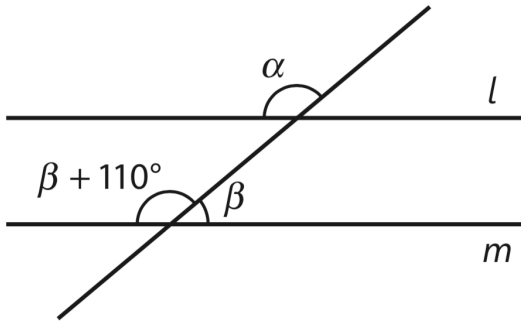


K1



Kulmat β ja $\beta + 110^\circ$ ovat vieruskulmia. Muodostetaan yhtälö.

$$\begin{array}{rcl} \beta + \beta + 110^\circ = 180^\circ & | -110^\circ & \\ 2\beta = 70^\circ & | :2 & \\ \beta = 35^\circ & & \end{array}$$

Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat α ja $\beta + 110^\circ$ ovat yhtä suuret.

$$\alpha = \beta + 110^\circ = 35^\circ + 110^\circ = 145^\circ$$

Vastaus

$$\alpha = 145^\circ \text{ ja } \beta = 35^\circ$$

K2

Kolmion kulmat ovat 52° , $180^\circ - \alpha$ ja $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

Kolmion kulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö.

$$52^\circ + 180^\circ - \alpha + 72^\circ = 180^\circ$$

$$304^\circ - \alpha = 180^\circ \quad | -304^\circ$$

$$-\alpha = -124^\circ$$

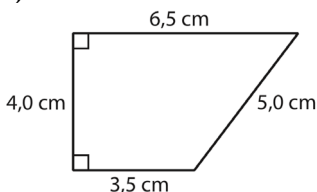
$$\alpha = 124^\circ$$

Vastaus

$$\alpha = 124^\circ$$

K3

a)

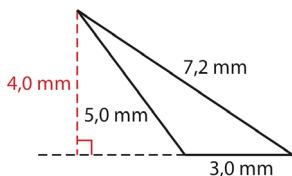


Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2}(3,5 + 6,5) \cdot 4,0 \qquad A = \frac{1}{2}(a + b)h$$
$$= 20 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Pinta-ala on 20 cm².

b)

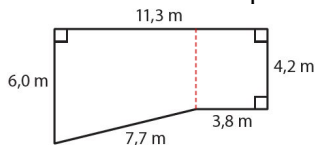


Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot 4,0 \qquad A = \frac{1}{2}ah$$
$$= 6,0 \text{ (mm}^2\text{)}$$

Pinta-ala on 6,0 mm²

c) Jaetaan monikulmio puolisuunnikkaaksi ja suorakulmioksi.



Puolisuunnikkaan korkeus on $11,3 \text{ m} - 3,8 \text{ m} = 7,5 \text{ m}$.

Lasketaan kuvion pinta-ala.

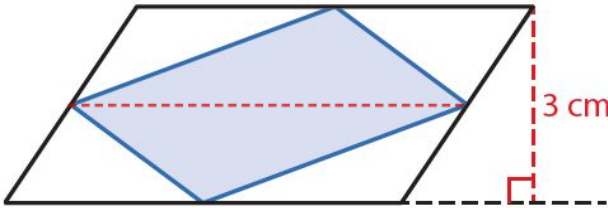
$$A = 3,8 \cdot 4,2 + \frac{1}{2}(6,0 + 4,2) \cdot 7,5$$
$$= 54,21$$
$$\approx 54 \text{ (m}^2\text{)}$$

Pinta-ala on 54 m².

Vastaus

a) 20 cm² b) 6,0 mm² c) 54 m²

K4



Kun sisempi suunnikas jaetaan kuvan mukaisesta kahteen osaan lävistäjällä muodostuu kaksi kolmiota. Koska sisempi suunnikas saatiin yhdistämällä ulomman suunnikkaan sivujen keskipisteet, on muodostuneiden kolmioiden molempien korkeus $\frac{3}{2} = 1,5$ cm.

Lasketaan uuden suunnikkaan pinta-ala kahden kolmion pinta-alojen summana.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1,5 = 9 \text{ (cm}^2\text{)}$$

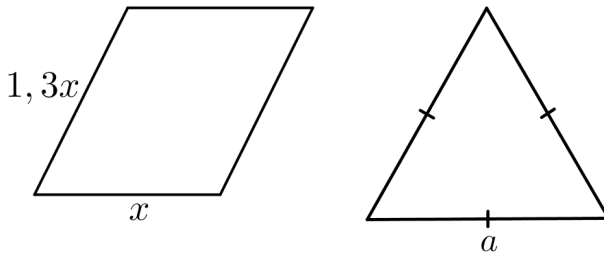
Vastaus

9 cm²

K5

Merkitään suunnikkaan lyhyempää sivua kirjaimella x . Tällöin pidempi sivu on tällöin $1,3x$.

Merkitään kolmion sivun pituutta kirjaimella a .



Kolmion piiri on yhtä suuri kuin suunnikkaan piiri. Muodostetaan yhtälö.

$$3a = 2x + 2 \cdot 1,3x$$

$$3a = 4,6x \quad | :3$$

$$a = 1,533... x \approx 1,53x$$

Kolmion sivu on siis $1,53 - 1 = 0,53 = 53 \%$ pidempi kuin suunnikkaan lyhyempi sivu.

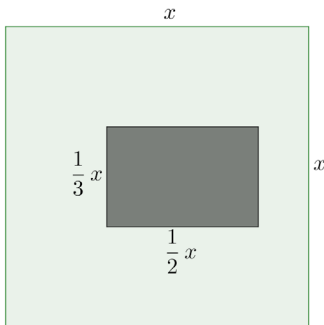
Vastaus

53 %

K6

Merkitään neliön muotoisen tontin sivun pituutta kirjaimella x .

Talon pitempi sivu on tällöin $\frac{1}{2}x$ ja lyhyempi sivu $\frac{1}{3}x$.



Piha-alueen pinta-ala saadaan vähentämällä tontin pinta-alasta talon pinta-ala. Muodostetaan piha-alueen pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan tontin pinta-ala x^2 .

$$x \cdot x - \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3}x = 400$$

$$\frac{5}{6}x^2 = 400 \quad \left| \cdot \frac{6}{5} \right.$$

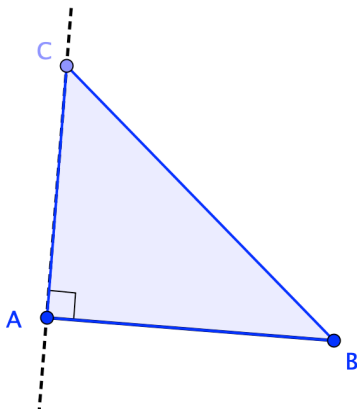
$$x^2 = 480 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus

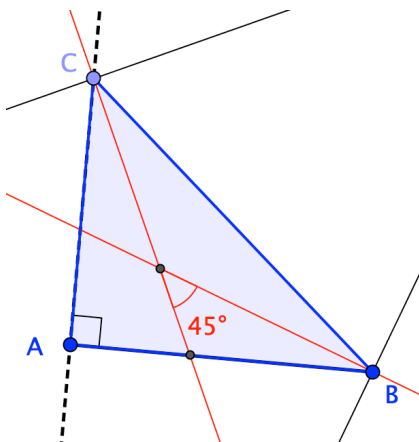
480 m^2

K7

- a) Piirretään jana AB ja pisteeseen A sen normaali. Valitaan normaalilta piste C . Yhdistetään pisteet A , B ja C , jolloin saadaan suorakulmainen kolmio ABC .

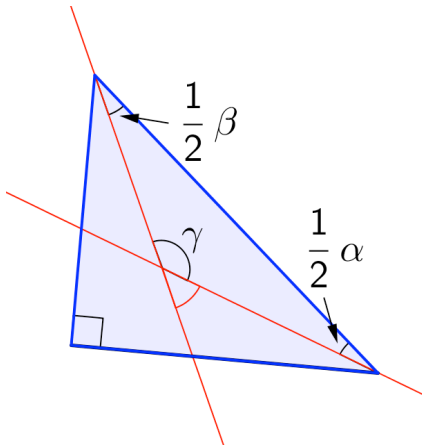


Piirretään kulmien B ja C kulmanpuolittajat. Merkitään kulmanpuolittajien leikkauspiste. Mitataan kulmanpuolittajien leikkauspisteeseen muodostuvan terävän kulman suuruus.



Vaikuttaa siltä, että kulma on aina 45° .

- b) Olkoon suorakulmaisen kolmion terävät kulmat α ja β . Piirretään näihin kulmiin kulmienpuolittajat.



Kulmanpuolittajien ja hypotenuusan muodostaman kolmion kolmas kulma on tylppä ja sen suuruus on

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 90^\circ \\ &= 135^\circ.\end{aligned}$$

Terävien kulmien summa
 $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Kulmanpuolittajien välinen terävä kulma on tämän vieruskulma.

$$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

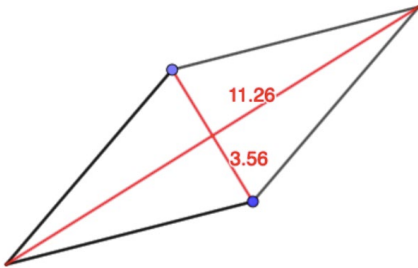
On osoitettu, että suorakulmaisen kolmion terävien kulmien kulmanpuolittajien välinen terävä kulma on aina 45° . $\square$

Vastaus

- a) Kulmanpuolittajien välinen terävä kulma näyttäisi olevan 45° .

K8

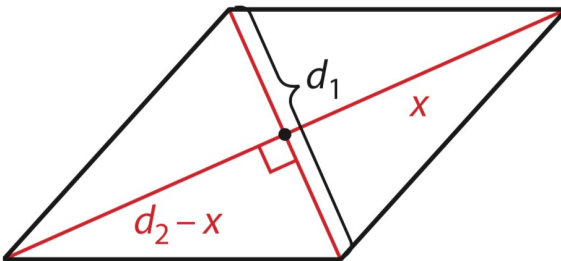
- a) Appletin perusteella vaikuttaisi siltä, että neljäkkään pinta-ala on puolet lävistäjien pituuksien tulosta: $A = \frac{1}{2} d_1 d_2$.



Pinta-ala: $A = 20.04$

Lävistäjien pituuksien tulo: $11.26 \cdot 3.56 = 40.08$

- b) Lävistäjä d_1 jakaa neljäkkään kahteen kolmioon. Koska neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kolmioiden korkeudet ovat x ja $d_2 - x$.



Neljäkkään pinta-ala voidaan laskea näiden kolmioiden pinta-alojen summana.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot (d_2 - x) + \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot x \quad \text{Erotetaan yhteinen tekijä } \frac{1}{2} d_1. \\ &= \frac{1}{2} d_1 \cdot (d_2 - x + x) \\ &= \frac{1}{2} d_1 d_2 \end{aligned}$$

On osoitettu, että neljäkkään pinta-ala voidaan laskea lävistäjien pituuksien avulla kaavalla $A = \frac{1}{2} d_1 d_2$. $\square$

K9

Merkitään 55 tumaan television kuvaruudun leveyttä kirjaimella x ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{32}{55} = \frac{71}{x}$$

Ratkaistaan CAS-laskimalla.

$$x = 122,03...(\text{cm})$$

Ruudun leveys on 122 cm.

Vastaus

122 cm

K10

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Lampi	Mittakaava
Kartalla	3,9	1
Luonnossa	p	15 000

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan lammen ympärysmitta p .

$$\frac{3,9}{p} = \frac{1}{15\,000}$$

$$p = 58\,500 \text{ (cm)}$$

Ympärysmitta on $58\,500 \text{ cm} = 585 \text{ m} \approx 590 \text{ m}$.

Lasketaan suunnistajan keskivauhti.

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} \\ &= \frac{585 \text{ m}}{5 \cdot 60 \text{ s}} \\ &= 1,95 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 2,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Keskivauhti voidaan ilmoittaa myös yksikössä km/h .

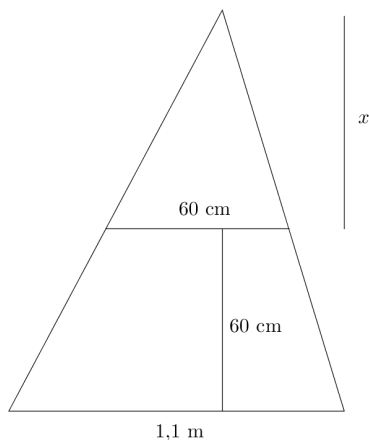
$$(1,95 \cdot 3,6) \frac{\text{km}}{\text{h}} = 7,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Vastaus

ympärysmitta 590 m, keskivauhti 2,0 m/s (7,0 km/h)

K11

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kuvion sisäkkäiset kolmiot ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset, sillä niillä on yhteinen huippukulma ja kyljen, sekä vaakasuorien kantojen rajaamat samankohtaiset, yhtä suuret kantakulmat.

Ratkaistaan pienen kolmion korkeus x verrantoyhtälöstä. Huomataan vielä, että $1,1 \text{ m} = 110 \text{ cm}$.

$$\frac{x}{x + 60} = \frac{60}{110}$$

Kerrotaan ristiin.

$$110x = 60(x + 60)$$

$$110x = 60x + 3600$$

$$50x = 3600$$

$$| : 50$$

$$x = 72 \text{ (cm)}$$

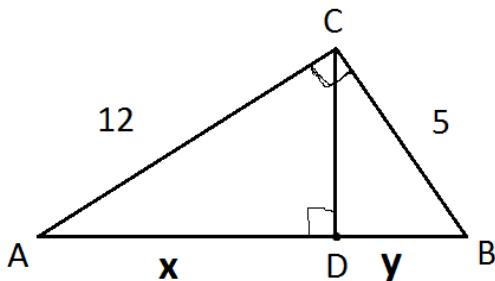
Suuren kolmion korkeus on $x + 60 \text{ cm} = 72 \text{ cm} + 60 \text{ cm} = 132 \text{ cm} \approx 1,3 \text{ m}$.

Vastaus

1,3 m

K12

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Harjoitustehtävän 3.14 perusteella kaikki kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia. Ratkaistaan ensin pituus x kolmioista ABC ja ACD .

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{13}{12} = \frac{12}{x}$$

$$13x = 144$$

$$x = \frac{144}{13}$$

Kerrotaan ristiin.

$$| : 13$$

Ratkaistaan sitten y kolmioista ABC ja CBD .

