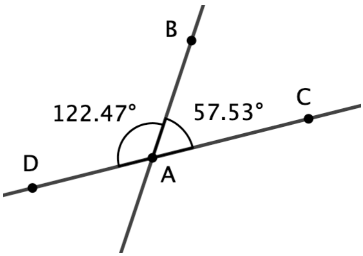
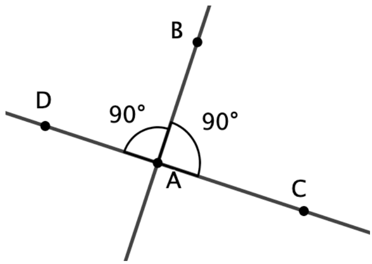
1.1

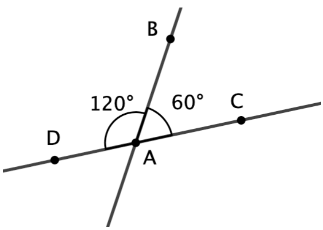
a) Piirretään kaksi erisuuntaista suoraa AB ja AC.
Mitataan kulman CAB suuruus.
Piirretään suoralle AC piste D ja mitataan kulman BAD suuruus.





Kun kulma ja sen vieruskulma ovat yhtä suuret, niiden suuruus on $90°$.

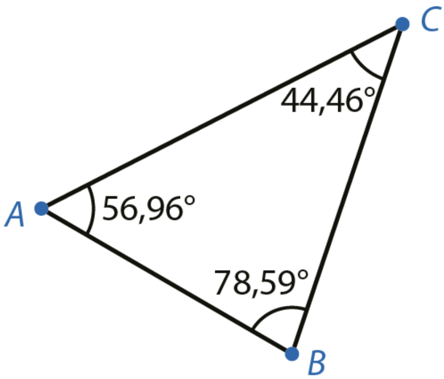
b) Kun kulman suuruus on puolet vieruskulman suuruudesta, sen suuruus on $60°$.



Vastaus
a) $90°$
b) $60°$

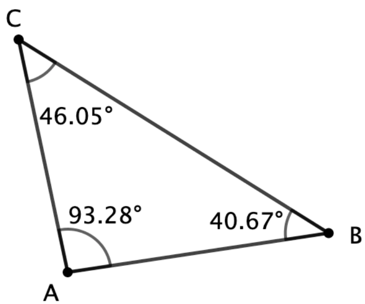
1.2

a) Piirretään pisteet A, B ja C.
Yhdistetään pisteet toisiinsa janoilla tai piirretään monikulmio ABC.
Mitataan kulmien suuruudet.



Lasketaan kulmat yhteen.
$56{,}96° + 78{,}59° + 44{,}46° = 180°$
Kulmien summa näyttäisi olevan $180°$.
Huomaa, että yksittäisen kulmien suuruudet riippuvat siitä millaisen kolmion olet piirtänyt.

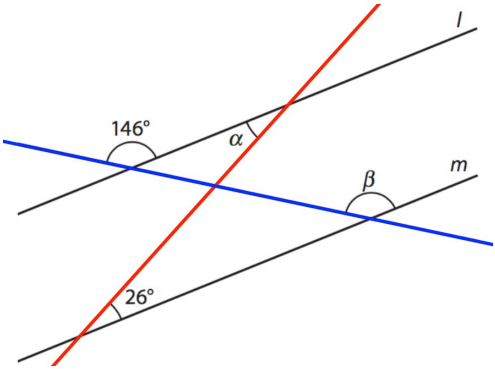
b) Siirretään pisteitä ja lasketaan kulmat yhteen.
$93{,}28° + 40{,}67° + 46{,}05° = 180°$
Kulmien summa vaikuttaisi olevan aina $180°$.



Vastaus
a) Kulmien summa on 180°.
b) Kulmien summa vaikuttaisi olevan aina 180°.

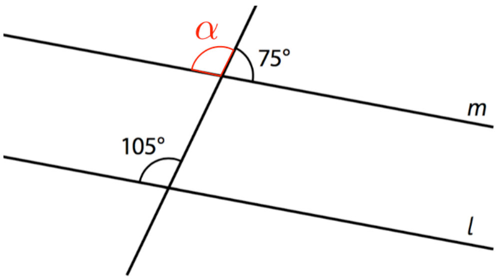
1.3

a)



Punainen leikkaava suora on kulman α ja kulman $26°$ vasen kylki, joten ne ovat samankohtaiset kulmat. Täten $\alpha = 26°$.
Sininen leikkaava suora on kulman β ja kulman $146°$ vasen kylki, joten ne ovat samankohtaiset kulmat. Täten $\beta = 146°$

b) Kuvaan merkitty kulma α ja kulma $105°$ ovat samankohtaiset kulmat. Tutkitaan, ovatko ne myös yhtä suuret.



