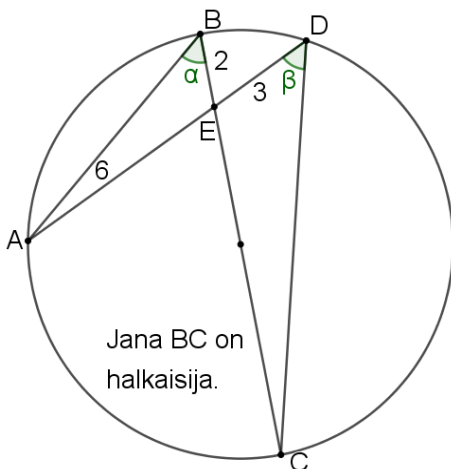
$$\beta = 140^\circ$$

Vastaus

70° ja 140°

11.13

Piirretään kuva.



Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat α ja β ovat yhtä suuret.

Myös ristikulmat BEA ja CED ovat yhtä suuret.

Kolmiot BEA ja CED ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Muodostetaan verrantoyhtälö.

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{EC}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$EC = 9$$

Ratkaistaan halkaisijan pituus.

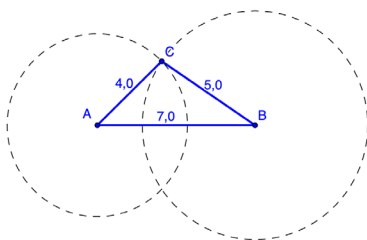
$$EC + BE = 9 + 2 = 11$$

Vastaus

11.14

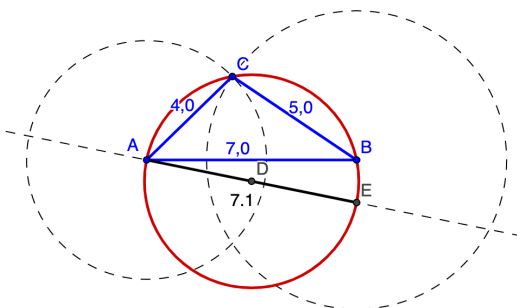
- a) Piirretään jana AB , jonka pituus on $7,0$ (cm). Piirretään janan päätepisteisiin ympyrät, joiden säteet ovat $4,0$ (cm) ja $5,0$ (cm). Merkitään ympyröiden leikkauspiste C .

Piirretään kolmio ABC .



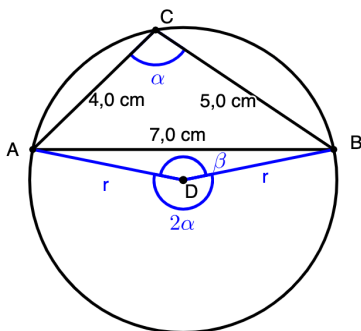
Piirretään ympyrä, joka kulkee kolmion ABC kärkien kautta. Merkitään ympyrän keskipiste D .

Piirretään suora, joka kulkee ympyrän kehällä olevan pisteen A ja ympyrän keskipisteen D kautta. Merkitään ympyrän ja suoran leikkauspiste E . Piirretään jana AE , joka on ympyrän halkaisija.



Mitataan ympyrän halkaisijan pituus. Halkaisijan pituus on $7,1$ (cm).

b) Piirretään mallikuva



Ratkaistaan kulma α kosinilauseella.

$$7,0^2 = 4,0^2 + 5,0^2 - 2 \cdot 4,0 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Rajataan kulma välille $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

$$\alpha = 101,53\dots^\circ$$

Kulma α on kehäkulma ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on

$$2\alpha = 2 \cdot 101,53\dots^\circ = 203,07\dots^\circ.$$

Kulma β saadaan täyden kulman avulla.

$$\beta = 360^\circ - 203,07\dots^\circ = 156,92\dots^\circ$$

Ratkaistaan säde r kosinilauseella.

$$7,0^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(156,92\dots^\circ)$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = -3,57\dots \text{ tai } r = 3,57\dots$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r = 3,57\dots$ cm.

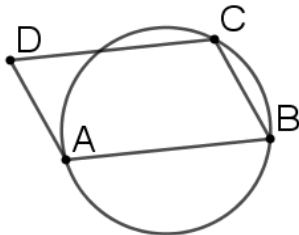
Ympyrän halkaisija on $2r = 2 \cdot 3,57\dots \text{ cm} = 7,14\dots \text{ cm} \approx 7,1 \text{ cm}$.

Vastaus

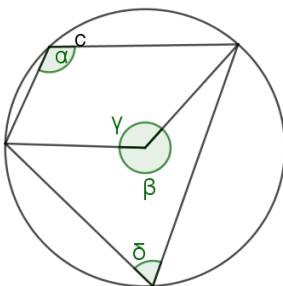
a) 7,1 cm b) 7,1 cm

11.15

- a) Tutkimuksen perusteella näyttää, että jokaisen suorakulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.
 b) Ei voida. Esimerkiksi kuvan suunnikkaan $ABCD$ ympärille ei voida piirtää ympyrää.



- c) Piirretään kuva.



Kulmat α ja β ovat samaa kaarta vastaavat kehäkulma ja keskuskulma. Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.
 $\beta = 2\alpha$

Kulmat β ja γ muodostavat täysikulman.

$$\gamma = 360^\circ - \beta = 360^\circ - 2\alpha$$

Kulmat δ ja γ ovat samaa kaarta vastaavat kehäkulma ja keskuskulma. Kehäkulma on puolet keskuskulmasta.

$$\delta = \frac{\gamma}{2} = \frac{360^\circ - \beta}{2} = \frac{360^\circ - 2\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$$

Ratkaistaan vastakkaisten kulmien α ja δ summa.