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$$

$$\frac{13}{5} = \frac{5}{y}$$

$$13y = 25$$

$$y = \frac{25}{13}$$

Kerrotaan ristiin.

$$| : 13$$

Suhteeksi saadaan

$$x : y = \frac{144}{13} : \frac{25}{13} = \frac{144}{13} \cdot \frac{13}{25} = \frac{144}{25} = 144 : 25.$$

Vastaus

144 : 25

K13

Lasketaan pienoismallin mittakaava k . Tilavuuksien suhde on $1 : 100$ ja toisaalta tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$k^3 = \frac{1}{100}$$

$$k = \sqrt[3]{\frac{1}{100}} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$$

Pienoismallin mitata saadaan nyt kertomalla alkuperäiset arvot mittakaavan arvolla.

$$\text{Leveys: } \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \cdot 2,00 \text{ m} = 0,4308... \text{ m} \approx 0,431 \text{ m} = 43,1 \text{ cm}$$

$$\text{Pituus: } \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \cdot 1,00 \text{ m} = 0,2154... \text{ m} \approx 0,215 \text{ m} = 21,5 \text{ cm}$$

$$\text{Korkeus: } \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \cdot 3,00 \text{ m} = 0,6463... \text{ m} \approx 0,646 \text{ m} = 64,6 \text{ cm}$$

Vastaus

leveys 43,1 cm, pituus 21,5 cm ja korkeus 64,6 cm.

K14

Merkitään pienoismallin siiven pinta-alaa A . Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A}{190} = \left(\frac{1}{75}\right)^2$$

$$A = 0,03377\ldots(\text{m}^2)$$

Pienoismallin siiven ala on noin
 $0,03377\ldots \text{ m}^2 = 337,7\ldots \text{ cm}^2 \approx 340 \text{ cm}^2$.

Vastaus

340 cm^2

K15

- a) Uudet pituudet saadaan suoraan prosenttikertoimen avulla. 15% pienennystä vastaa kerroin $100\% - 15\% = 85\% = 0,85$. Uudet pituudet ovat

$$0,85 \cdot 18 \text{ cm} = 15,3 \text{ cm} \approx 15 \text{ cm} \quad \text{ja}$$

$$0,85 \cdot 30 \text{ cm} = 25,5 \text{ cm} \approx 26 \text{ cm}.$$

- b) Lasketaan ensin mittakaava käyttäen hyväksi tietoa, jonka mukaan pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Pinta-alojen suhde on

$$\frac{0,85A}{A} = 0,85.$$

Saadaan yhtälö.

$$k^2 = 0,85$$

$$k = \sqrt{0,85} \quad \text{tai} \quad k = -\sqrt{0,85}$$

Mittakaavan arvo on positiivinen, joten $k = \sqrt{0,85}$.

Uudet pituudet saadaan kertomalla vanhat mittakaavan arvolla.

$$\sqrt{0,85} \cdot 18 \text{ cm} = 16,5951... \text{ cm} \approx 17 \text{ cm}$$

$$\sqrt{0,85} \cdot 30 \text{ cm} = 27,6586... \text{ cm} \approx 28 \text{ cm}$$

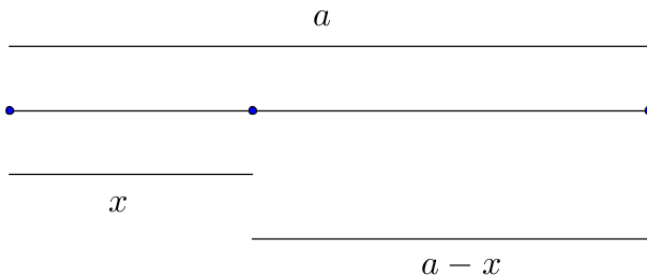
Vastaus

a) 15 cm ja 26 cm

b) 17 cm ja 28 cm

K16

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Ratkaistaan ensin lauseke lyhyemmän osan pituudelle x verrantoyhtälöstä.

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}+3}{2}a \approx 2,618\ldots \cdot a \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a \approx 0,381\ldots \cdot a$$

Koska $x < a$, on $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$. Tällöin

$$a-x = a - \frac{3-\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

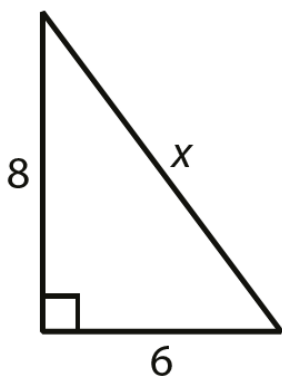
Kysytyksi suhteeksi saadaan

$$(a-x):a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618.$$

Vastaus

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$$

K17



Ratkaistaan sivun pituus x Pythagoraan lauseella.

$$8^2 + 6^2 = x^2$$

$$x^2 = 100$$

$$x = -10 \text{ tai } x = 10$$

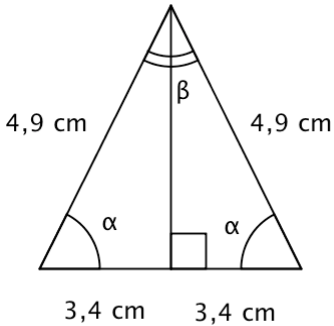
Pituus on positiivinen luku, joten $x = 10$.

Vastaus

$$x = 10$$

K18

Kolmion kannan puolikkaan pituus on $\frac{6,8 \text{ cm}}{2} = 3,4 \text{ cm}$.



Kantakulmat:

$$\cos \alpha = \frac{3,4}{4,9}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{3,4}{4,9} = 46,06...^{\circ} \approx 46^{\circ}$$

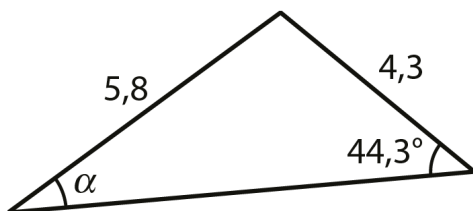
Huippukulma:

$$\beta = 180^{\circ} - 2\alpha = 180^{\circ} - 2 \cdot 46,06...^{\circ} = 87,87...^{\circ} \approx 88^{\circ}$$

Vastaus

46° , 46° ja 88°

K19



Ratkaistaan kulman α suuruus sinilauseella.

$$\frac{4,3}{\sin \alpha} = \frac{5,8}{\sin 44,3^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

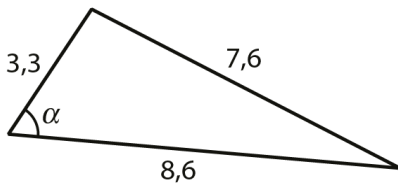
$$\alpha = 31,18...^\circ$$

$$\alpha \approx 31^\circ$$

Vastaus

$$\alpha = 31^\circ$$

K20



Ratkaistaan kulman α suuruus kosinilauseella.

$$7,6^2 = 3,3^2 + 8,6^2 - 2 \cdot 3,3 \cdot 8,6 \cdot \cos \alpha \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

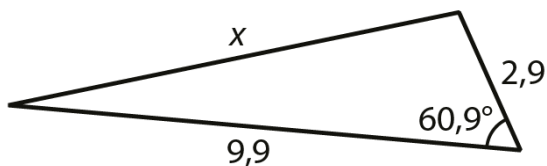
$$\alpha = 61,49\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 61^\circ$$

Vastaus

$$\alpha = 61^\circ$$

K21



Ratkaistaan sivun pituus x kosinilauseella.

$$x^2 = 9,9^2 + 2,9^2 - 2 \cdot 9,9 \cdot 2,9 \cdot \cos 60,9^\circ$$
 Ratkaistaan CAS-laskimella.

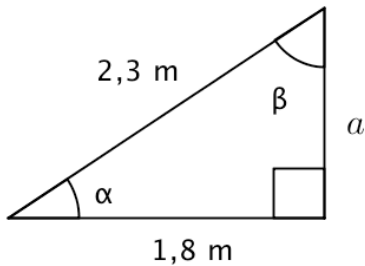
$$x = -8,85... \text{ tai } x = 8,85...$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = 8,85... \approx 8,9$.

Vastaus

$$x = 8,9$$

K22



a) Lasketaan toisen kateetin pituus a Pythagoraan lauseella.

$$2,3^2 = 1,8^2 + a^2$$

$$a^2 = 2,3^2 - 1,8^2 = 1,43...$$

$$a = -\sqrt{1,43...} \quad \text{tai} \quad a = \sqrt{1,43...}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $a = \sqrt{1,43...} \text{ m} \approx 1,4 \text{ m}$.

b) Pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma. Lasketaan kulma α .

$$\cos \alpha = \frac{1,8}{2,3}$$

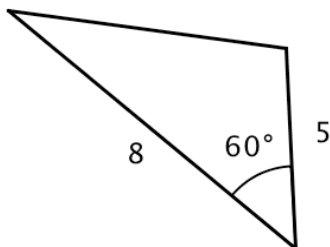
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1,8}{2,3}\right) = 38,49...^\circ \approx 38^\circ$$

Vastaus

a) 1,4 m

b) 38°

K23



Kolmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ \\ &= 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 10\sqrt{3} \\ &= 17,320... \\ &\approx 17,32 \end{aligned}$$

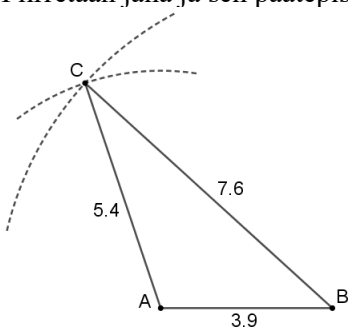
Vastaus

a) $10\sqrt{3}$

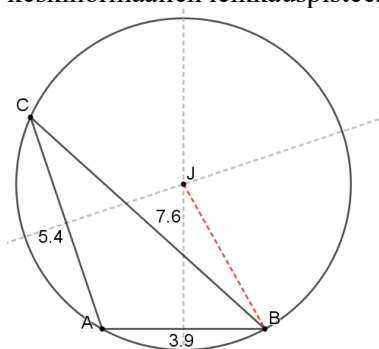
b) 17,32

K24

- a) Piirretään jana ja sen päätepisteet keskipisteinä kaksi ympyrää.

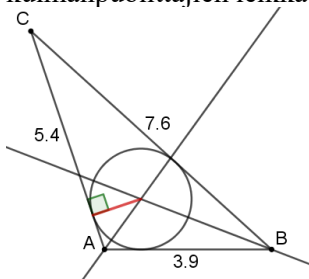


Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä.



Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 4,0 cm.

- b) Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste.



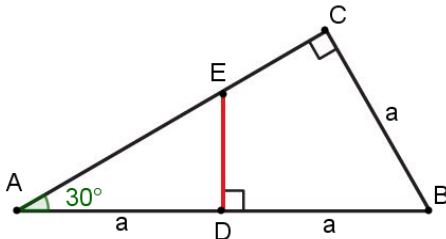
Kolmion sisään piirretyn ympyrän säteen pituus on 1,2 cm.

Vastaus

- a) 4,0 cm b) 1,2 cm

K25

Merkitään hypotenuusan pituutta $2a$:lla.



Ratkaistaan kolmion kateetin AC pituus.

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{2a}$$

$$AC = 2a \cos 30^\circ = \sqrt{3}a$$

Ratkaistaan janan AE pituus.

$$\cos 30^\circ = \frac{a}{AE}$$

$$AE = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}a$$

Lasketaan janojen EC ja AE pituuksien suhde.

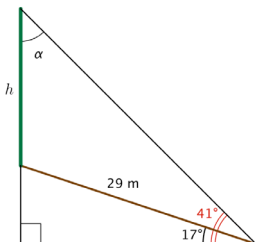
$$\frac{EC}{AE} = \frac{AC - AE}{AE} = \frac{\sqrt{3}a - \frac{2}{\sqrt{3}}a}{\frac{2}{\sqrt{3}}a} = \frac{1}{2}$$

Vastaus

1 : 2 (tai 2 : 1)

K26

Tapa 1 Käytetään sinilauseetta.



$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

Lasketaan puun korkeus h sinilauseella.

$$\frac{h}{\sin(41^\circ - 17^\circ)} = \frac{29}{\sin \alpha}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = 15,62...$$

$$\approx 16 \text{ (m)}$$

Puun pituus on 16 m.

Vastaus

16 m

Tapa 2 Käytetään apuna suorakulmaisia kolmioita.

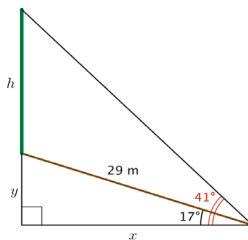
Lasketaan kateettien pituudet x ja y .

$$\sin 17^\circ = \frac{y}{29}$$

$$y = 29 \cdot \sin 17^\circ = 8,47... \text{ (m)}$$

$$\cos 17^\circ = \frac{x}{29}$$

$$x = 29 \cdot \cos 17^\circ = 27,73... \text{ (m)}$$



Lasketaan puun korkeus h .

$$\tan 41^\circ = \frac{y + h}{x}$$

$$\tan 41^\circ = \frac{8,47... + h}{27,73...}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = 15,62...$$

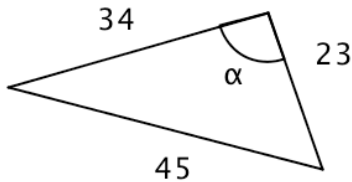
$$\approx 16 \text{ (m)}$$

Puun pituus on 16 m.

Vastaus

16 m

K27



Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma α .

Käytetään kosinilausetta.

$$45^2 = 34^2 + 23^2 - 2 \cdot 34 \cdot 23 \cdot \cos \alpha$$

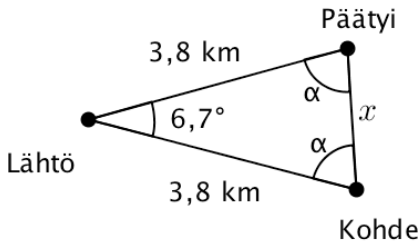
$$\cos \alpha = \frac{45^2 - 34^2 - 23^2}{-2 \cdot 34 \cdot 23} = -0,217...$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0,217...) = 102,55...^\circ \approx 102,6^\circ$$

Vastaus

102,6°

K28



Syntyy tasakylkinen kolmio.

Kantakulmat ovat $\alpha = \frac{180^\circ - 6,7^\circ}{2} = 86,65^\circ$.

Lasketaan kysytty etäisyys x sinilauseella.