Kulma α on kulman $75°$ vieruskulma, joten $\alpha = 180° - 75° = 105°$. Koska samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset.

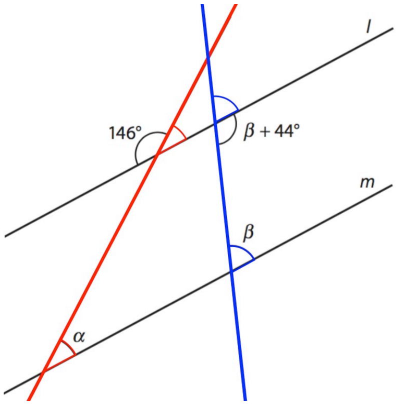
Vastaus

a) $\alpha = 26°$ ja $\beta = 146°$

b) ovat

1.4

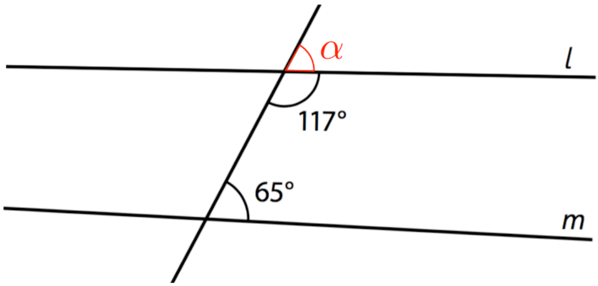
a)



Punainen leikkaava suora on kulman α vasen kylki ja kulman $146°$ oikea kylki, joten kulman α kanssa samankohtainen kulma on kulman $146°$ vieruskulma.
Täten $\alpha = 180° - 146° = 34°$.
Sininen leikkaava suora on kulman β vasen kylki ja kulman $\beta + 44°$ oikea kylki, joten kulman β kanssa samankohtainen kulma on kulman $\beta + 44°$ vieruskulma.
Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 180° - (\beta + 44°)$$
$$\beta = 180 - \beta - 44° \quad \big| + \beta$$
$$2\beta = 136° \quad \big| : 2$$
$$\beta = 68°$$

b) Kuvaan merkitty kulma α ja kulma $65°$ ovat samankohtaisia kulmia. Tutkitaan, ovatko ne myös yhtä suuret.



Kulma α on kulman $117°$ vieruskulma, joten
$\alpha = 180° - 117° = 63°$.

Koska samankohtaiset kulmat $65°$ ja $63°$ eivät ole yhtä suuret, suorat l ja m eivät ole yhdensuuntaiset.

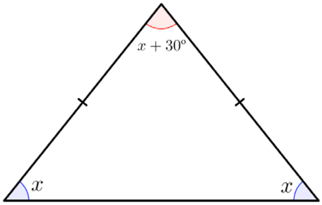
Vastaus

a) $\alpha = 34°$ ja $\beta = 68°$

b) eivät ole

1.5

a) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Merkitään kantakulman suuruutta kirjaimella x. Tällöin huippukulman suuruus on $x + 30°$.



Kolmion kulmien summa on $180°$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kantakulmien suuruus x.

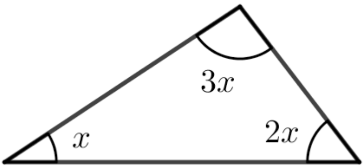
$$x + x + (x + 30°) = 180°$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 50°$$

Lasketaan huippukulman suuruus.

$$\begin{aligned} x + 30° &= 50° + 30° \\ &= 80° \end{aligned}$$

b) Merkitään kulmat suuruusjärjestyksessä x, $2x$ ja $3x$.



Kolmion kulmien summa on $180°$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulman suuruus x.

$$x + 2x + 3x = 180°$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 30°$$

Lasketaan kolmion muut kulmat.

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \cdot 30° \\ &= 60° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &= 3 \cdot 30° \\ &= 90° \end{aligned}$$

Vastaus

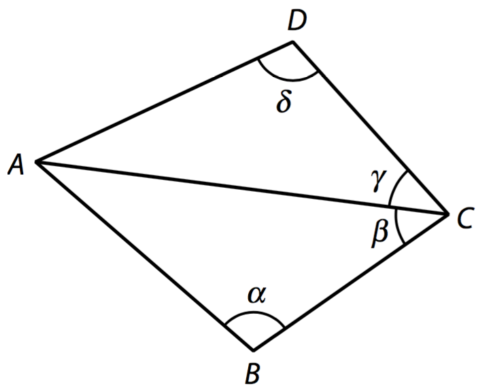
a) $50°$, $50°$ ja $80°$ **b)** $30°$, $60°$ ja $90°$

1.6

Kulma α on terävä, jos $0° < \alpha < 90°$.
Kulma α on tylppä, jos $90° < \alpha < 180°$.
Kulma α on kovera, jos $0° < \alpha < 180°$.
Kulma α on kupera, jos $180° < \alpha < 360°$.