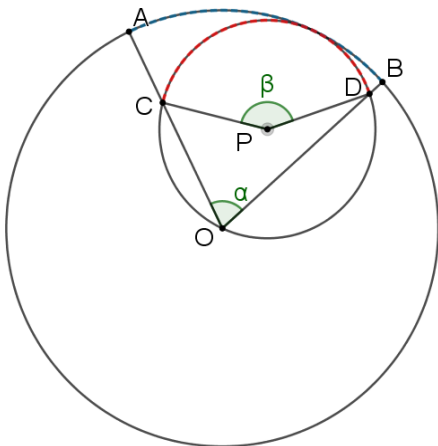
$$\alpha + \delta = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$$

Vastaus

- a) voidaan b) ei voida
 c) Kulmat ovat supplementtikulmat eli niiden summa on 180° .

11.16

Täydennetään kuvaa.



Olkoon P -keskisen ympyrän säde r . Tällöin O -keskisen ympyrän säde on $2r$.

Kulma β on P -keskisen ympyrän keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on α . Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

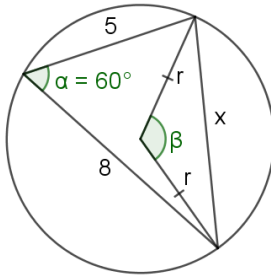
Tällöin kaaren CD pituus on $\frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{4\alpha\pi r}{360^\circ}$.

Kaaren AB pituus on $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2r = \frac{4\alpha\pi r}{360^\circ}$.

Siis kaaret AB ja CD ovat yhtä pitkät. $\square$

11.17

Täydennetään kuvaa.



Ratkaistaan sivun x pituus kosinilauseella.

$$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -7 \text{ tai } x = 7$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = 7$.

Kulma β on keskuskulma. Samaa kaarta vastaavan kehäkulman suuruus on 60° . Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin samaa kaarta vastaava kehäkulma.

$$\beta = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

Ratkaistaan ympyrä säde r kosinilauseella.

$$7^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 120^\circ \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = -\frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ tai } r = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Vastaus

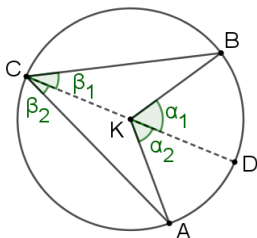
$$\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

11.18

Tutkitaan tapaukset yksi kerrallaan.

Tapaus 1

Täydennetään kuvaa.



Kehäkulman β_1 toinen kylki on ympyrän halkaisija CD . Kehäkulma, jonka toinen kylki on ympyrän halkaisija, on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \alpha_1$$

Kehäkulman β_2 toinen kylki on myös ympyrän halkaisija CD .

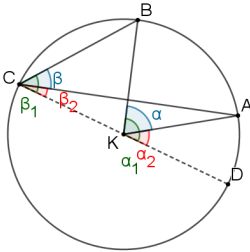
$$\beta_2 = \frac{1}{2} \alpha_2$$

$$\text{Kulma } \beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{2} \alpha .$$

Siis kehäkulma β on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta α

Tapaus 2

Täydennetään kuvaa.



Kehäkulman β_2 toinen kylki on ympyrän halkaisija CD ja sitä vastaava keskuskulma on α_2 . Kehäkulma, jonka toinen kylki on ympyrän halkaisija, on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \alpha_2$$

Kehäkulman $\beta_2 + \beta$ toinen kylki on myös ympyrän halkaisija CD , ja sitä vastaava keskuskulma on $\alpha_2 + \alpha$.

$$\beta_2 + \beta = \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha)$$

Ratkaistaan kulma β .

$$\beta_2 + \beta = \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha)$$

$$\text{Sijoitetaan } \beta_2 = \frac{1}{2} \alpha_2.$$

$$\frac{1}{2} \alpha_2 + \beta = \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha \quad \left| -\frac{1}{2} \alpha_2 \right.$$

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \alpha_2$$

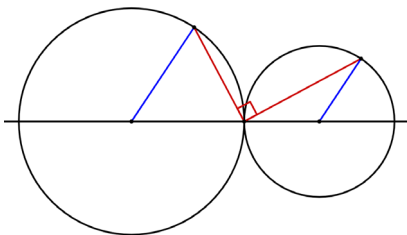
$$\beta = \frac{1}{2} \alpha$$

Siis kehäkulma β on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta α

Tapausten 1 ja 2 perusteella kehäkulma β on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta α myös tapauksissa, joissa kehäkulman kylki ei ole ympyrän halkaisija. $\square$

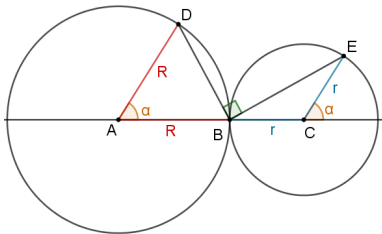
11.19

a) Piirretään kuva ohjeiden mukaisesti.



Mitataan janojen välinen kulma. Kulma on 90° .

b) Täydennetään kuvaa.



Yhdensuuntaisten säteiden R ja r sekä suoran väliset terävät kulmat ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret. Merkitään kulmia kirjaimella α .

Pienempään ympyrään syntyvä kulma CBE on keskuskulmaa α vastaava kehäkulma.

$$\sphericalangle CBE = \frac{\alpha}{2}$$

Suurempaan ympyrään syntyvä kulma DBA on tasakylkisen kolmion kantakulma.

$$\sphericalangle DBA = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

Ratkaistaan janojen välinen kulma. Vähennetään oikokulmasta 180° kulmat CBE ja DBA .

$$180^\circ - \sphericalangle CBE - \sphericalangle DBA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ$$

Janojen välinen kulma on 90° . On osoitettu, että janat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. $\square$