

8.1

Lukujen 0 ja 100 keskiarvo on 50, joten aloitetaan kysymyksellä ”Onko luku välillä $[0, 50]$?”, ja jatketaan esimerkin mukaisesti riippuen siitä, onko vastaus kyllä vai ei. Esimerkiksi jos arvattava luku olisi 23, keskustelun kuluessa arvot a , b ja c vaihtelisivat seuraavasti:

	a	b	c	Onko luku välillä $[a, c]$?
1.	0	100	50	Kyllä
2.	0	50	25	Kyllä
3.	0	25	12,5	Ei
4.	12,5	25	18,75	Ei
5.	18,75	25	21,875	Ei
6.	21,875	25	23,4375	Kyllä
7.	21,875	23,4375	22,65625	Ei
8.	22,65625	23,4375		

Lukujen 22,65625 ja 23,4375 välissä on vain yksi kokonaisluku, ja se on 23.

Luku 23 löytyy seitsemällä kysymyksellä.

8.2

Kyseessä on Eratostheneen seula, joka etsii kaikki lukua 100 pienemmät alkuluvut.

Kirjoita luvut 2, 3, ... , 100 taulukkoon.

Aseta $a = 2$.

Korosta lukua 2.

Yliviivaa lukua 2 suuremmat 2:n monikerrat.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Aseta a :ksi pienin jäljellä oleva luku. $\Rightarrow a = 3$.

Onko $3 > 10$?

Ei.

Korosta lukua 3.

Yliviivaa lukua 3 suuremmat 3:n monikerrat.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Aseta a :ksi pienin jäljellä oleva luku. $\Rightarrow a = 5$.

Onko $5 > 10$?

Ei.

Korosta lukua 5.

Yliviivaa lukua 5 suuremmat 5:n monikerrat.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Aseta a :ksi pienin jäljellä oleva luku. $\Rightarrow a = 7$.

Onko $7 > 10$?

Ei.

Korosta lukua 7.

Yliviivaa lukua 7 suuremmat 7:n monikerrat.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Aseta a :ksi pienin jäljellä oleva luku. $\Rightarrow a = 13$.

Onko $13 > 10$?

On.

Lopetus.

8.3

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 0x^2 + x - 3 \\ - \quad \quad 3x^2 - 5x + 2 \\ \hline 4x^3 - 3x^2 + 6x - 5 \end{array}$$

1. Asetetaan polynomien samanmuotoiset termit allekkain.
Jos jonkin asteen termi puuttuu, merkitään sen kertoimeksi nolla.
2. Vähennetään ylemmästä termistä alempi.

8.4

a) Lasketaan allekkain.

$$\begin{array}{r} 810 \\ 3908 \\ - 452 \\ \hline 3456 \end{array}$$

b) Lasketaan allekkain.

$$\begin{array}{r} 3908 \\ . \quad 452 \\ \hline 111 \\ 7816 \quad \cancel{1} \quad \cancel{1} \\ 19540 \quad \cancel{4} \quad \cancel{4} \quad \cancel{1} \\ 15632 \quad \cancel{3} \quad \cancel{3} \quad \cancel{1} \\ \hline 1766416 \end{array}$$

Vastaus

a) 3456

b) 1 766 416

8.5

a) Lasketaan allekkain.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - x + 4 \\ - \quad \quad 3x - 5 \\ \hline 6x^2 - 4x + 9 \end{array}$$

b) Lasketaan allekkain.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - x + 4 \\ \cdot \quad \quad 3x - 5 \\ \hline -30x^2 + 5x - 20 \\ 18x^3 - 3x^2 + 12x \\ \hline 18x^3 - 33x^2 + 17x - 20 \end{array}$$