Terävä kulma	Tylppä kulma	Kovera kulma	Kupera kulma
25°	95°	25°	183°
65°	155°	65°	210°
85°	177°	85°	350°
		90°	
		95°	
		155°	
		177°	

1.7



a) Kärjessä B on kulma α, joten $\sphericalangle CBA = \alpha$.

b) Kärjessä D on kulma δ, joten $\sphericalangle ADC = \delta$.

c) Kärjessä C on kaksi kulmaa. Näistä kulmista β on se kulma, jonka kyljillä on pisteet A ja B. Siis $\sphericalangle ACB = \beta$.

d) Kärjessä C olevista kulmista γ on se kulma, jonka kyljillä on pisteet A ja D. Siis $\sphericalangle DCA = \gamma$.

Vastaus

a) $\sphericalangle CBA = \alpha$

b) $\sphericalangle ADC = \delta$

c) $\sphericalangle ACB = \beta$

d) $\sphericalangle DCA = \gamma$

1.8

a) Arkistokatu ja Maaherrankatu ovat yhdensuuntaiset.

Väite siis pitää paikkansa.

b) Pirttiniemenkatu ja Tenholankatu eivät ole yhdensuuntaisia.

Väite ei siis pidä paikkaansa.

c) Olkkolankatu ja Tenholankatu eivät ole yhdensuuntaisia.

Väite siis pitää paikkansa.

d) Olkkolankatu ja Arkistokatu ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Väite siis pitää paikkansa.

e) Olkkolankatu ja Kansankatu ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Väite siis pitää paikkansa.

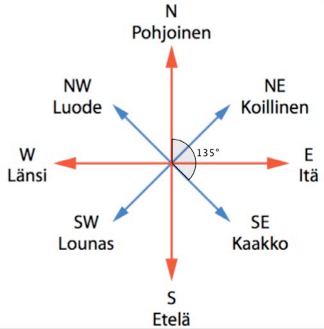
f) Tehnolankatu ja Maaherrankatu eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Väite ei siis pidä paikkaansa.

Vastaus
a) tosi
b) epätosi
c) tosi
d) tosi
e) tosi
f) epätosi

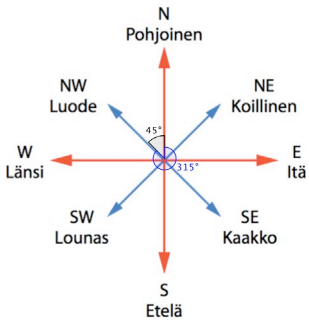
1.9

a) Kierretään $135°$ pohjoisesta myötäpäivään.

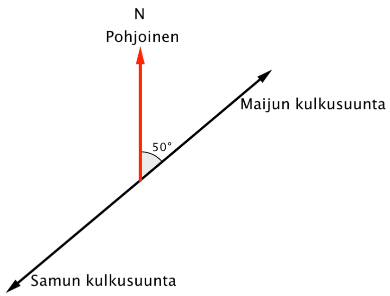


Eemeli kulkee kaakkoon.

b) Luoteen ja pohjoisen välinen kulma on $45°$. Kompassisuunta luoteeseen on siis $360° - 45° = 315°$.



c) Maijun kulkee kompassisuuntaan $50°$.
Samu kävelee vastakkaiseen suuntaan.



Samun kävelee siis kompassisuuntaan $50° + 180° = 230°$.

Vastaus

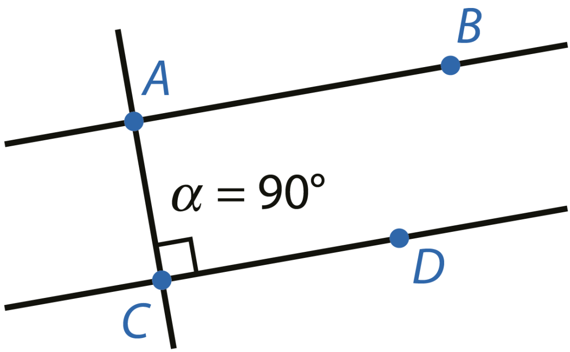
a) kaakkoon **b)** 315° **c)** 230°

1.10

Piirretään suora AB ja sille normaali pisteen A kautta.