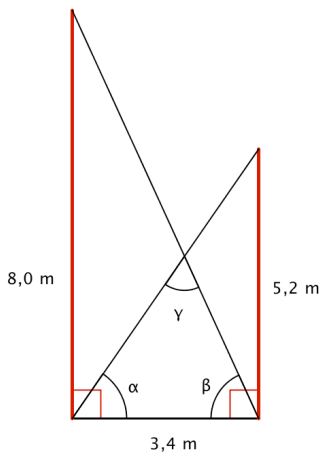
$$\frac{x}{\sin 6,7^\circ} = \frac{3,8}{\sin 86,65^\circ}$$
$$x = \frac{3,8 \cdot \sin 6,7^\circ}{\sin 86,65^\circ} = 0,4441... \approx 0,44 \text{ (km)}$$

Veneilijä päätyy 0,44 km eli 440 metrin päähän kohteestaan.

Vastaus

440 m:n päähän

K29



Lasketaan kulmat α ja β suorakulmaisista kolmioista.

$$\tan \alpha = \frac{5,2}{3,4}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{5,2}{3,4} \right) = 56,82...^{\circ}$$

$$\tan \beta = \frac{8,0}{3,4}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{8,0}{3,4} \right) = 66,97...^{\circ}$$

Lasketaan kulma γ .

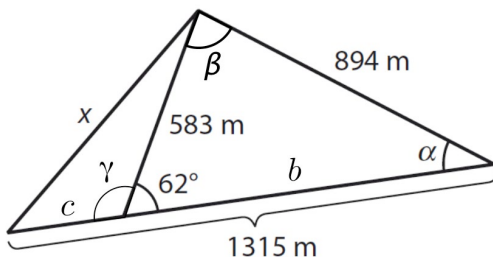
$$\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 180^{\circ} - 56,82...^{\circ} - 66,97...^{\circ} = 56,20...^{\circ} \approx 56^{\circ}$$

Vaijerien välinen kulma on 56° .

Vastaus

56°

K30



Kulma α saadaan sinilauseella.

$$\frac{583}{\sin \alpha} = \frac{894}{\sin 62^\circ}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 35,15\dots^\circ \text{ tai}$$

$$\alpha = 144,84\dots^\circ$$

Tarkistetaan, kelpaavatko saadut kulman α arvot laskemalla kulma β .

- Jos $\alpha = 35,15\dots^\circ$, niin $\beta = 180^\circ - 35,15\dots^\circ - 62^\circ = 82,84\dots^\circ$.
Tämä kelpaa kolmion kulmaksi.
- Jos $\alpha = 144,84\dots^\circ$, niin $\beta = 180^\circ - 144,84\dots^\circ - 62^\circ = -26,84\dots^\circ$.
Tämä ei kelpaa kolmion kulmaksi, joten tapaus $\alpha = 144,84\dots^\circ$ hylätään.

Sivun pituuden c laskemiseksi ratkaistaan sivun pituus b sinilauseella.

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{894}{\sin 62^\circ}$$

$$\frac{b}{\sin 82,844\dots^\circ} = \frac{894}{\sin 62^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$b = 1004,632\dots \text{ (m)}$$

$$c = 1315 \text{ m} - 1004,632\dots \text{ m} = 310,367\dots \text{ m}$$

Lasketaan kulma γ .

$$\gamma = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$$

Sivun pituus x saadaan kosinilauseella.

$$\begin{aligned} x^2 &= c^2 + 583^2 - 2 \cdot c \cdot 583 \cdot \cos \gamma \\ &= (310,367\dots)^2 + 583^2 - 2 \cdot 310,367\dots \cdot 583 \cdot \cos 118^\circ \\ &= 606\,113,16\dots \end{aligned}$$

$$x = -\sqrt{606\,113,16\dots} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{606\,113,16\dots}$$

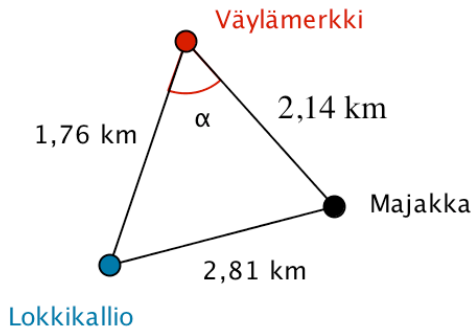
Pituus on positiivinen luku, joten

$$x = \sqrt{606\,113,16\dots} \text{ m} = 778,53\dots \text{ m} \approx 779 \text{ m}$$

Vastaus

$$\alpha = 35,2^\circ, \quad x = 779 \text{ m}$$

K31



Kysytty kulma α saadaan laskettua kosinilauseen avulla.

$$2,81^2 = 1,76^2 + 2,14^2 - 2 \cdot 1,76 \cdot 2,14 \cdot \cos \alpha$$

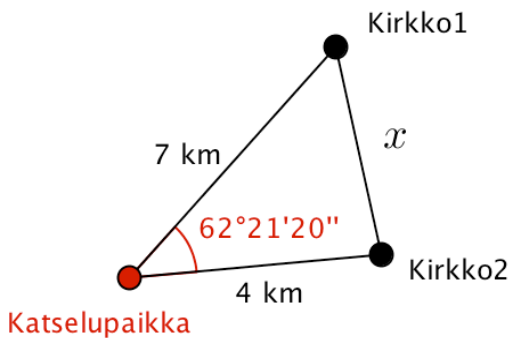
$$\cos \alpha = \frac{2,81^2 - 1,76^2 - 2,14^2}{-2 \cdot 1,76 \cdot 2,14} = -0,029...$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0,029...) = 91,66...^\circ \approx 92^\circ$$

Vastaus

92°

K32



Katselusuuntien välinen kulma on

$$62^{\circ} 21' 20'' = 62^{\circ} + \frac{21^{\circ}}{60} + \frac{20}{60 \cdot 60}^{\circ} = 62,3555...^{\circ}$$

Kysytty etäisyys saadaan kosinilauseen avulla.

$$\begin{aligned} x^2 &= 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 62,3555...^{\circ} \\ &= 39,016... \text{ (km}^2\text{)} \\ x &= -\sqrt{39,016...} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{39,016...} \end{aligned}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = \sqrt{39,016...} = 6,246... \approx 6 \text{ km}$.

Kirkot ovat 6 km etäisyydellä toisistaan.

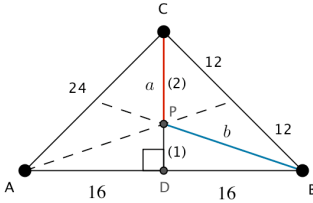
Vastaus

6 km

K33

a) Kannan pituuden puolikas on $\frac{32}{2} = 16$ ja

kyljen pituuden puolikas $\frac{24}{2} = 12$.



Kolmion painopiste P on keskijanojen leikkauspiste, joka jakaa mediaanit suhteessa $2 : 1$ kärjestä lukien.

Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana on samalla keskijana. Lasketaan kolmion korkeus.

$$24^2 = 16^2 + CD^2$$

$$CD^2 = 24^2 - 16^2 = 320$$

$$CD = \sqrt{320} \text{ tai } CD = -\sqrt{320}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $CD = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

Lasketaan painopisteen P etäisyys huippukulman kärjestä.

$$a = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \cdot 8\sqrt{5} = \frac{16}{3}\sqrt{5}$$

b) Lasketaan painopisteen P etäisyys kantakulman kärjestä.

$$b^2 = PD^2 + 16^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}CD\right)^2 + 16^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{5}\right)^2 + 16^2$$

$$= \frac{2624}{9}$$

$$b = \sqrt{\frac{2624}{9}} \text{ tai } b = -\sqrt{\frac{2624}{9}}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $b = \sqrt{\frac{2624}{9}} = \frac{8\sqrt{41}}{3}$.

Vastaus

a) $\frac{16\sqrt{5}}{3}$

b) $\frac{8\sqrt{41}}{3}$

K34

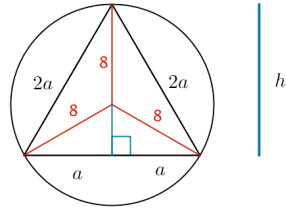
Merkitään tasasivuisen kolmion sivun pituutta $2a$:lla ja korkeutta h :lla.

Lasketaan kolmion korkeus h .

$$(2a)^2 = a^2 + h^2$$

$$h^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$h = \sqrt{3a^2} \text{ tai } h = -\sqrt{3a^2}$$



Pituus on positiivinen luku, joten $h = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a| = \sqrt{3}a \quad (a > 0)$.

Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla.

$$8^2 = a^2 + (h - 8)^2$$

$$8^2 = a^2 + (\sqrt{3}a - 8)^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a = 0 \text{ tai } a = 4\sqrt{3}$$

Koska $a > 0$, niin $a = 4\sqrt{3}$.

Kolmion sivun pituus on

$$2a = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Vastaus

$$8\sqrt{3}$$

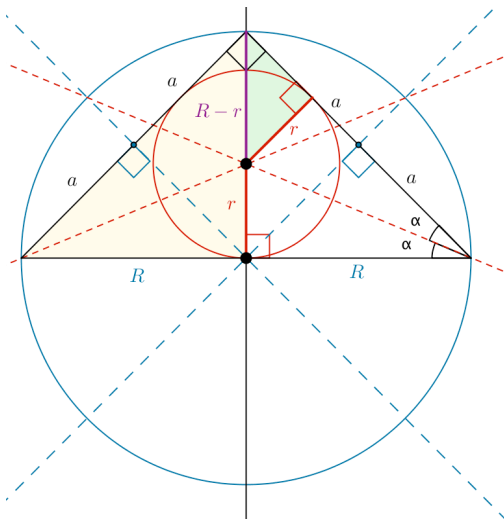
K35

Piirretään tilanteesta mallikuva.

Merkitään kolmion kyljen pituutta $2a$:lla.

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana on eräs keskinormaaleista.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana on eräs kulmanpuolittajista.



On laskettava suhde $\frac{R}{r}$.

Kolmion kannan puolikas on ympäri piirretyn ympyrän säde R .

$$(2R)^2 = (2a)^2 + (2a)^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$R = \sqrt{2}a \quad \text{tai} \quad R = -\sqrt{2}a \quad | \quad a > 0$$

Säde on positiivinen luku, joten $R = \sqrt{2}a$.

Kuvaan merkityt keltainen ja vihreä kolmio ovat yhdenmuotoiset kklauseen perusteella (molemmissa huippukulman puolikas ja suora kulma).

Vastinpituuksien suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{R-r}{2a} = \frac{r}{R} \quad | \quad R = \sqrt{2}a$$

$$\frac{\sqrt{2}a - r}{2a} = \frac{r}{\sqrt{2}a} \quad \text{Ratkaistaan } r \text{ CAS-laskimella.}$$

$$r = \frac{2a}{2 + \sqrt{2}}$$

Kysytty suhde on

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}a}{\frac{2a}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} + 1$$

Vastaus

$$\sqrt{2} + 1$$

K36

- a) Ympyrän pinta-ala on 1990 m^2 . Ratkaistaan ympyrän säde.

$$1990 = \pi r^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = -25,1681\dots \text{ tai } r = 25,1681\dots$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r = 25,1681\dots \text{ m}$.
Lasketaan halkaisija.

$$d = 2r = 2 \cdot 25,1681\dots \text{ m} = 50,3363\dots \text{ m} \approx 50,3 \text{ m}$$

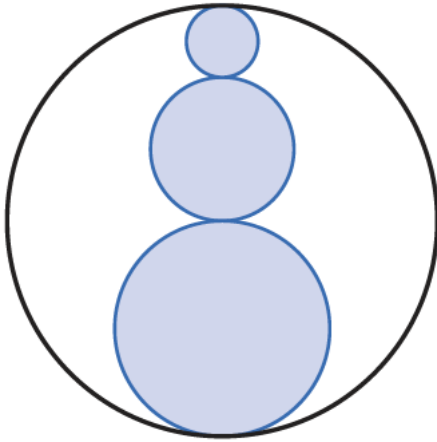
- b) Lasketaan aulatilän ympärysmitta.

$$p = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 25,1681\dots \text{ m} = 158,136\dots \text{ m} \approx 158 \text{ m}$$

Vastaus

- a) $50,3 \text{ m}$
b) 158 m

K37



Ison ympyrän halkaisija on $2 + 4 + 6 = 12$ ja säde $\frac{12}{2} = 6$.

Ison ympyrän pinta-ala on $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$.

Ympyrän sisällä olevien pienempien ympyröiden säteet ovat 1, 2 ja 3.

Väritetyn kuvion pinta-ala on pienempien ympyröiden pinta-alojen summa:

$$\pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 3^2 = 14\pi.$$

Lasketaan väritetyn kuvion pinta-alan suhde ison ympyrän pinta-alaan.

$$\frac{\overset{7}{\cancel{14}} \pi}{\underset{18}{\cancel{36}} \pi} = 7 : 18$$

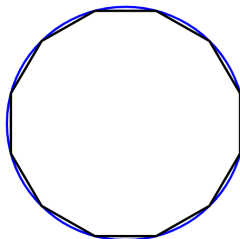
Vastaus

7 : 18.

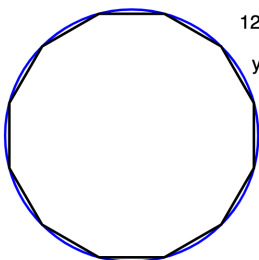
K38

- a) Piirretään jana, jonka pituus on 1. Piirretään janan päätepisteiden avulla säännöllinen monikulmio, jossa on 12 kärkipistettä.

Piirretään ympyrä valitsemalla kolme kehän pistettä. Kaikki 12-kulmion kärjet ovat ympyrän kehän pisteitä.



Mitataan 12-kulmion ja ympyrän pinta-alat.



12-kulmion pinta-ala: 11,196

ympyrän pinta-ala: 11,725

12-kulmion pinta-ala on 11,196 ja ympyrän 11,725.

Lasketaan 12-kulmion pinta-alan suhde ympyrän pinta-alaan.

$$\frac{11,196}{11,725} = 0,9548... \approx 0,95$$

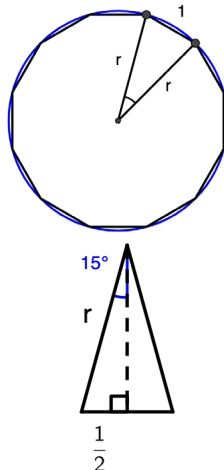
b) Ympyrällä ja 12-kulmiolla on yhteinen keskipiste.