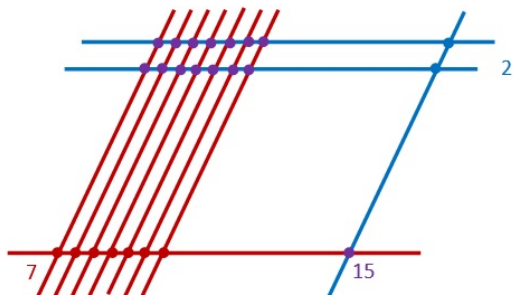
Vastaus

a) $6x^2 - 4x + 9$

b) $18x^3 - 33x^2 + 17x - 20$

8.6

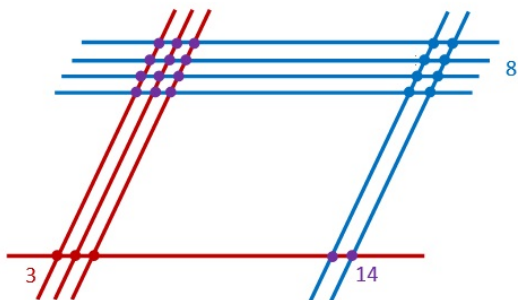
- a) Esitetään luku $71 = 7 \cdot 10 + 1$ piirtämällä 7 kymmenviivaa ja 1 ykkösviiva pystysuuntaan ja luku $12 = 1 \cdot 10 + 2$ piirtämällä 1 kymmenviiva ja 2 ykkösviivaa vaakasuuntaa.



Satoja on 7, kymmeniä 15 ja ykkösiä 2.

Tulon arvo on $71 \cdot 12 = 700 + 150 + 2 = 852$.

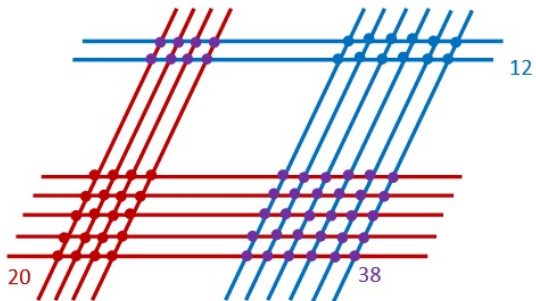
- b) $32 = 3 \cdot 10 + 2$ ja $14 = 1 \cdot 10 + 4$.



Satoja on 3, kymmeniä 14 ja ykkösiä 8.

Tulon arvo on $32 \cdot 14 = 300 + 140 + 8 = 448$.

c) $46 = 4 \cdot 10 + 6$ ja $52 = 5 \cdot 10 + 2$.



Satoja on 20, kymmeniä 38 ja ykkösiä 12.

Tulon arvo on $46 \cdot 52 = 2000 + 380 + 12 = 2392$.

Vastaus

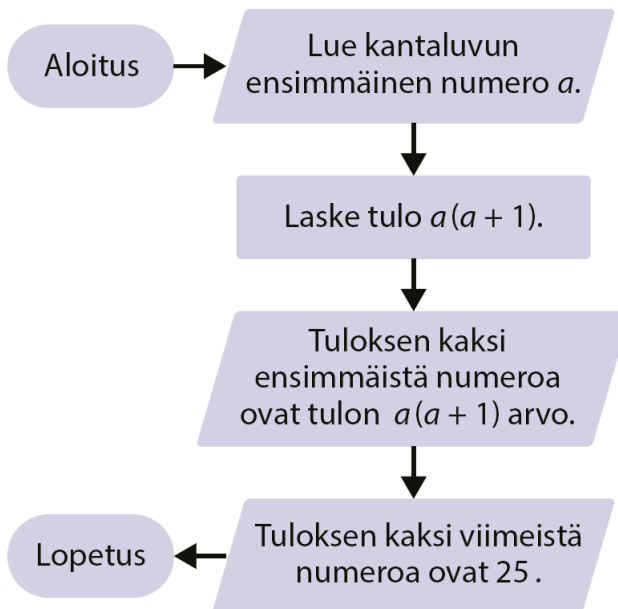
- a) 852
- b) 448
- c) 2392

8.7

- a) Luvun kaksi ensimmäistä numeroa ovat $7 \cdot 8 = 56$
ja kaksi viimeistä numeroa $5^2 = 25$.

Siis $75^2 = 5625$.

b)



Vastaus

- a) $75^2 = 5625$

8.8

Esimerkiksi:

1. Vähennetään yhtälöstä molemmilta puolilta luvut cx ja b .
2. Erotetaan termien ax ja cx yhteinen tekijä.
Lasketaan muuttujan x kertoimen $a - c$ arvo.
3. Jos $a - c \neq 0$, niin jaetaan yhtälön molemmat puolet kertoimella $a - c$.
Ratkaisu on $x = \frac{d - b}{a - c}$.
4. Jos $a - c = 0$ ja $d - b \neq 0$, niin yhtälöllä ei ole ratkaisuja.
5. Jos $a - c = 0$ ja $d - b = 0$, niin yhtälön toteuttavat kaikki luvut.