Merkitään normaalille piste C ja piirretään pisteen C kautta suoran AB kanssa yhdensuuntainen suora.

Mitataan pisteen C kautta kulkevien suorien välisen kulman suuruus. Koska suorien välinen kulma on $90°$, suorat ovat toistensa normaaleja.

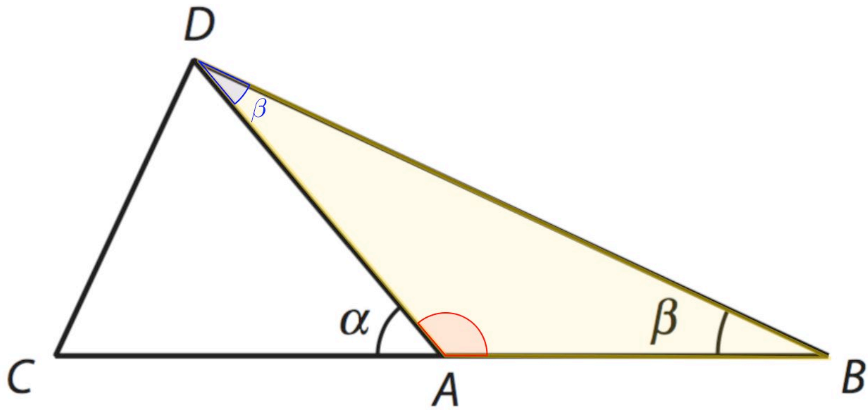


Suorat ovat toistensa normaaleja, vaikka pisteitä siirtäisikin.

Vastaus
Suorat ovat toistensa normaaleja.

1.11

a) Koska $AD = AB$, niin kolmio ABD on tasakylkinen. Siten kantakulmat ADB ja DBA ovat yhtä suuret: $\sphericalangle ADB = \beta$.



Lasketaan huippukulman BAD suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

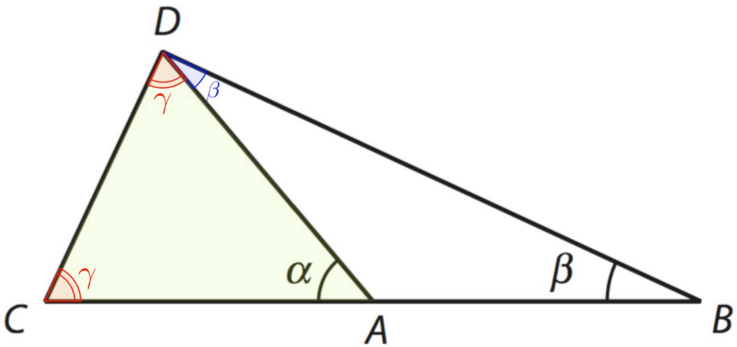
$$\sphericalangle BAD = 180° - \beta - \beta = 180° - 2\beta.$$

Kulma α on kulman BAD vieruskulma, joten sen suuruus on

$$\begin{aligned}\alpha &= 180° - (180° - 2\beta) \\ &= 180° - 180° + 2\beta \\ &= 2\beta\end{aligned}.$$

On siis osoitettu, että $\alpha = 2\beta$. $\square$

b) Koska $AC = AD$, niin kolmio CAD on tasakylkinen. Siten kantakulmat ACD ja CDA ovat yhtä suuret. Merkitään kulmia kirjaimella γ.



Lasketaan kulman γ suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{180° - \alpha}{2} && \big| \alpha = 2\beta \\
&= \frac{180° - 2\beta}{2} \\
&= 90° - \beta
\end{aligned}
$$

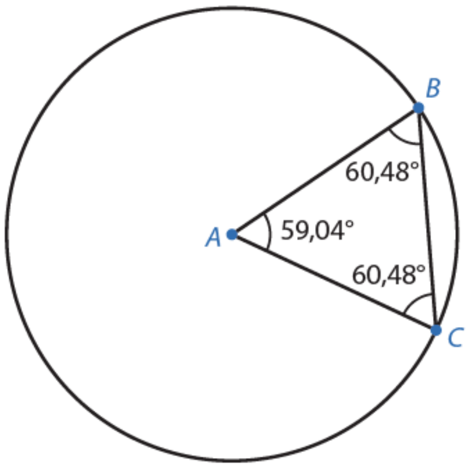
Lasketaan kulman CDB suuruus.

$$
\begin{aligned}
\sphericalangle CDB &= \beta + \gamma && \big| \gamma = 90° - \beta \\
&= \beta + 90° - \beta \\
&= 90°
\end{aligned}
$$

On siis osoitettu, että kulma CDB on suora. $\square$

1.12

a) Piirretään kuva.