Keskipisteestä 12-kulmion vierekkäisiin kärkiin piirretyt säteet muodostavat 12-kulmion sivun kanssa tasakylkisen kolmion. Vastaavia kolmioita muodostuu kaksitoista, joten kolmion huippukulman suuruus on

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

Tasakylkisen kolmion huippukulmasta kannalle piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

Ratkaistaan ympyrän säde r suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\sin 15^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{r}$$

Sini on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Lasketaan 12-kulmion pinta-ala.

$$12 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2}}{2}}_{\text{tasakylkisen kolmion pinta-ala}} \cdot \sin 30^\circ$$

12-kulmiossa on kaksitoista tasakylkistä kolmiota.

$$= 3 \cdot (\sqrt{3} + 2)$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$\pi \cdot \left(\frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2}}{2} \right)^2 = \pi \cdot (\sqrt{3} + 2)$$

Lasketaan 12-kulmion pinta-alan suhde ympyrän pinta-alaan.

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{3} + 2)}{\pi \cdot (\sqrt{3} + 2)} = \frac{3}{\pi} \approx 0,95$$

Vastaus

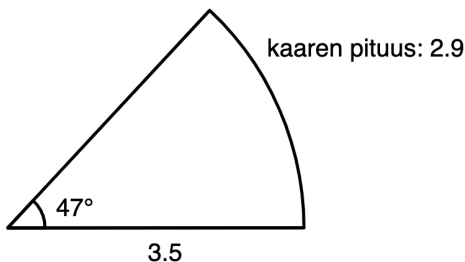
a) 0,95 b) $\frac{3}{\pi} \approx 0,95$

K39

Piirretään jana, jonka pituus on 3,5.

Piirretään janan toiseen päätepisteeseen kulma, jonka koko on 47° .

Piirretään ympyräsektori valitsemalla keskipisteeksi kulman 47° kärkipiste.



- a) Mitataan sektorin kaaren pituus. Kaaren pituus on 2,9.

Lasketaan sektorin piirin pituus.

$$3,5 + 2,9 + 3,5 = 9,9$$

Sektorin piirin pituus on 9,9.

- b) Lasketaan sektorin kaaren pituus.

$$\begin{aligned} b &= \frac{47^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3,5 \\ &= 2,8710... \end{aligned}$$

Lasketaan sektorin piirin pituus.

$$3,5 + 2,8710... + 3,5 = 9,8710... \approx 9,9$$

Vastaus

a) 9,9

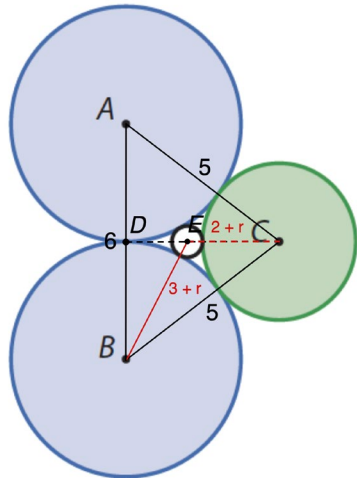
b) 9,9

K40

Täydennetään kuvaa. Merkitään keskellä olevan pikkuympyrän sädettä kirjaimella r .

Kolmio ABC on tasakylkinen kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 6, 5 ja 5. Korkeusjana CD puolittaa kannan AB pisteessä D . Janan DB pituus on 3.

Ratkaistaan tasakylkisen kolmion ABC korkeus CD Pythagoraan lauseella.



$$CD^2 + 3^2 = 5^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$CD = -4 \text{ tai } CD = 4$$

Koska pituus on positiivinen luku, niin $CD = 4$.

Lasketaan janan ED pituus.

$$\begin{aligned} ED &= CD - CE \\ &= 4 - (2 + r) \\ &= 2 - r \end{aligned}$$

Ratkaistaan pikkuympyrän säde r Pythagoraan lauseella kolmiosta DBE .

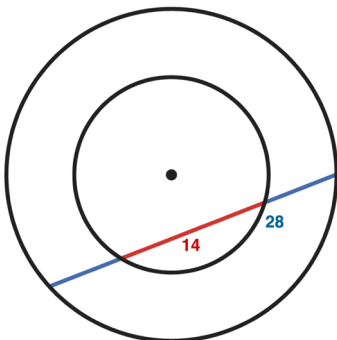
$$\begin{aligned} ED^2 + DB^2 &= EB^2 \\ (2 - r)^2 + 3^2 &= (3 + r)^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ r &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Vastaus

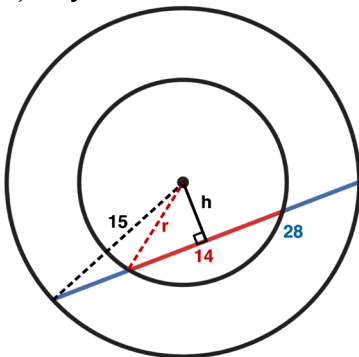
$$r = \frac{2}{5}$$

K41

a) Piirretään mallikuva.



b) Täydennetään kuvaa.



Ratkaistaan keskipisteen etäisyys jänteestä Pythagoraan lauseella.

$$14^2 + h^2 = 15^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$h = -\sqrt{29} \text{ tai } h = \sqrt{29}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $h = \sqrt{29}$.

Ratkaistaan pienemmän ympyrän säde r Pythagoraan lauseella.

$$7^2 + \sqrt{29} = r^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = -\sqrt{78} \text{ tai } r = \sqrt{78}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r = \sqrt{78}$. Pienemmän ympyrän säde on $\sqrt{78}$.

Vastaus

b) $\sqrt{78}$

K42

Piirretään mallikuva.

Koska ison ympyrän halkaisija on 8, pienempien ympyröiden halkaisijat ovat 4. Pienempien ympyröiden säteet ovat siten 2.

Lasketaan segmentin pinta-ala sektorin ja kolmion pinta-alojen erotuksena.

$$\begin{aligned} A_{seg} &= A_{sek} - A_k \\ &= \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \\ &= \pi - 2 \end{aligned}$$

Vastaavia segmenttejä on 8, joten niiden pinta-ala on $8 \cdot (\pi - 2) = 8\pi - 16$.

Valkean alueen pinta-ala saadaan, kun pienempien ympyröiden pinta-alasta vähennetään segmenttien pinta-ala.

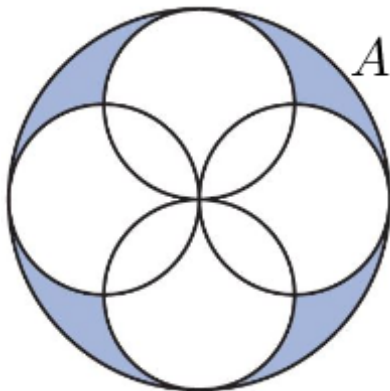
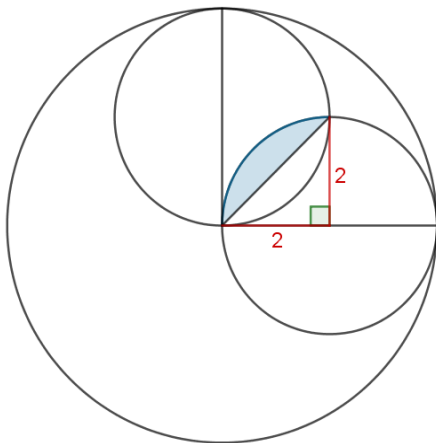
$$4 \cdot \pi \cdot 2^2 - (8\pi - 16) = 8\pi + 16$$

Väritetyn alueen pinta-ala saadaan, kun ison ympyrän pinta-alasta vähennetään valkean alueen pinta-ala.

$$\pi \cdot 4^2 - (8\pi + 16) = 8\pi - 16$$

Vastaus

$$8\pi - 16$$

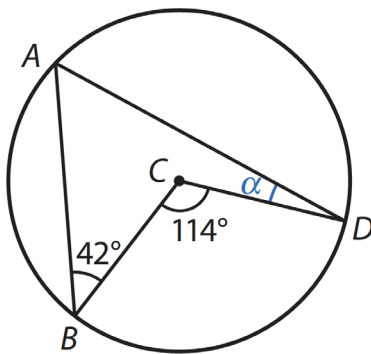


K43

Nelikulmion kärjessä A oleva kulma on kehäkulma ja samaa kaarta vastaa keskuskulma on 114° . Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

Kärjessä A olevan kulman suuruus on

$$\frac{114^\circ}{2} = 57^\circ$$



Nelikulmion kärjessä C olevan kulman suuruus on $360^\circ - 114^\circ = 246^\circ$.

Lasketaan kulman α suuruus.

$$\alpha = 360^\circ - 42^\circ - 57^\circ - 246^\circ \quad \text{Nelikulmion kulmien summa on } 360^\circ.$$
$$= 15^\circ$$

Vastaus

15°

K44

Lasketaan kulman B suuruus.

$$180^\circ - 105^\circ - 52^\circ = 23^\circ$$

Kulma B on kehäkulma, ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on $2 \cdot 23^\circ = 46^\circ$.

Ympyrän säteet ja sivu AC muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka huippukulma on 46° ja kanta AC .

Tasakylkisen kolmion huippukulmasta piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

Ratkaistaan kannan puolikas suorakulmaisesta kolmiosta, jonka toinen terävä kulma on $\frac{46^\circ}{2} = 23^\circ$.

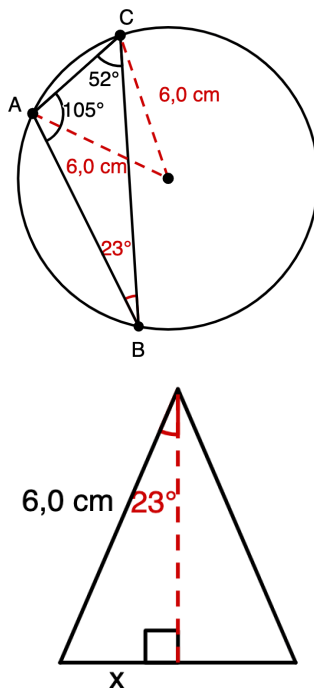
$$\sin 23^\circ = \frac{x}{6,0} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 2,344... \text{ (cm)}$$

Sivun AC pituus on $2 \cdot x = 2 \cdot 2,344... \text{ cm} = 4,689... \text{ cm} \approx 4,7 \text{ cm}$.

Vastaus

4,7 cm



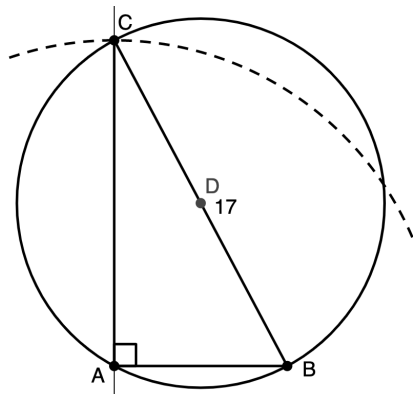
K45

a)

Piirretään jana AB , jonka pituus on 8. Piirretään janan toiseen päätepisteeseen janan normaali ja mitataan siitä etäisyys 15 ympyrän avulla.

Piirretään suorakulmainen kolmio ABC .

Piirretään kolmion kärkipisteiden kautta kulkeva ympyrä. Merkitään ympyrän keskipiste.



Koska ympyrän kehäkulma A on suora, kolmion hypotenuusa BC on ympyrän halkaisija. Mitataan janan BC pituus.

Janan BC pituus on 17. Ympyrän säde on $\frac{17}{2} = 8,5$.

b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on ympyrän halkaisija.

Ratkaistaan halkaisijan pituus Pythagoraan lauseella.

$$8^2 + 15^2 = d^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$d = -17 \text{ tai } d = 17$$

Pituus on positiivinen luku, joten ympyrän halkaisija $d = 17$.

Ympyrän säde on $\frac{17}{2} = 8,5$.

Vastaus

a) 8,5

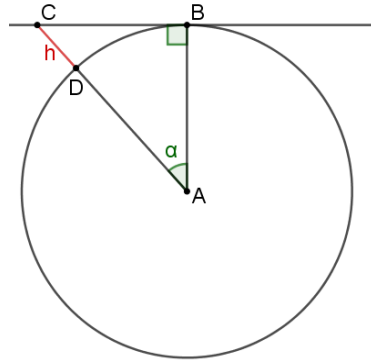
b) $\frac{17}{2} = 8,5$

K46

Piirretään mallikuva. Merkitään korkeutta kirjaimella h .

Lontoon ja Helsingin välinen etäisyys 1820 km on maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus.

Sektorin kaaren pituus on 1820 km. Ratkaistaan keskuskulman α suuruus.



$$1820 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 40\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\alpha = 16,38^\circ$$

$$\text{Maapallon säde on } \frac{40\,000}{2\pi} \text{ km} = \frac{20\,000}{\pi} \text{ km}.$$

Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 16,38^\circ = \frac{\frac{20\,000}{2\pi}}{\frac{20\,000}{2\pi} + h}$$

$$h = 269,31\dots$$

$$\approx 269 \text{ (km)}$$

Kosini on viereisen kateetin suhde hypotenuusaan.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

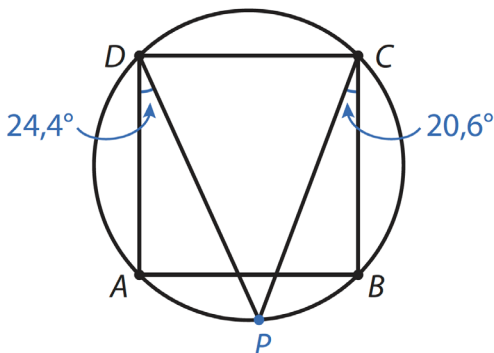
Tulisi nousta vähintään 269 km:n korkeudelle.

Vastaus

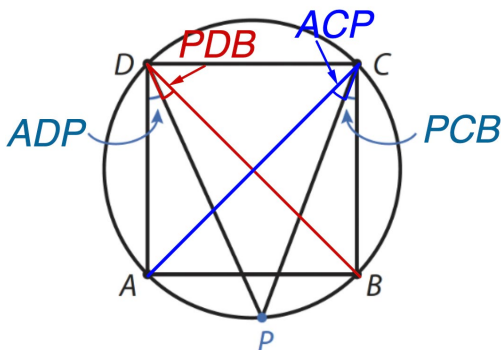
vähintään 269 km:n korkeudelle

K47

- a) Piirretään kuvio ja tutkitaan sitä pistettä P siirtämällä. Mitataan kulmien suuruudet. Kulmien ADP ja PCB summa näyttäisi olevan aina 45° .



- b) Täydennetään kuviota.



Kulmat PCB ja PDB ovat samaa kaarta vastaavia kehäkulmia, joten ne ovat yhtä suuret. (Vastaavasti kulmat ADP ja ACP ovat keskenään yhtä suuret.)