8.9

Määritellään laskimeen $g(x) = \sqrt{x+1}$.

Lasketaan $g(1) \approx 1,414$.

1,414 ei ole kolmen desimaalin tarkkuudella 1.

Lasketaan $g(1,414) \approx 1,554$.

1,554 ei ole kolmen desimaalin tarkkuudella 1,414.

Lasketaan $g(1,554) \approx 1,598$.

1,598 ei ole kolmen desimaalin tarkkuudella 1,554.

Lasketaan $g(1,598) \approx 1,612$.

1,612 ei ole kolmen desimaalin tarkkuudella 1,598.

Lasketaan $g(1,612) \approx 1,616$.

1,616 ei ole kolmen desimaalin tarkkuudella 1,612.

Lasketaan $g(1,616) \approx 1,617$.

1,617 ei ole kolmen desimaalin tarkkuudella 1,616.

Lasketaan $g(1,617) \approx 1,618$.

1,618 ei ole kolmen desimaalin tarkkuudella 1,617.

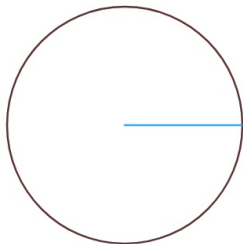
Lasketaan $g(1,618) \approx 1,618$.

1,618 on kolmen desimaalin tarkkuudella 1,618.

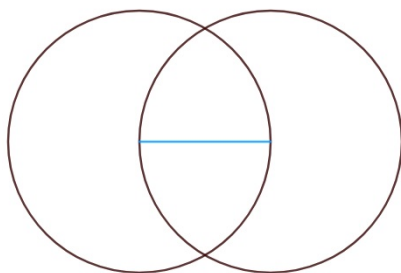
Siis $x \approx 1,618$.

8.10

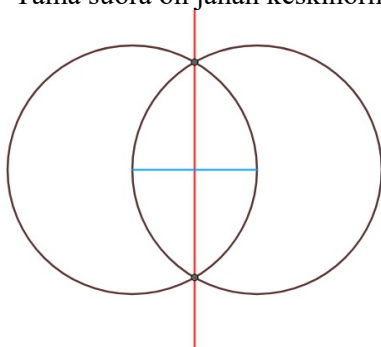
- a) Aloitetaan piirtämällä harpilla ympyrä, jonka keskipiste on janan päätepiste, ja jonka säde on janan mittainen.



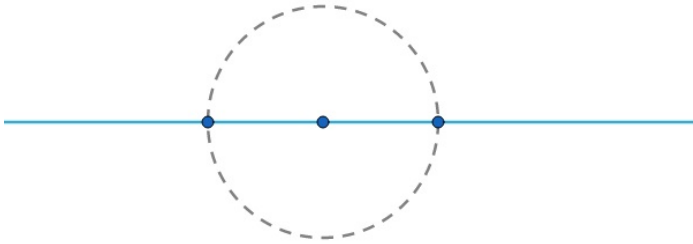
Piirretään sen jälkeen janan toiseen päätepisteeseen toinen samanlainen ympyrä.



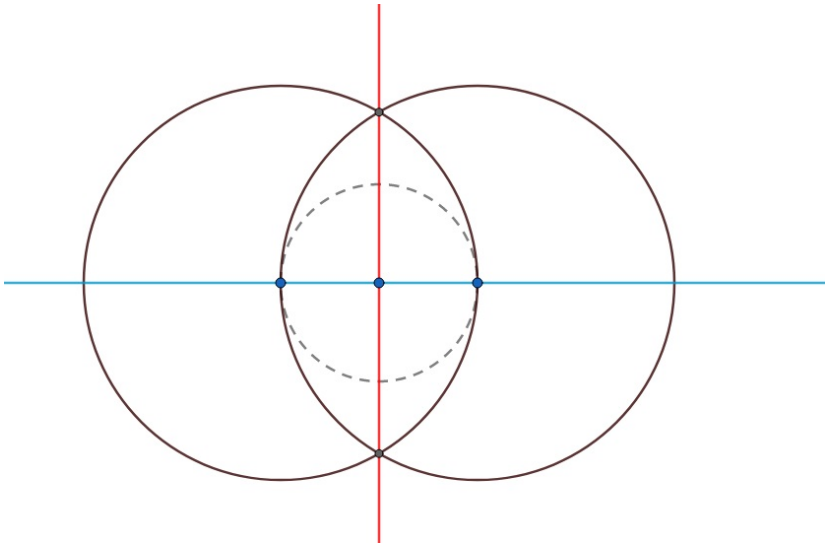
Piirretään ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkeva suora. Tämä suora on janan keskinormaali.