Kulmat B ja C ovat yhtä suuret.

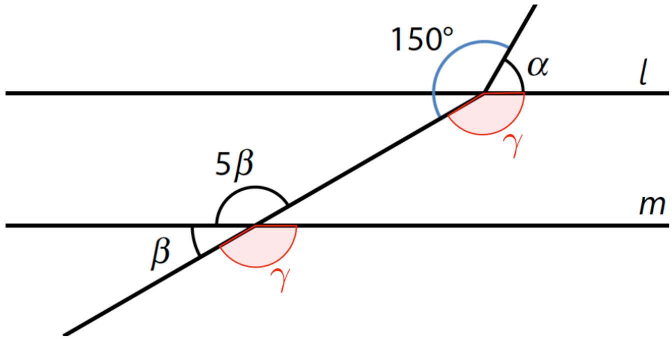
b) Siirretään pisteitä. Havainto pätee edelleen.

c) Kolmio ABC on tasakylkinen (sivut AB ja AC ovat ympyrän säteen mittaisia), joten kantakulmat B ja C ovat yhtä suuret.

Vastaus
a) Kulmat B ja C ovat yhtä suuret.
b) Havainto pätee edelleen.

1.13

a) Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, kuvaan merkityt samankohtaiset kulmat γ ovat yhtä suuret.



Kulmat β ja 5β ovat vieruskulmat. Ratkaistaan kulma β.

$$\begin{aligned} \beta + 5\beta &= 180^\circ \\ 6\beta &= 180^\circ \quad \Big| : 6 \\ \beta &= 30^\circ \end{aligned}$$

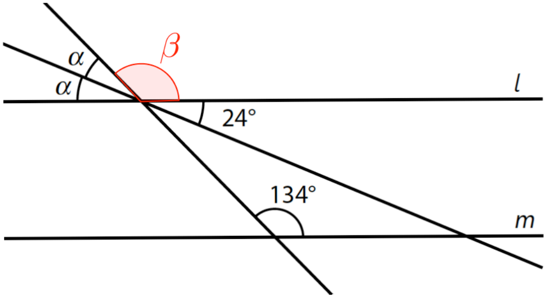
Kulmat γ ja 5β ovat ristikulmina yhtä suuret.

$$\gamma = 5\beta = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$$

Kulmat α, γ ja 150° muodostavat täyden kulman. Lasketaan kulman α suuruus.

$$\begin{aligned} \alpha &= 360^\circ - 150^\circ - \gamma \\ &= 360^\circ - 150^\circ - 150^\circ \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

b) Tutkitaan, ovatko samankohtaiset kulmat β ja $134°$ yhtä suuret.



Kulmat α ja $24°$ ovat ristikulmina yhtä suuret eli $\alpha = 24°$.

Muodostetaan oikokulman avulla yhtälö ja ratkaistaan kulma β.

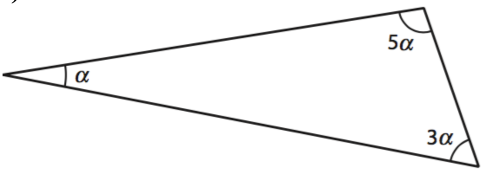
$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + \beta &= 180° \\ 24° + 24° + \beta &= 180° \\ 48° + \beta &= 180° \qquad \big| -48° \\ \beta &= 132° \end{aligned}$$

Koska $\beta = 132° \neq 134°$, niin suorat l ja m eivät olet yhdensuuntaiset.

Vastaus
a) $\alpha = 60°$ ja $\beta = 30°$
b) eivät ole

1.14

a)

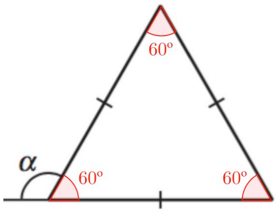


Kolmion kulmien summa on 180°. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\alpha + 5\alpha + 3\alpha = 180^\circ \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella}$$

$$\alpha = 20^\circ$$

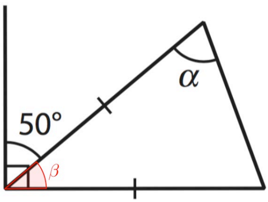
b) Kolmio on tasasivuinen, joten sen jokainen kulma on 60°. Kulma α on kolmion kulman vieruskulma.



Lasketaan kulman α suuruus.