Kulma $ADB = 45^\circ$.

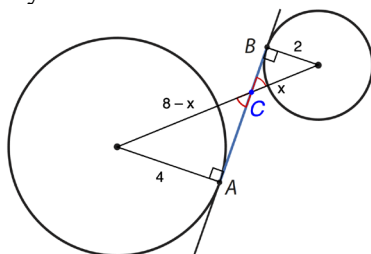
$$ADP + PCB = ADP + PDB = ADB = 45^\circ \quad \square$$

Vastaus

- a) 45°
b) 45°

K48

Täydennetään kuviota



Suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{8-x}{x} = \frac{4}{2} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Pienemmän suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on $\frac{8}{3}$ ja

suuremman $8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.

Ratkaistaan suorakulmaisten kolmioiden tuntemattomien kateettien pituudet AC ja CB .

$$4^2 + AC^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AC = -\frac{4\sqrt{7}}{3} \quad \text{tai} \quad AC = \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AC = \frac{4\sqrt{7}}{3}$.

$$2^2 + CB^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$CB = -\frac{2\sqrt{7}}{3} \quad \text{tai} \quad CB = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $CB = \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

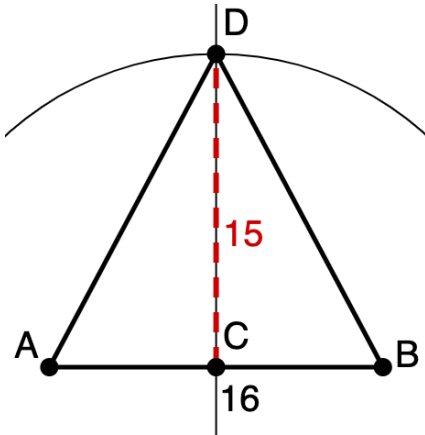
Lasketaan janan AB pituus.

$$AC + CB = \frac{4\sqrt{7}}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3} = 2\sqrt{7}$$

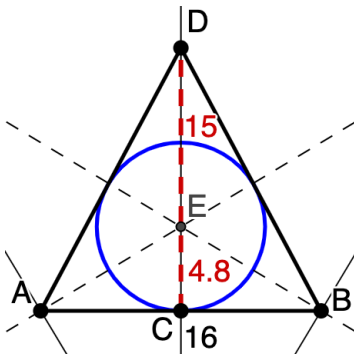
Vastaus $2\sqrt{7}$

K49

- a) Piirretään jana, jonka pituus on 16 ja tälle janalle keskinormaali. Mitataan siitä etäisyys 15 ympyrän avulla.



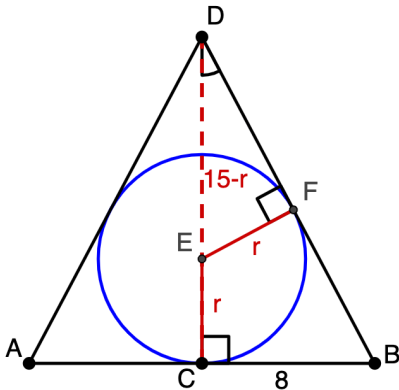
Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Piirretään kulman puolittajat ja merkitään niiden leikkauspiste. Piirretään ympyrä.



Mitataan ympyrän säde. Säteen pituus on 4,8.

b) Kolmiot CBD ja FDE ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella:

- kolmioilla on yhteinen kulma
- kummassakin on suora kulma.



Ratkaistaan janan BD pituus Pythagoraan lauseella.

$$BD^2 = 8^2 + 15^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$BD = -17 \text{ tai } BD = 17$$

Pituus on positiivinen luku, joten $BD = 17$.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan säde r .

$$\frac{EF}{CB} = \frac{ED}{BD}$$

$$\frac{r}{8} = \frac{15-r}{17} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = \frac{24}{5}$$

Vastaus

a) 4,8

b) $\frac{24}{5}$

K50

a) Lasketaan laatikon tilavuus.

$$V = 40,0 \cdot 23,0 \cdot 10,0 = 9200 \text{ (cm}^3\text{)}$$

b) Lasketaan laatikon avaruuslävistäjä pituus.

$$d^2 = 40,0^2 + 23,0^2 + 10,0^2$$

$$d^2 = 2229$$

$$d = \sqrt{2229} = 47,21... \text{ tai } d = -\sqrt{2229} = -47,21...$$

Pituus on positiivinen luku, joten $d = 47,21... \text{ cm}$.

Koska avaruuslävistäjän pituus $47,21... \text{ cm} > 46,0 \text{ cm}$,
sauva mahtuu laatikkoon.

Vastaus

a) 9200 cm^3

b) mahtuu

K51

Kuution tilavuus on 123 cm^3 . Ratkaistaan kuution särmän pituus a .

$$a^3 = 123$$

$$a = \sqrt[3]{123}$$

Lasketaan kuution pinta-ala.

$$A = 6a^2$$

$$= 6 \cdot \left(\sqrt[3]{123}\right)^2$$

$$= 148,39\dots$$

$$\approx 148 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus

$$148 \text{ cm}^2$$

K52

- a) Lasketaan suoran ympyrälierion tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_p h & A_p &= \pi r^2 \\ &= \pi r^2 h & r &= 31 \text{ cm} \\ & & h &= 1,10 \text{ m} = 110 \text{ cm} \\ &= \pi \cdot 31^2 \cdot 110 \\ &= 332097,7... \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$$332097,7... \text{ cm}^3 = 332,0977... \text{ dm}^3 = 332,0977... \text{ L} \approx 330 \text{ L}$$

- b) Lasketaan suoran ympyräkartion tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} A_p h & A_p &= \pi r^2 \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h & r &= 12 \text{ cm} \\ & & h &= 54 \text{ cm} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 54 \\ &= 8143,00... \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$$8143,00... \text{ cm}^3 = 8,14300... \text{ dm}^3 = 8,14300... \text{ L} \approx 8,1 \text{ L}$$

- c) Lasketaan pallon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 25^3 \\ &= 65449,84... \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$$65449,84... \text{ cm}^3 = 65,44984... \text{ dm}^3 = 65,44984... \text{ L} \approx 65 \text{ L}$$

Vastaus

- a) 330 L
b) 8,1 L
c) 65 L

K53

Oletetaan, että kattilassa oleva vesi muodostaa suoran ympyrälieriön.

Veden tilavuus on $3,0 \text{ L} = 3,0 \text{ dm}^3 = 3000 \text{ cm}^3$.

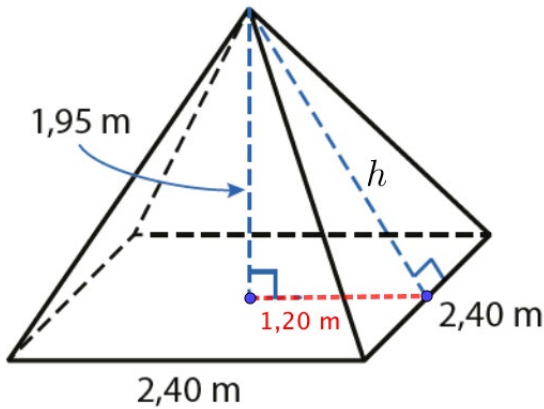
Ratkaistaan veden korkeus.

$$\begin{array}{l|l} V = A_p h & : A_p \\ h = \frac{V}{A_p} & A_p = \pi r^2 \\ & V = 3000 \text{ cm}^3 \\ & r = 11 \text{ cm} \\ & \\ = \frac{V}{\pi r^2} & \\ = \frac{3000}{\pi \cdot 11^2} & \\ = 7,89... & \\ \approx 7,9 \text{ (cm)} & \end{array}$$

Vastaus

7,9 cm

K54



Ratkaistaan sivutahkon korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$h^2 = 1,95^2 + 1,20^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$h = -2,28... \text{ tai } h = 2,28...$$

Pituus on positiivinen luku, joten $h = 2,28... \text{ m}$.

Lasketaan katon pinta-ala.

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,40 \cdot 2,28... = 10,99... \approx 11 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus

$$11,0 \text{ m}^2$$

K55

Putken sisähalkaisija on 32 mm ja säde 16 mm.

Putken ulkosäde on 16 mm + 1,2 mm = 17,2 mm.

Putken pituus on 1 m = 1000 mm.

Materiaalin tilavuus on putken ulko- ja sisätilavuuksien erotus.

$$\begin{aligned}V_m &= V_u - V_s \\&= \pi \cdot 17,2^2 \cdot 1000 - \pi \cdot 16^2 \cdot 1000 \\&= 125161,05... \text{ (mm}^3\text{)}\end{aligned}$$

Ilmaistaan tilavuus kuutiometreinä.

$$\begin{aligned}125161,05... \text{ mm}^3 &= 125,16105... \text{ cm}^3 \\&= 0,12516105... \text{ dm}^3 \\&= 0,00012516105... \text{ m}^3\end{aligned}$$

Lasketaan putken massa.

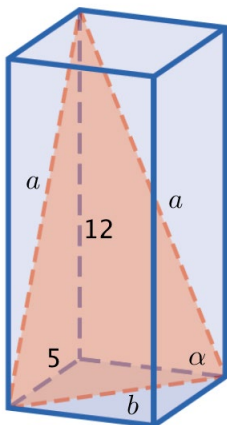
$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m}{V} && \text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}} \\m &= \rho V \\&= 2700 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,00012516105... \text{ m}^3 \\&= 0,337... \text{ kg} \\&\approx 0,34 \text{ kg}\end{aligned}$$

Vastaus

0,34 kg

K56

a) Piirretään kuva.



Muodostuu tasakylkinen kolmio.

b) Ratkaistaan kolmion kylkien pituus a .

$$a^2 = 5^2 + 12^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = -13 \text{ tai } a = 13$$

Pituus on positiivinen luku, joten $a = 13$.

Ratkaistaan kolmion kanta b .

$$b^2 = 5^2 + 5^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$b = -5\sqrt{2} \text{ tai } b = 5\sqrt{2}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $b = 5\sqrt{2}$.

c) Ratkaistaan kantakulman α suuruus.

$$13^2 = 13^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 74,21\dots^\circ \approx 74^\circ$$

Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.

Lasketaan huippukulman suuruus.

$$180^\circ - 2 \cdot 74,21\dots^\circ = 31,56\dots^\circ \approx 32^\circ$$

Vastaus

a) Kolmio on tasakylkinen.

b) 13, 13 ja $5\sqrt{2}$

c) 74° , 74° ja 32°

K57

Korkeus on 8,6 cm. Ilmaistaan tilavuus vastaavassa yksikössä.

$$2,0 \text{ dl} = 0,2 \text{ L} = 0,2 \text{ dm}^3 = 200 \text{ cm}^3$$

Ratkaistaan pohjan säde.

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = 200 \text{ cm}^3$$

$$h = 8,6 \text{ cm}$$

$$200 = \pi r^2 \cdot 8,6$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$r = -2,72... \text{ tai } r = 2,72...$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r = 2,72... \text{ cm}$.

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$A = 2\pi r h$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 2,72... \cdot 8,6$$

$$= 147,01...$$

$$\approx 150 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus

$$150 \text{ cm}^2$$

K58

- a) Lasketaan muovailuvahan tilavuus.

$$V = 3,0^3 = 27 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Pallon ja kuution tilavuudet ovat yhtä suuret. Ratkaistaan pallon säde.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$27 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = 1,86105...$$

$$\approx 1,9 \text{ (cm)}$$

- b) Verrataan pallon pinta-alaa kuution pinta-alaan.

$$\frac{A_p}{A_k} = \frac{4\pi r^2}{6a^2}$$

$$= \frac{4\pi \cdot 1,86105...^2}{6 \cdot 3^2}$$

$$= 0,80599...$$

$$= 80,599... \%$$

$$\approx 81 \%$$

Pinta-ala pienenee 19 %.

Vastaus

a) 1,9 cm

b) pienenee 19 %

K59

Lasi ja siinä oleva neste ovat yhdenmuotoiset suorat ympyräkartiot.

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

Ratkaistaan juoman tilavuus V .

$$\frac{V}{1,75} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$V = 0,21875$$

$$\approx 0,219 \text{ (dl)}$$

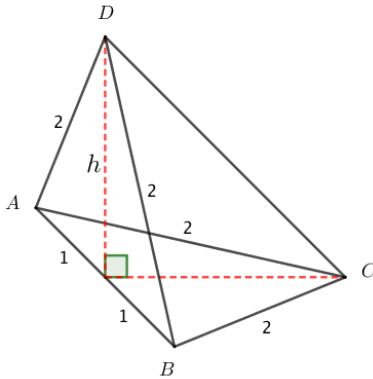
Vastaus

0,219 dl

K60

Pyramidin tilavuus on $V = \frac{1}{3} A_p h$.

Koska pohjan pinta-ala ei muutu, tilavuus on sitä suurempi, mitä korkeampi pyramidi on. Pyramidin korkeus on suurimmillaan kuvan tilanteessa.



Pystytahko ABD on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 2. Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$h = \sqrt{3} \quad \text{tai} \quad h = -\sqrt{3}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $h = \sqrt{3}$.

Pyramidin pohja ABC on tasasivuinen kolmio, jonka kanta on 2 ja korkeus $\sqrt{3}$.

Lasketaan pyramidin tilavuus.

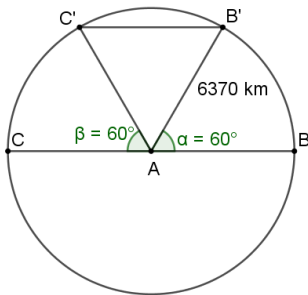
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} A_p h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \right) \cdot \sqrt{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Vastaus

1

K61

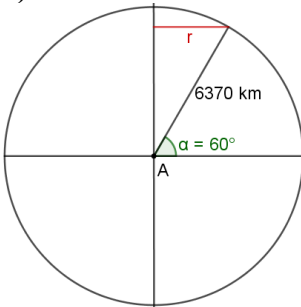
a) Piirretään kuva.



Helsinkiä ja Anchoragea (pisteet B' ja C') yhdistävän kaaren keskuskulman suuruus on 60° . Lasketaan kaaren pituus.

$$\begin{aligned} b &= \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \\ &= 6670,64... \\ &\approx 6670 \text{ (km)} \end{aligned}$$

b)



Ratkaistaan leveyspiirin 60° N säde.

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{6370} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = 3185 \text{ (km)}$$

Etäisyys on puolet leveyspiirin ympärysmitasta.