- b) Piirretään suora ja merkitään suoralle piste. Piirretään harpin avulla pisteen molemmille puolille siitä yhtä kaukana olevat suoran pisteet.

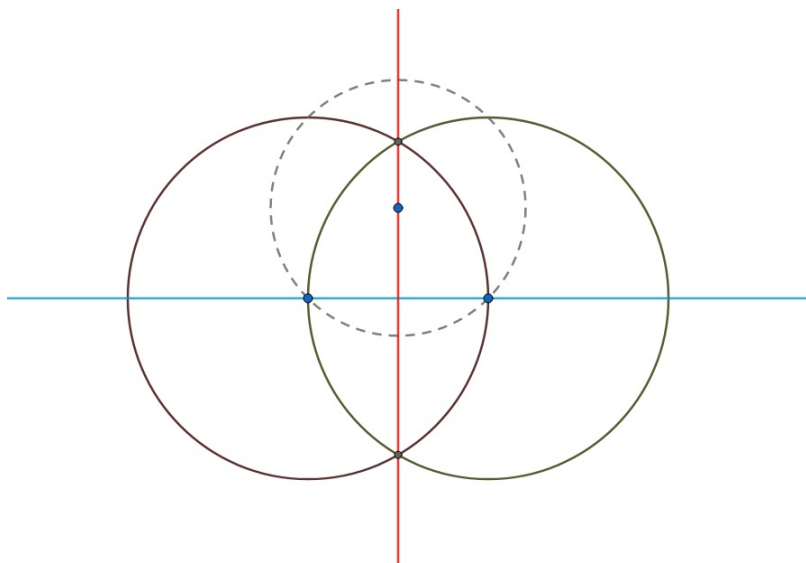


Piirretään näihin pisteisiin ympyrät, joiden säteet ovat pisteiden välisen janan pituiset. Piirretään näiden ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkeva suora. Tämä suora on suoralla olevan pisteen kautta kulkeva normaali.



- c) Piirretään suora ja merkitään sen ulkopuolelle piste. Piirretään harpin avulla pisteen molemmille puolille siitä yhtä kaukana olevat suoran pisteet.

Piirretään näihin pisteisiin ympyrät, joiden säteet ovat pisteiden välisen janan pituiset. Piirretään näiden ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkeva suora. Tämä suora on suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkeva normaali.



8.11

Lukujen 0 ja 200 keskiarvo on 100, joten aloitetaan kysymyksellä ”Onko luku välillä $[0, 100]$?”, ja jatketaan esimerkin mukaisesti riippuen siitä, onko vastaus kyllä vai ei. Esimerkiksi jos arvattava luku olisi 123, keskustelun kuluessa arvot a , b ja c vaihtelisivat seuraavasti:

	a	b	c	Onko luku välillä $[a, c]$?
1.	0	200	100	Ei
2.	100	200	150	Kyllä
3.	100	150	125	Kyllä
4.	100	125	112,5	Ei
5.	112,5	125	118,75	Ei
6.	118,75	125	121,875	Ei
7.	121,875	125	123,4375	Kyllä
8.	121,875	123,4375	122,65625	Ei
9.	122,65625	123,4375		

Lukujen 122,65625 ja 123,046875 välissä on vain yksi kokonaisluku, ja se on 123.

Luku 123 löytyy kahdeksalla kysymyksellä.

8.12

Asetetaan $a = 74$ ja $b = 20$.