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

c) Merkitään tasakylkisen kolmion huippukulmaa kirjaimella β.



Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Kolmion kulmien summa on 180°. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulman α suuruus.

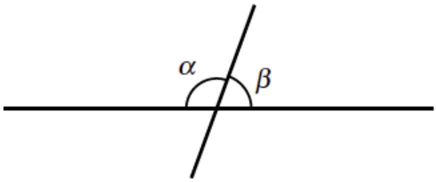
$$\alpha + \alpha + 40^\circ = 180^\circ \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella}$$

$$\alpha = 70^\circ$$

Vastaus

a) 20° **b)** 120° **c)** 70°

1.15



Koska kulmien suhde on $\alpha : \beta = 11 : 7$, voidaan merkitä
$\alpha = 11x$ ja $\beta = 7x$.

Vieruskulmien summa on $180°$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulmien suuruudet.

$$11x + 7x = 180°$$ Ratkaistaan CAS-laskimella
$$x = 10°$$

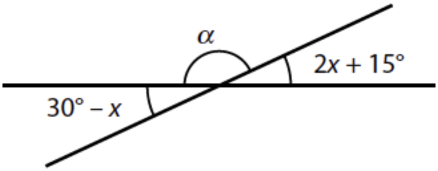
Lasketaan kulmien suuruudet.

$$\alpha = 11 \cdot 10° = 110°$$

$$\beta = 7 \cdot 10° = 70°$$

Vastaus
$\alpha = 110°$ ja $\beta = 70°$

1.16



Ristikulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$
\begin{aligned}
30^\circ - x &= 2x + 15^\circ && \left| -2x \right.\\
30^\circ - 3x &= 15^\circ && \left| -30^\circ \right.\\
-3x &= -30^\circ && \left| : (-3) \right.\\
x &= 5^\circ
\end{aligned}
$$

Kulma α on kulman $30^\circ - x$ vieruskulma. Lasketaan kulman α suuruus.

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 180^\circ - (30^\circ - x)\\
&= 180^\circ - (30^\circ - 5^\circ)\\
&= 155^\circ
\end{aligned}
$$

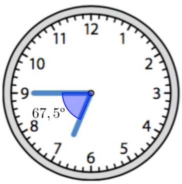
Vastaus
155º

1.17

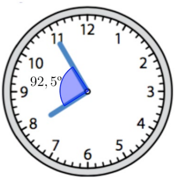
a) Täysi kierros on $360°$, joten tuntiviisari kiertää yhdessä tunnissa $\frac{360°}{12} = 30°$. Viisareiden välinen kulma on siis $30° + 30° = 60°$.

b) Puolessa tunnissa tuntiviisarin kiertymä on $15°$.
Viisareiden välinen kulma on siis $30° + 30° + 15° = 75°$.

c) 15 minuuttia eli neljäsosatuntia vastaava tuntiviisarin kiertymä on $\frac{30°}{4} = 7{,}5°$.
Viisareiden välinen kulma on siis $30° + 30° + 7{,}5° = 67{,}5°$.

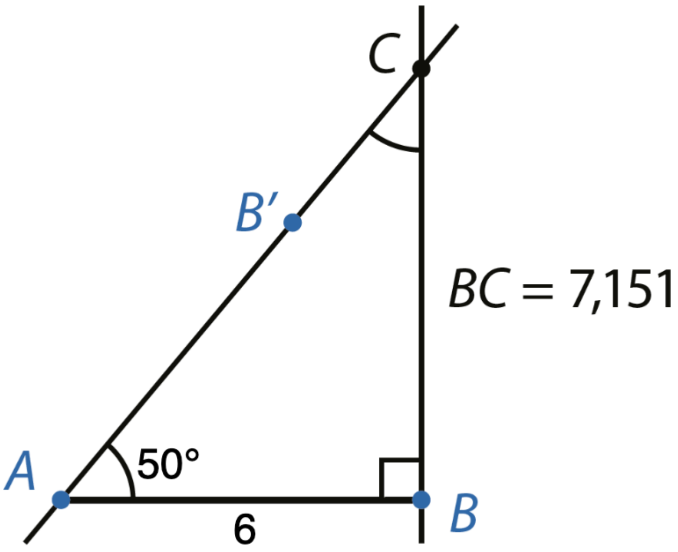


d) 5 minuuttia vastaava tuntiviisarin kiertymä on $\frac{30°}{12} = 2{,}5°$. Viisareiden välinen kulma on siis $30° + 30° + 30° + 2{,}5° = 92{,}5°$.