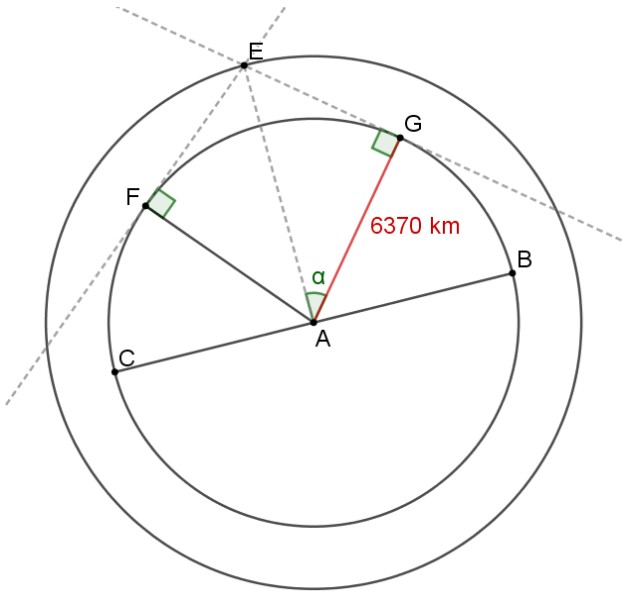
$$\begin{aligned} d &= \frac{2\pi \cdot 3185}{2} \\ &= 10\,005,97... \\ &\approx 10\,000 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Vastaus

a) 6670 km **b)** 10 000 km

K62

- a) Piirretään kuva. Satelliitti on pisteessä E . Satelliitin näkyvyysalue ulottuu pisteisiin F ja G .



Ratkaistaan kulman α suuruus.

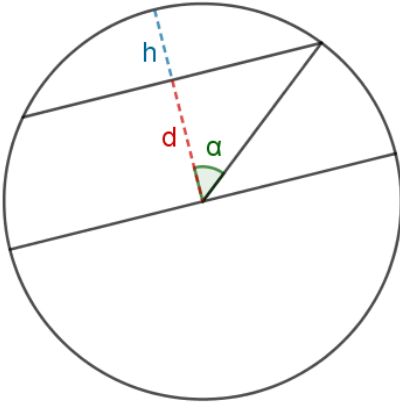
$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370 + 1200}$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{6370}{6370 + 1200}\right) = 32,70\dots^\circ$$

Lasketaan kulman BAG suuruus.

$$90^\circ - 32,70\dots^\circ = 57,29\dots^\circ \approx 57^\circ$$

Näkyvyysalue ulottuu leveyspiirille 57° N.

b) Piirretään kuva.



Lasketaan leveyspiirin kohtisuora etäisyys d päiväntasaajasta.

$$\cos 32,70\dots^\circ = \frac{d}{6370} \quad | \cdot 6370$$

$$d = 6370 \cdot \cos 32,70\dots^\circ$$

$$= 5360,22\dots \text{ (km)}$$

Lasketaan leveyspiirin kohtisuora etäisyys h pohjoisnavasta.

$$h = 6370 - 5360,22\dots = 1009,77\dots \text{ (km)}$$

Näkyvyysalue on muodoltaan pallokalotti. Lasketaan sen pinta-ala.

$$A = 2\pi rh$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 6370 \cdot 1009,77\dots$$

$$= 40\,415\,141,14\dots$$

$$\approx 40\,000\,000 \text{ (km}^2\text{)}$$

Näkyvyysalueen pinta-ala on $40\,000\,000 \text{ km}^2$.

Verrataan näkyvyysalueen pinta-alaa Maan pinta-alaan.

$$\frac{A}{A_M} = \frac{2\pi rh}{4\pi R^2}$$

$$= \frac{2\pi \cdot 6370 \cdot 1009,77\dots}{4\pi \cdot 6370^2}$$

$$= 0,0792\dots \approx 0,08 = 8 \%$$

Vastaus

a) 57° pohjoista leveyttä **b)** $40\,000\,000 \text{ km}^2$, 8%

K63

- a) Käytetään kuvan merkintöjä.

Kolmio GFE on suorakulmainen.

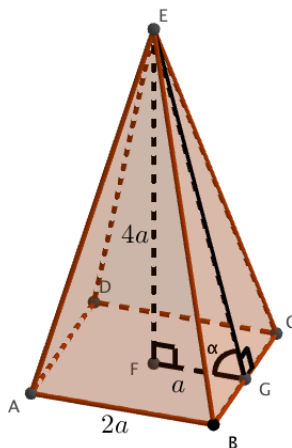
Kulma α on sivutahkon ja pohjan välinen kulma.

Ratkaistaan sen suuruus.

$$\tan \alpha = \frac{4a}{a}$$

$$\tan \alpha = 4$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1} 4 \\ &= 75,96...^\circ \\ &\approx 76,0^\circ\end{aligned}$$

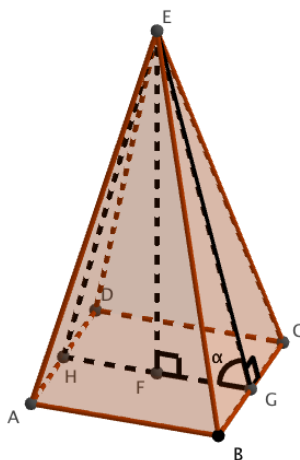


- b) Käytetään kuvan merkintöjä.

Kulma GEH on kahden vastakkaisen sivutahkon välinen kulma.

Kolmio GEH on tasakylkinen. Lasketaan huippukulman GEH suuruus.

$$\begin{aligned}180^\circ - 2 \cdot 75,96...^\circ \\ &= 28,08...^\circ \\ &\approx 28,1^\circ\end{aligned}$$



c) Käytetään kuvan merkintöjä.

Kulma β on sivusärmän ja pohjan välinen kulma.

Kolmio BGF on tasakylkinen ja suorakulmainen. Ratkaistaan sivun BF pituus.

$$BF^2 = a^2 + a^2$$

$$BF^2 = 2a^2$$

$$BF = a\sqrt{2} \quad \text{tai} \quad BF = -a\sqrt{2}$$

Pituus on positiivinen luku, joten

$$BF = a\sqrt{2}.$$

Kolmio BFE on suorakulmainen.

Ratkaistaan kulman β suuruus.

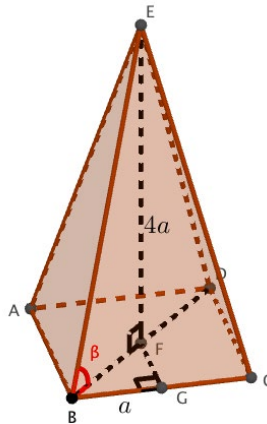
$$\tan \beta = \frac{4a}{a\sqrt{2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 70,5287\dots^\circ$$

$$\approx 70,5^\circ$$



d) Käytetään kuvan merkintöjä.

Kulma δ on sivusärmän ja pohjasärmän välinen kulma.

Kolmio GFE on suorakulmainen.
Ratkaistaan sivun GE pituus.

$$GE^2 = a^2 + (4a)^2$$

$$GE^2 = 17a^2$$

$$GE = a\sqrt{17} \quad \text{tai} \quad GE = -a\sqrt{17}$$

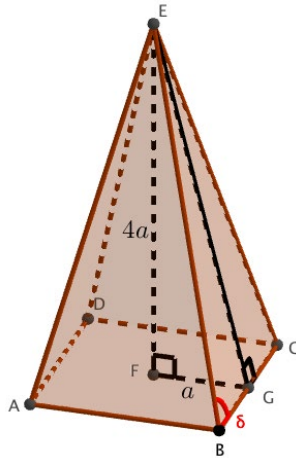
Pituus on positiivinen luku, joten
 $GE = a\sqrt{17}$.

Kolmio BGE on suorakulmainen.
Ratkaistaan kulman δ suuruus.

$$\tan \delta = \frac{\sqrt{17}a}{a}$$

$$\tan \delta = \sqrt{17}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \tan^{-1} \sqrt{17} \\ &= 76,3669...^\circ \\ &\approx 76,4^\circ \end{aligned}$$



Vastaus

- a) $76,0^\circ$
- b) $28,1^\circ$
- c) $70,5^\circ$
- d) $76,4^\circ$

K64

- a) Ilmaistaa tilavuus kuutiometreinä.

$$3000 \text{ L} = 3000 \text{ dm}^3 = 3 \text{ m}^3$$

Säiliön tilavuus on 3 m^3 ja pohjan säde $0,65 \text{ m}$.

Ratkaistaan säiliön pituus.

$$\pi \cdot 0,65^2 \cdot h = 3$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = 2,2601\dots$$

$$\approx 2,3 \text{ (m)}$$

- b) Öljysäiliön pääty on oheisessa kuvassa. Öljykerros on suora lieriö, jonka pohja on ympyräsegmentti (kuvassa sininen).

Ratkaistaan kulman α suuruus.

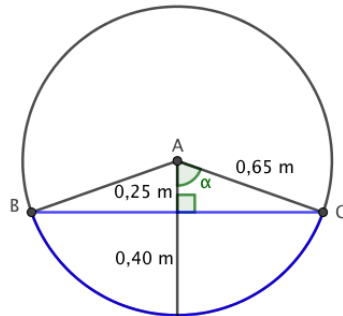
$$\cos \alpha = \frac{0,25}{0,65}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{0,25}{0,65}\right)$$

$$= 67,3801\dots^\circ$$

Keskuskulman BAC suuruus on

$$2 \cdot 67,380\dots^\circ = 134,760\dots^\circ.$$



Segmentin pinta-ala on sektorin pinta-alan ja kolmion pinta-alan erotus.

$$A_{seg} = A_{sek} - A_k$$

$$= \frac{134,760\dots^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 0,65^2 - \frac{1}{2} \cdot 0,65 \cdot 0,65 \cdot \sin 134,760\dots^\circ$$

$$= 0,34686\dots \text{ (m}^2\text{)}$$

Lasketaan öljyn tilavuus.

$$V = A_p h$$

$$= 0,34686\dots \cdot 2,2601\dots$$

$$= 0,78397\dots \text{ (m}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

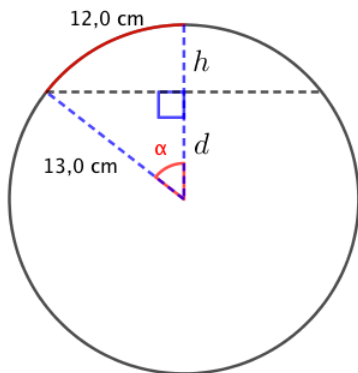
$$0,78397\dots \text{ m}^3 = 783,97\dots \text{ dm}^3 = 783,97\dots \text{ L} \approx 784 \text{ L}$$

Vastaus

- a) 2,3 m b) 784 L

K65

Piirretään kaksiulotteinen mallikuva.



Kaaren pituus on 12,0 cm. Ratkaistaan keskuskulman α suuruus.

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 13,0 = 12,0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 52,8884...^\circ$$

Ratkaistaan etäisyys d .

$$\cos 52,8884...^\circ = \frac{d}{13,0} \quad | \cdot 13,0$$

$$d = 13,0 \cdot \cos 52,8884...^\circ$$

$$= 7,8438... \text{ (cm)}$$

Lasketaan korkeus h .

$$h = 13,0 - 7,8438... = 5,156... \text{ (cm)}$$

Ympyrän sisään jäävä alue on muodoltaan pallokalotti. Lasketaan sen pinta-ala.

$$A = 2\pi rh$$

$$= 2\pi \cdot 13,0 \cdot 5,1556...$$

$$= 421,16...$$

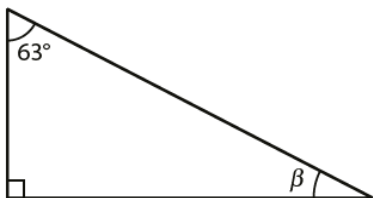
$$\approx 420 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus

$$420 \text{ cm}^2$$

A1

a)

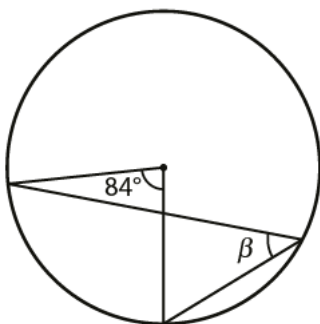


Kolmion kulmien summa on 180° .

Ratkaistaan kulman β suuruus.

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$$

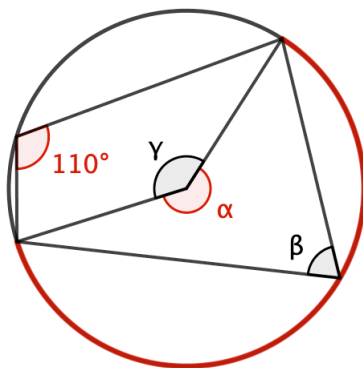
b)



Samaa kaarta vastaavan kehäkulman suuruus on puolet vastaavasta keskuskulman suuruudesta.

$$\beta = \frac{84^\circ}{2} = 42^\circ$$

- c) Kulmat 110° ja α ovat samaa kaarta vastaavat kehäkulma ja keskuskulma.



Lasketaan kulman α suuruus.

$$\alpha = 2 \cdot 110^\circ = 220^\circ$$

Kulmat α ja γ muodostavat täysikulman.

$$\gamma = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

Kulmat γ ja β ovat samaa kaarta vastaavat keskuskulma ja kehäkulma.

$$\beta = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

Vastaus

- a) $\beta = 27^\circ$
- b) $\beta = 42^\circ$
- c) $\beta = 70^\circ$

A2

- a) Matka x maastossa ratkeaa verrantoyhtälöstä.

$$\frac{33 \text{ mm}}{x} = \frac{1}{400\,000} \quad \text{Vastinpituuksien suhde on mittakaava.}$$
$$x = 13\,200\,000 \text{ mm}$$

Matka maastossa on $13\,200\,000 \text{ mm} = 13,2 \text{ km} \approx 13 \text{ km}$.

- b) Myös peruskartan matka y ratkeaa verrantoyhtälöstä.
Ilmoitetaan todellinen matka millimetreissä.