Muodostetaan jakolaskun $74 : 20$ jakoyhtälö.

$$74 = 20 \cdot 30 + 14$$

Koska $r = 14$ ei ole nolla, asetetaan $a = 20$ ja $b = 14$.

Muodostetaan jakolaskun $20 : 14$ jakoyhtälö.

$$20 = 14 \cdot 1 + 6$$

Koska $r = 6$ ei ole nolla, asetetaan $a = 14$ ja $b = 6$.

Muodostetaan jakolaskun $14 : 6$ jakoyhtälö.

$$14 = 6 \cdot 2 + 2$$

Koska $r = 2$ ei ole nolla, asetetaan $a = 6$ ja $b = 2$.

Muodostetaan jakolaskun $6 : 2$ jakoyhtälö.

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

Koska $r = 0$, niin ilmoitetaan $b = 2$.

Algoritmi antaa tulokseksi luvun 2.

Kyseessä on Eukleideen algoritmi, joka määrittää lukujen 74 ja 20 suurimman yhteisen tekijän.

8.13

	2	7	6	:	4	=	6	9
-	2	4						
		3	6					
	-	3	6					
			0					

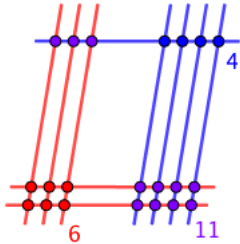
1. Ota jaettavan vasemmasta reunasta mukaan niin monta numeroa, että jakaja sisältyy näin muodostuvaan lukuun 27.
2. Jakaja 4 menee lukuun 27 kuusi kertaa. Merkitse luku 6 yhtäsuuruusmerkin jälkeen.
3. Merkitse tulon $4 \cdot 6 = 24$ arvo luvun 27 alle.
4. Laske erotus $27 - 24 = 3$.
5. Pudota luvun 3 rinnalle seuraava vapaa luku 6.
6. Jakaja 4 menee lukuun 36 yhdeksän kertaa. Merkitse luku 9 tulokseen luvun 6 rinnalle.
7. Merkitse tulon $4 \cdot 9 = 36$ arvo luvun 36 alle.
8. Laske erotus $36 - 36 = 0$.
9. Jakojäännökseksi tulee nolla, joten jako menee tasan.

		6	9						
4	2	7	6						
-	2	4							
		3	6						
	-	3	6						
			0						

1. Merkitse jakaja 4 jakokulman eteen ja jaettava 276 jakokulman sisäpuolelle.
2. Jakaja 4 menee lukuun 27 kuusi kertaa. Merkitse luku 6 luvun 7 yläpuolelle.
3. Merkitse tulon $4 \cdot 6 = 24$ arvo luvun 27 alle.
4. Laske erotus $27 - 24 = 3$.
5. Pudota luvun 3 rinnalle seuraava vapaa luku 6.
6. Jakaja 4 menee lukuun 36 yhdeksän kertaa. Merkitse luku 9 tulokseen luvun 6 rinnalle.
7. Merkitse tulon $4 \cdot 9 = 36$ arvo luvun 36 alle.
8. Laske erotus $36 - 36 = 0$.
9. Jakojäännökseksi tulee nolla, joten jako menee tasan.

8.14

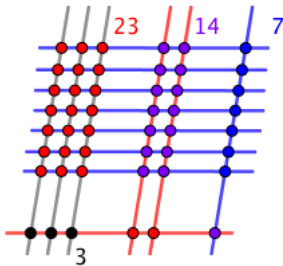
- a) Esitetään luku $34 = 3 \cdot 10 + 4$ piirtämällä 3 kymmenviivaa ja 4 ykkösviivaa pystysuuntaan ja luku $21 = 2 \cdot 10 + 1$ piirtämällä 2 kymmenviivaa ja 1 ykkösviiva vaakasuuntaan.



Satoja on 6, kymmeniä 11 ja ykkösiä 4.

Tulon arvo on $34 \cdot 21 = 600 + 110 + 4 = 714$.

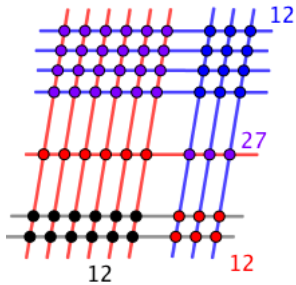
- b) Esitetään luku $321 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1$ piirtämällä 3 sataviivaa, 2 kymmenviivaa ja 1 ykkösviiva pystysuuntaan ja luku $17 = 1 \cdot 10 + 7$ piirtämällä 1 kymmenviiva ja 7 ykkösviivaa vaakasuuntaan.