Vastaus
a) $60°$ **b)** $75°$ **c)** $67{,}5°$ **d)** $92{,}5°$

1.18



Piirretään jana, jonka pituus on 6. Piirretään janan toiseen päätepisteeseen normaali ja toiseen päätepisteeseen kulma, jonka suuruus on $50°$. Merkitään kulman kyljen ja normaalin leikkauspiste.

Viljasiilon korkeus saadaan janan BC pituus.

Viljasiilon korkeus yhden desimaalin tarkkuudella on $7{,}2$ m.

Vastaus
7,2 m

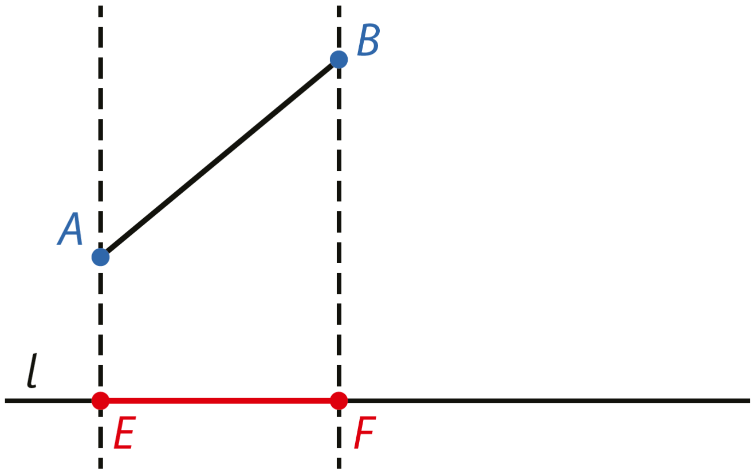
1.19

a) Piirretään jana AB. Piirretään suora l.

Piirretään suoralle l kaksi normaalia, toinen pisteen A kautta ja toinen pisteen B kautta. Merkitään normaalien ja suoran l leikkauspisteet.

Leikkauspiste E on pisteen A kohtisuora projektio ja leikkauspiste F pisteen B.

b) Janan AB kohtisuora projektio on jana EF. Piirretään jana EF.



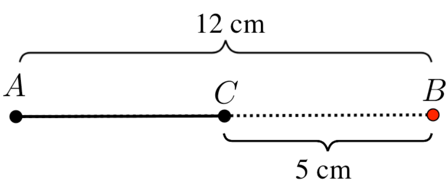
1.20

a) Piirretään mallikuva.

Lasketaan janan AC pituus.

$$\begin{aligned} AC &= AB + BC \\ &= 12 + 5 \\ &= 17 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

b) Piirretään mallikuva.



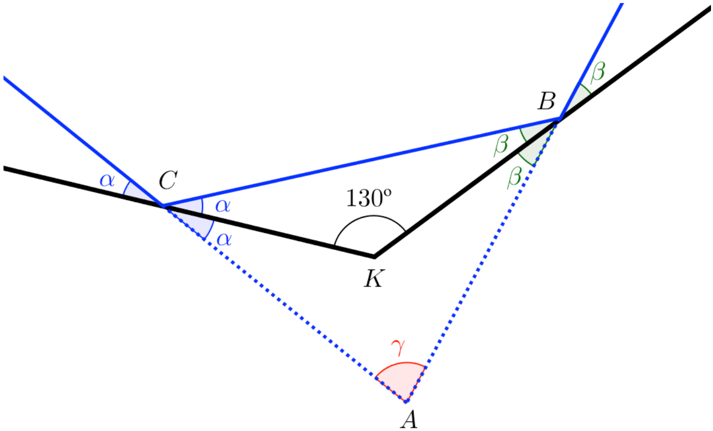
Lasketaan janan AC pituus.

$$\begin{aligned} AC &= AB - CB' \\ &= 12 - 5 \\ &= 7 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Vastaus
a) AC = 17 cm
b) AC = 7 cm

1.21

Valonsäde heijastuu peilistä samassa kulmassa kuin missä se tulee peiliin. Piirretään mallikuva ja käytetään kuvan merkintöjä. Tulevan ja lähtevän säteen välinen kulma on γ.



Kolmion KBC kulmien summasta saadaan yhteys kulmien α ja β välille.