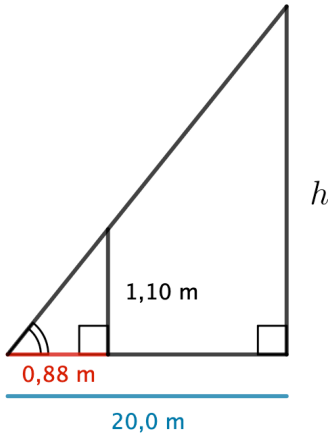
$$\frac{y}{13\,200\,000 \text{ mm}} = \frac{1}{20\,000}$$
$$20\,000y = 13\,200\,000 \text{ mm}$$
$$y = 660 \text{ mm} = 66 \text{ cm}$$

Vastaus

- a) 13 km
b) 66 cm

A3

Lipputangon, aidantolpan ja näiden varjojen muodostamat kolmiot ovat yhdenmuotoisia kk-lauseen perusteella: molemmissa on suora kulma ja yhteinen terävä kulma (aurion säteiden ja maanpinnan välinen kulma).



Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan lipputangon korkeus h .

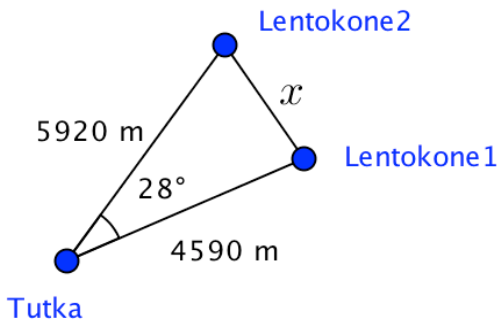
$$\frac{h}{20,0} = \frac{1,10}{0,88}$$
$$h = 25,0 \text{ (m)}$$

Lipputangon korkeus on 25,0 m.

Vastaus

25,0 m

A4



Lentokoneiden välinen etäisyys x saadaan kosinilauseella.

$$\begin{aligned}x^2 &= 5920^2 + 4590^2 - 2 \cdot 5920 \cdot 4590 \cdot \cos 28^\circ \\&= 8\,130\,183,29... \text{ (m}^2\text{)} \\x &= (\pm)\sqrt{8\,130\,183,29...} = 2851,34... \approx 2850 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Lentokoneiden välinen etäisyys on 2850 m.

Vastaus

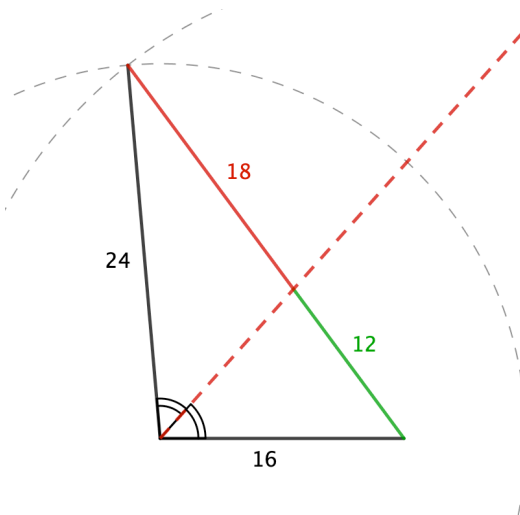
2850 m

A5

- a) Keskijanat jakavat toisensa suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Tutkittu keskijana jakautuu siis osiin, joiden pituudet ovat

$$\frac{1}{3} \cdot 36 = 12 \quad \text{ja} \quad \frac{2}{3} \cdot 36 = 24.$$

- b) Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma.



Suurimman kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun osiin, joiden pituudet ovat 12 ja 18.

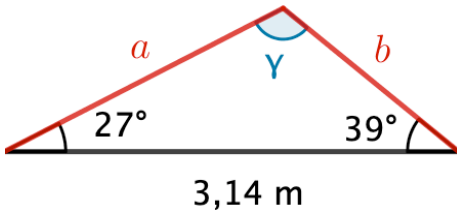
Vastaus

- a) 12 ja 24
b) 12 ja 18

A6

- a) Lasketaan kolmion kolmannen kulman suuruus.

$$\gamma = 180^\circ - 27^\circ - 39,0^\circ = 114^\circ$$



Lasketaan sivun a pituus sinilauseella.

$$\frac{a}{\sin 39,0^\circ} = \frac{3,14}{\sin 114^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a = 2,163... \approx 2,16$$

Ratkaistaan sivun b pituus sinilauseella.

$$\frac{b}{\sin 27^\circ} = \frac{3,14}{\sin 114^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$b = 1,560... \approx 1,56$$

- b) Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 1,56... \cdot \sin 39^\circ$$

$$= 1,54...$$

$$\approx 1,54 \text{ (m}^2\text{)}$$

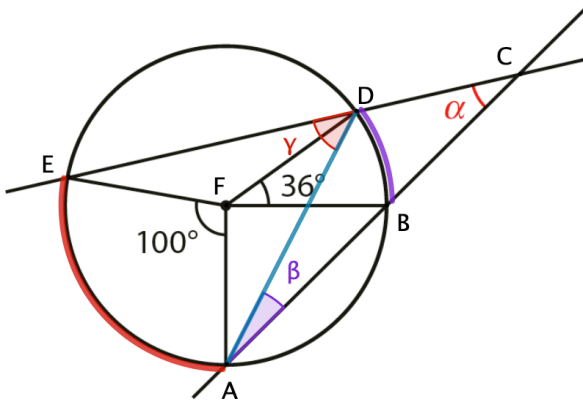
Kolmion pinta-ala on $1,54 \text{ m}^2$.

Vastaus

a) $1,56 \text{ m}$ ja $2,16 \text{ m}$

b) $1,54 \text{ m}^2$

A7



Lasketaan kulman $\gamma = \angle EDA$ suuruus. γ on 100° :n keskuskulmaa vastaava kehäkulma.

$$\gamma = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

Lasketaan kulman $\beta = \angle CAD$ suuruus. β on 36° :n keskuskulmaa vastaava kehäkulma.

$$\beta = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$$

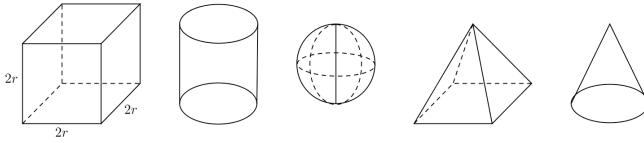
Lasketaan kulman α suuruus. Kolmion kulmien summa on 180° .
Kolmion ACD kulmat ovat α , $\beta = 18^\circ$ ja $180^\circ - \gamma = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

$$\alpha = 180^\circ - 130^\circ - 18^\circ = 32^\circ$$

Vastaus

$$\alpha = 32^\circ$$

A8



Olkoon kuution muotoisen pakkauslaatikon sisäsärmän pituus $2r$.

Tapa1 Verrataan kappaleiden tilavuuksia niitä laskematta.

Pakkauslaatikkoon juuri ja juuri mahtuvan

- kuution särmä on $2r$
- suoran ympyrälieriön korkeus on $2r$ ja pohjan halkaisija $2r$
- pallon halkaisija on $2r$
- säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on $2r$ ja pohjana on neliö, jonka sivun pituus on $2r$
- suoran ympyräkartion pohjan halkaisija on $2r$ ja korkeus $2r$.

Kappaleiden massat (painot) suhtautuvat kuten niiden tilavuudet, koska umpinaiset kappaleet on valmistettu samasta materiaalista.

- Kuutio on suurin, pakkauslaatikkoon ei jää yhtään tyhjää tilaa.
- Suora ympyrälieriö mahtuu kuution sisään.
- Pallo mahtuu suoran ympyrälieriön sisään.
- Suora ympyräkartio mahtuu pyramidin sisään.

Järjestys on palloa ja pyramidia lukuunottamatta pääteltävissä suoraan.

Verrataan pallon ja pyramidin tilavuuksien lausekkeita keskenään.

Pallon tilavuus on $V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4,2 \cdot r^3$.

Pyramidin tilavuus on

$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} h = \frac{1}{3} \cdot (2r)^2 \cdot 2r = \frac{8}{3} r^3 \approx 2,7 \cdot r^3.$$

Siis $V_{\text{pyramidi}} < V_{\text{pallo}}$, joten pyramidi on massaltaan palloa kevyempi.

Kappaleiden massat pienimmästä suurimpaan ovat:

1. suora ympyräkartio
2. säännöllinen nelisivuinen pyramidi
3. pallo
4. suora ympyrälieriö
5. kuutio

Vastaus suora ympyräkartio, säännöllinen nelisivuinen pyramidi, pallo, suora ympyrälieriö, kuutio

Tapa 2

Lasketaan kaikkien kappaleiden tilavuudet ja verrataan saatuja lausekkeita.

Kuutio

Kuution särmä on $2r$.

$$V_{kuutio} = (2r)^3 = 8r^3$$

Pallo

Pallon halkaisija on $2r$, joten säde on r .

$$V_{pallo} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \approx 4,2r^3$$

Suora ympyräkartio

Suoran ympyräkartion pohjan halkaisija on $2r$ ja korkeus $2r$.

$$V_{kartio} = \frac{1}{3}A_p h = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3}\pi r^3 \approx 2,1r^3$$

Nelisivuinen pyramidi

Säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on $2r$ ja pohjana on neliö, jonka sivun pituus on $2r$.

$$V_{pyramidi} = \frac{1}{3}A_p h = \frac{1}{3}(2r)^2 \cdot 2r = \frac{8}{3}r^3 \approx 2,7r^3$$

Suora ympyrälieriö

Suoran ympyrälieriön korkeus on $2r$ ja pohjan halkaisija $2r$.

$$V_{lieriö} = A_p h = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \approx 6,3r^3$$

Kappaleiden massat (painot) suhtautuvat kuten niiden tilavuudet, koska umpinaiset kappaleet on valmistettu samasta materiaalista.

Kappaleet suuruusjärjestyksessä pienimmästä suurimpaan lueteltuna ovat

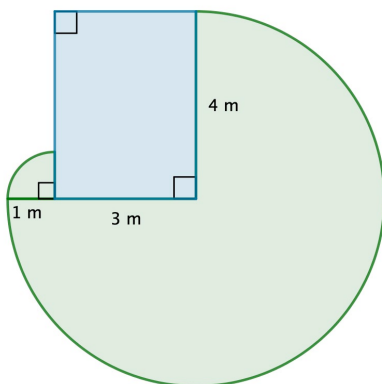
1. suora ympyräkartio
2. säännöllinen nelisivuinen pyramidi
3. pallo
4. suora ympyrälieriö
5. kuutio

Vastaus

suora ympyräkartio, säännöllinen nelisivuinen pyramidi, pallo, suora ympyrälieriö, kuutio

A9

a)

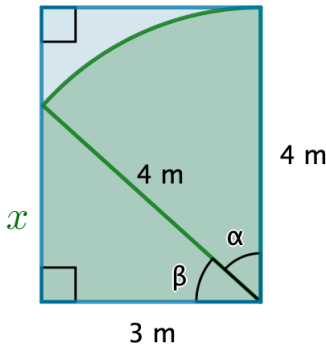


Alue muodostuu kahdesta ympyräsektorista: neljännesympyrästä, jonka säde on 1 m, sekä säteeltään 4-metrinen ympyrän osasta, josta on poistettu neljännesympyrä.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 + \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 \\ &= \frac{1}{4} \pi + 12\pi \\ &= \frac{49}{4} \pi \approx 38 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Lammas ylettyy liikkumaan 38 m^2 laajuiselle alueelle.

b)



Lammas ylettyy liikkumaan alueella, joka koostuu ympyräsektorista ja suorakulmaisesta kolmiosta.

Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + 3^2 = 4^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \sqrt{7} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{7}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = \sqrt{7}$.

$$\text{Kolmion pinta-ala } A_k = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{7}.$$

Ratkaistaan kulma β ja sen avulla kulma α .

$$\cos \beta = \frac{3}{4}$$

$$\beta = \cos^{-1} \frac{3}{4} = 41,409...^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 41,409...^\circ = 48,590...^\circ$$

$$\text{Sektorin pinta-ala } A_s = \frac{48,590...^\circ}{360} \pi \cdot 4^2$$

Alueen koko pinta-ala on

$$A = A_k + A_s = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{7} + \frac{48,590...^\circ}{360} \pi \cdot 4^2 = 10,753... \approx 11 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Lammas ylettyy liikkumaan 11 m^2 laajuisella alueella.

Vastaus

a) 38 m^2

b) 11 m^2

A10

Olkoon pallon tilavuus aluksi V_1 ja pinta-ala A_1 . Pienennyksen jälkeen pallon tilavuudesta on jäljellä $100\% - 25\% = 75\% = 0,75$.

Pienennetyn pallon tilavuus on $V_2 = 0,75V_1$ ja pinta-ala A_2 .

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan mittakaava k .

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_1} &= k^3 & | \quad V_2 &= 0,75V_1 \\ \frac{0,75V_1}{V_1} &= k^3 \\ k &= \sqrt[3]{0,75}\end{aligned}$$

Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{A_2} &= k^2 \\ &= \sqrt[3]{0,75}^2 \\ &= 0,8254... \\ &= 82,54... \%\end{aligned}$$

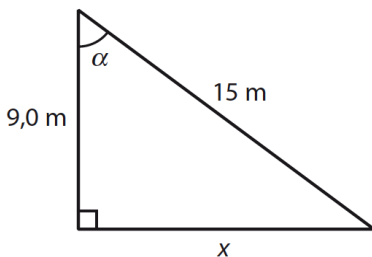
Pinta-ala pienenee $100\% - 82,54... \% = 17,45... \% \approx 17\%$.

Vastaus

17 %

B1

a)



$$\cos \alpha = \frac{9,0}{15}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{9,0}{15}\right) = 53,13...^\circ \approx 53^\circ$$

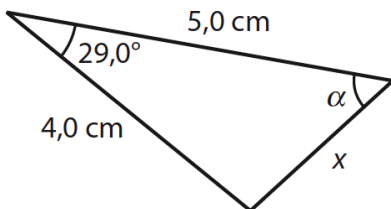
$$15^2 = x^2 + 9,0^2$$

$$x^2 = 15^2 - 9,0^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144} = 12 \text{ tai } x = -\sqrt{144} = -12$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = 12$ m.

b)



$$\begin{aligned} x^2 &= 4,0^2 + 5,0^2 - 2 \cdot 4,0 \cdot 5,0 \cdot \cos 29,0^\circ \\ &= 6,015... \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{6,015...} \text{ tai } x = -\sqrt{6,015...}$$

Pituus on positiivinen luku, joten

$$x = \sqrt{6,015...} \text{ cm} = 2,45... \text{ cm} \approx 2,5 \text{ cm}.$$

$$\frac{4,0}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin 29,0^\circ}$$

$$x \sin \alpha = 4,0 \cdot \sin 29,0^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{4,0 \cdot \sin 29,0^\circ}{x} \quad | \quad x = 2,45...$$

$$= \frac{4,0 \cdot \sin 29,0^\circ}{2,45...}$$

$$= 0,790...$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,790... = 52,24...^\circ$$

$$\text{tai } \alpha = 180^\circ - 52,24...^\circ = 127,75...^\circ$$

Tarkistetaan kelpaavatko saadut kulmat annetun kolmion kulmiksi laskemalla kolmion kolmas kulma β .

- Kun $\alpha = 52,24...^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 29,0^\circ - 52,24...^\circ = 98,75...^\circ$ (kelpaa kolmion kulmaksi)
- Kun $\alpha = 127,75...^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 29,0^\circ - 127,75...^\circ = 23,24...^\circ$ (kelpaa kolmion kulmaksi)

Tapaus $\alpha = 127,75...^\circ$ ei kuitenkaan kelpaa tehtävän ratkaisuksi, koska α ei ole kolmion suurin kulma (se ei ole pisimmän sivun vastainen kulma).

Kysytyn kulman on siis oltava 52° .

Vastaus

a) $x = 12 \text{ m}$, $\alpha \approx 53^\circ$

b) $x = 2,5 \text{ cm}$, $\alpha \approx 52^\circ$

B2

Ville söi neljä isoa lettua, joiden säde oli $\frac{22}{2} = 11$ cm.

Leo söi yksitoista pientä lettua, joiden säde oli $\frac{8}{2} = 4$ cm.

Lettujen massa on suoraan verrannollinen niiden pinta-alaan, koska letut ovat yhtä paksuja. Verrataan syötyjen lettujen pinta-aloja.

$$\begin{aligned}\frac{\text{Villen syömien lettujen pinta-ala}}{\text{Leon syömien lettujen pinta-ala}} &= \frac{4A_{iso}}{11A_{pieni}} \\ &= \frac{4 \cdot \pi \cdot 11^2}{11 \cdot \pi \cdot 4^2} \\ &= 2,75 \\ &= 275 \%\end{aligned}$$

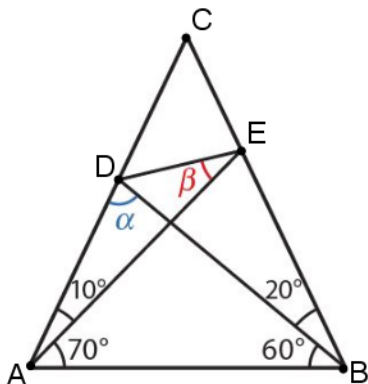
Villen syömät letut painoivat $275\% - 100\% = 175\%$ enemmän.

Vastaus

175 %

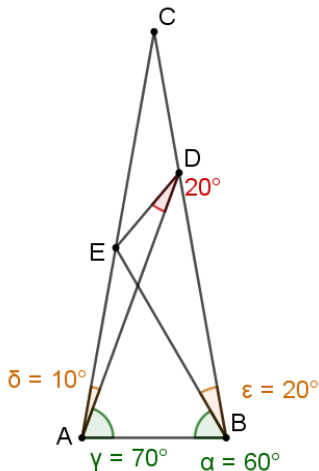
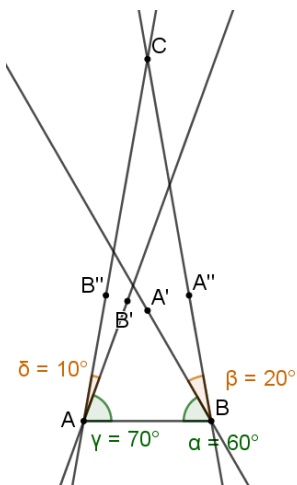
B3

a) Lasketaan kulman α suuruus kolmiosta ABD .



$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ - 10^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

b) Piirretään ensin kantakulmat. Täydennetään loput kuviosta ja mitataan kysytty kulma β .



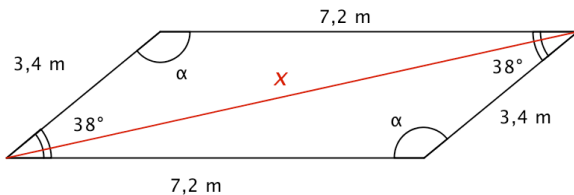
Vastaus

a) $\alpha = 40^\circ$

b) $\beta = 20^\circ$

B4

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Pidempi lävistäjä on suunnikkaan suuremman kulman vastainen lävistäjä.



Lasketaan kulman α suuruus.

$$\alpha = \frac{180^\circ - 2 \cdot 38^\circ}{2} = 142^\circ$$

Ratkaistaan pidemmän lävistäjän pituus x kosinilauseella.

$$x^2 = 3,4^2 + 7,2^2 - 2 \cdot 3,4 \cdot 7,2 \cdot \cos 142^\circ \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = -10,09... \text{ tai } x = 10,09...$$

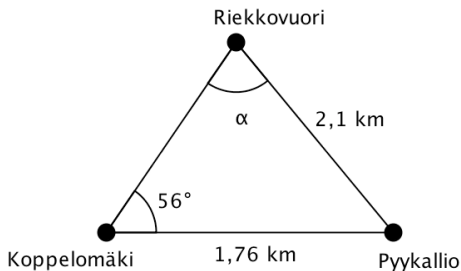
Pituus on positiivinen, joten $x = 10,09... \text{ m} \approx 10 \text{ m}$.

Pidemmän lävistäjän pituus on 10 m.

Vastaus

10 m

B5



Sinilause:

$$\frac{1,76}{\sin \alpha} = \frac{2,1}{\sin 56^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\alpha = 44,01...^\circ \text{ tai } \alpha = 135,98...^\circ$$

Tarkistetaan kelpaavatko saadut kulmat laskemalla kolmion kolmas kulma β .

- Kun $\alpha = 44,01...^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 56^\circ - 44,01...^\circ = 79,98...^\circ$.
Kelpaa kolmion kulmaksi.
- Kun $\alpha = 135,98...^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 56^\circ - 135,98...^\circ = -11,98...^\circ$.
Ei kelpaa kolmion kulmaksi.

Siis Koppelomäen ja Pyykallion väli näkyy $44,01...^\circ \approx 44^\circ$ kulmassa.

Vastaus

44°

B6

Lasketaan keilapallon tilavuus kuutiodesimetreinä.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \pi r^3 & \left| \quad r &= \frac{26,0 \text{ cm}}{2} = 13,0 \text{ cm} = 1,30 \text{ dm} \right. \\ &= \frac{4}{3} \pi \cdot 1,30^3 \\ &= 9,202... \text{ (dm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Lasketaan keilapallon massa.

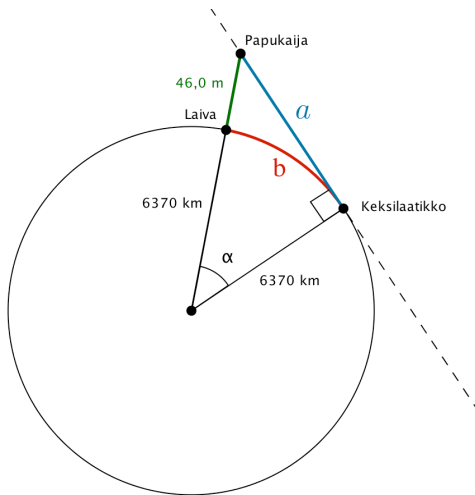
$$\begin{aligned} m &= \rho V & \left| \quad \rho &= 19,32 \text{ kg/dm}^3 \right. \\ &= 19,32 \cdot 9,202... & \left| \quad V &= 9,202... \text{ dm}^3 \right. \\ &= 177,797... \\ &\approx 178 \text{ (kg)} \end{aligned}$$

Tavaravaaka näytti keilapallon painoksi 178 kg.

Vastaus

178 kg

B7



- a-kohdassa kysytään pitkin tangenttisuoraa mitattua papukaijan ja keksilaatikon välistä etäisyyttä a .
- b-kohdassa kysytään ympyräkaaren pituutta b .

a) Lasketaan etäisyys a Pythagoraan lauseella.

Hypotenuusan pituus on $6370 \text{ km} + 46,0 \text{ m} = 6370,046 \text{ km}$.

$$6370,046^2 = 6370^2 + a^2$$

$$a^2 = 6370,046^2 - 6370^2 = 586,04\dots$$

$$a = \sqrt{586,04\dots} \quad \text{tai} \quad a = -\sqrt{586,04\dots}$$

Pituus on positiivinen luku, joten

$$a = \sqrt{586,04\dots} = 24,208306\dots \approx 24,2 \text{ (km)}$$

b) Lasketaan ensin keskuskulma α .

$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370,046} = 0,999992...$$
$$\alpha = \cos^{-1} 0,999992... = 0,2177...^{\circ}$$

Lasketaan keskuskulmaa α vastaavan ympyräkaaren pituus b .

$$b = \frac{\alpha}{360^{\circ}} \cdot 2\pi \cdot 6370$$
$$= \frac{0,2177...^{\circ}}{360^{\circ}} \cdot 2\pi \cdot 6370$$
$$= 24,208190... \approx 24,2 \text{ (km)}$$

c) Verrataan saatuja etäisyyksiä a ja b .

$$a - b = 24,208306... \text{ km} - 24,208190... \text{ km}$$
$$= 0,000116... \text{ km}$$
$$= 11,6... \text{ cm} \approx 10 \text{ cm}$$

Etäisyyksillä on eroa noin 10 cm.

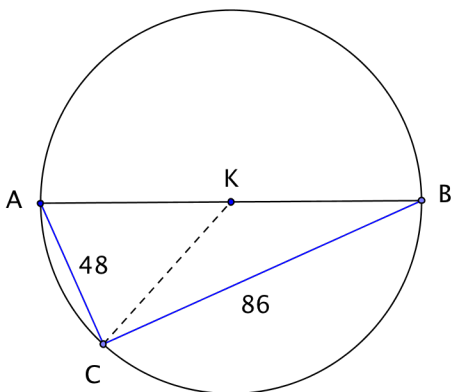
Huomaa: lähtöarvojen mittaustarkkuus asettaa tämän c-kohdan päätelmän hieman kyseenalaiseksi.

Vastaus

- a)** 24,2 km
- b)** 24,2 km
- c)** noin 10 cm

B8

a)



Merkitään kalastajan istuinpaikkaa kirjaimella C , saaren päätepisteitä kirjaimilla A ja B sekä saaren keskellä olevaa kiveä kirjaimella K .

Koska kiven etäisyydet saaren päistä ja kalastajasta ovat yhtä suuret, pisteet A , B ja C ovat K -keskisen ympyrän kehällä.

Jana AB on ympyrän halkaisija, kulma C on puoliympyrän sisältämä kehäkulma, joten kulma C on suora kulma.

Kalastaja näkee saaren 90° kulmassa.

b) Saari AB on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa

$$AB = \sqrt{48^2 + 8^2} = 10\sqrt{97} = 98,4885\dots \approx 98 \text{ (m)}$$

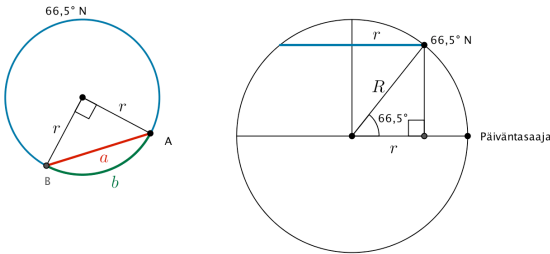
Saaren pituus on 98 m

Vastaus

a) 90°

b) 98 m

B9



Lasketaan pohjoisen napapiirin $66,5^\circ \text{ N}$ säde.

$$\cos 66,5^\circ = \frac{r}{R}$$

$$\begin{aligned} r &= R \cos 66,5^\circ & | & R = 6371 \text{ km} \\ &= 6371 \cdot \cos 66,5^\circ \\ &= 2540,430... \text{ (km)} \end{aligned}$$

- a) Pisteiden A ja B välisen tunnelin pituus on kantana suorakulmaisessa tasakylkisessä kolmiossa, jonka kylkenä on napapiirin säde r .

$$\begin{aligned} a^2 &= r^2 + r^2 \\ &= 2r^2 & | & r = 2540,430... \text{ km} \end{aligned}$$

$$a = (\pm)\sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r = \sqrt{2} \cdot 2540,430... = 3592,71... \approx 3593 \text{ (km)}$$

- b) Lyhyemmän napapiirin kaaren pituus:

$$b = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2540,430... = 3990,49... \approx 3990 \text{ (km)}$$

Vastaus

a) 3593 km

b) 3990 km

HUOMAA:

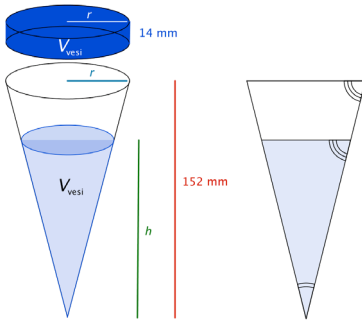
Voi myös tulkita vastauksen tarkkuuden 90° asteen kulman mukaisesti 2 merkitsevän numeron tarkkuudella:

Vastaus

a) 3600 km

b) 4000 km

B10



Pystyssä, kärjellään seisovan suoran ympyräkartion poikkileikkaukseen syntyy kaksi tasakylkistä kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoiset (kk: huippukulma yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}} = \left(\frac{h}{152} \right)^3$$

$$h^3 = \frac{V_{\text{vesi}} \cdot 152^3}{V_{\text{kartio}}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{V_{\text{vesi}} \cdot 152^3}{V_{\text{kartio}}}} = 152 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}}}$$

Toisaalta ympyräkartiosta olevan veden tilavuus on sama kuin r -säteisen suoran ympyrälieriön tilavuus, jossa r on kartion yläosan säde.

$$V_{\text{vesi}} = A_p h = \pi r^2 \cdot 14$$

Lasketaan kartion tilavuuden ja veden tilavuuksien suhde.

$$\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}} = \frac{\cancel{\pi r^2} \cdot 14}{\frac{1}{3} \cancel{\pi r^2} \cdot 152} = \frac{14}{\frac{1}{3} \cdot 152} = \frac{3 \cdot 14}{152} = \frac{42}{152}$$

Nyt saadaan laskettua kysytty korkeus h .

$$h = 152 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}}} = 152 \cdot \sqrt[3]{\frac{42}{152}} = 99,002... \approx 99 \text{ (mm)}$$

Koska $99 \text{ mm} \leq 152 \text{ mm}$, kaikki satanut vesi mahtuu kartioon.

Vesi nousee kartiossa 99 mm korkeuteen.

Vastaus

99 mm