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+130^\circ &= 180^\circ && \big| -130^\circ \\ \alpha+\beta &= 50^\circ && \big| -\beta \\ \beta &= 50^\circ-\alpha \end{aligned}$$

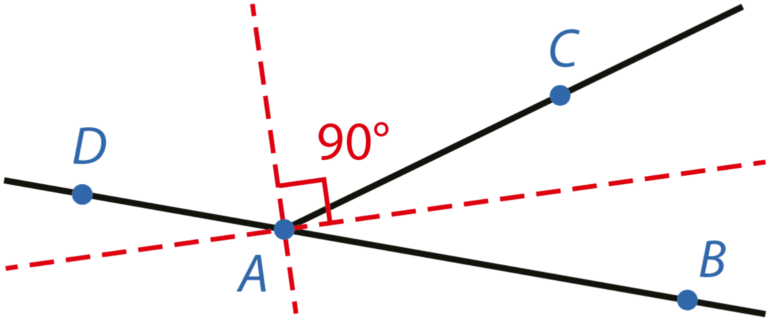
Muodostetaan yhtälö kolmion ABC kulmien summan perusteella ja ratkaistaan säteiden välinen kulma γ

$$\begin{aligned} 2\beta+2\alpha+\gamma &= 180^\circ && \big| -2\beta-2\alpha \\ \gamma &= 180^\circ-2\beta-2\alpha && \big| \beta = 50^\circ-\alpha \\ &= 180^\circ-2(50^\circ-\alpha)-2\alpha \\ &= 180^\circ-100^\circ+2\alpha-2\alpha \\ &= 80^\circ \end{aligned}$$

Vastaus
80°

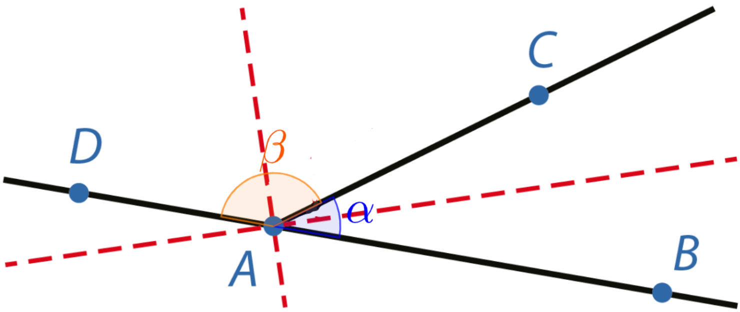
1.22

a) Piirretään kuva tehtävänannon ohjeiden mukaan ja mitataan kulmanpuolittajien välinen kulma.



Kulmanpuolittajien välinen kulma näyttäisi olevan aina suora eli $90°$.

b) Merkitään puolisuoran ja suoran AB muodostamia vieruskulmia kirjaimilla α ja β.



Vieruskulmien summa on $180°$: $\alpha+\beta=180°$.

Lasketaan kulmanpuolittajien välinen kulma $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$.

$$\alpha+\beta=180° \qquad |:2$$

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90°$$

On siis osoitettu, että kulmanpuolittajien välinen kulma on $90°$. $\square$

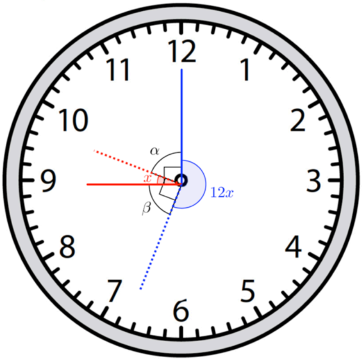
Vastaus

a) Kulmanpuolittajien välinen kulma näyttäisi olevan suora eli $90°$.

1.23

a) Appletin mukaan osoittimet ovat seuraavan kerran kohtisuorassa klo 9.33.

b) Osoittimet ovat kohtisuorassa seuraavan kerran ennen kello 10.00. Merkitään tuntiviisarin kiertymää kirjaimella x. Samassa ajassa minuuttiviisarin kiertymä on $12x$.



Kulma $\alpha = 90° - x$ ja kulma $\beta = 90° - x$.

Kulmat α, β, x ja $12x$ muodostavat täyden kulman $360°$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulma x.

$$\alpha + \beta + x + 12x = 360° \qquad \left| \begin{array}{l} \alpha = 90° - x \\ \beta = 90° - x \end{array} \right.$$

$$90° - x + 90° - x + x + 12x = 360° \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = \frac{180°}{11}$$

Tuntiviisari kiertyy yhdessä tunnissa kulman $\dfrac{360°}{12} = 30°$.

Lasketaan kiertymää $x = \dfrac{180°}{11}$ vastaava aika (yksi tunti on 3600 s).

$$\frac{\frac{180°}{11}}{30°} \cdot 3600\,\text{s} = 1963{,}6363...\text{s} \approx 1964\,\text{s} = 32 \text{ min } 44 \text{ s}$$

Osoittimet ovat seuraavan kerran kohtisuorassa kello 09.32.44.

Vastaus

a) 09.33

b) 09.32.44