Tuhansia on 3, satoja 23, kymmeniä 14 ja ykkösiä 7.

Tulon arvo on $321 \cdot 17 = 3000 + 2300 + 140 + 7 = 5457$.

c) $63 = 6 \cdot 10 + 3$ ja $214 = 2 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4$.



Tuhansia on 12, satoja 12, kymmeniä 27 ja ykkösiä 12.

Tulon arvo on $63 \cdot 214 = 12\,000 + 1200 + 270 + 12 = 13\,482$.

Vastaus

a) 714

b) 5457

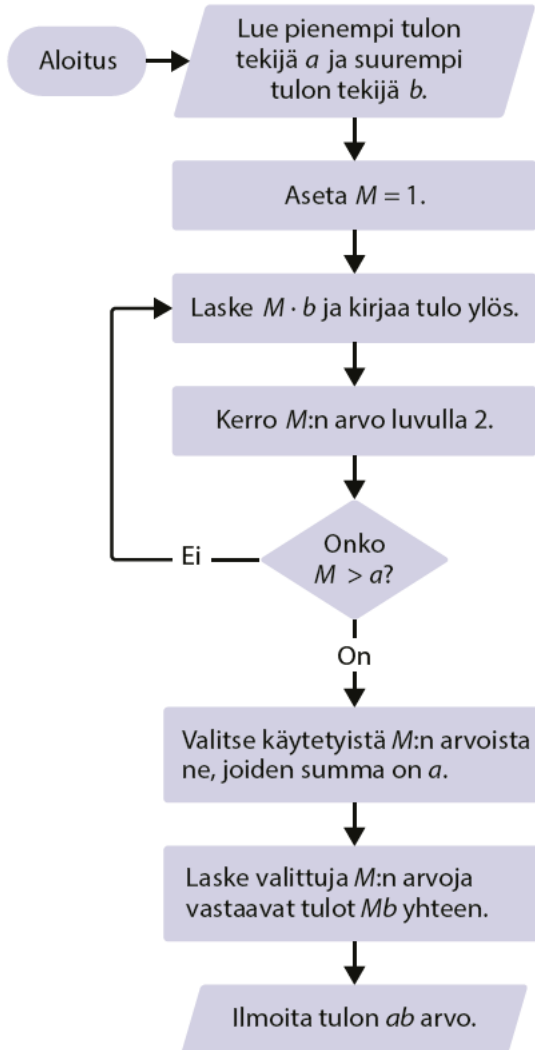
c) 13 482

8.15

a)

67	·	89	=	5963
1		89		89
2		178		178
4		356		
8		712		
16		1424		
32		2848		
64		5696		5896
67				5963

b)



8.16

Esimerkiksi:

1. Erotetaan yhteinen tekijä x .
2. Yhtälö toteutuu, kun $x = 0$ tai $ax + b = 0$.
3. Vähennetään yhtälön $ax + b = 0$ molemmilta puolilta luku b .
4. Jaetaan yhtälön $ax = -b$ molemmat puolet luvulla a .
Saadaan $x = -\frac{b}{a}$.
5. Yhtälön ratkaisut ovat $x = 0$ ja $x = -\frac{b}{a}$.

8.17

Tehtävänä on laskea luvun $\sqrt{3}$ likiarvo, joten $a = 3$.

Alkuarvaus $b = 1,5$.

$$\text{Lasketaan } c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(1,5 + \frac{3}{1,5}\right) = 1,75.$$

1,75 ei ole kolmen desimaalin tarkkuudella 1,5.

Asetetaan $b = 1,75$.

$$\text{Lasketaan } c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(1,75 + \frac{3}{1,75}\right) = 1,732.$$

1,732 ei ole kolmen desimaalin tarkkuudella 1,75.

Asetetaan $b = 1,732$.

$$\text{Lasketaan } c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(1,732 + \frac{3}{1,732}\right) = 1,732.$$

1,732 on kolmen desimaalin tarkkuudella 1,732.

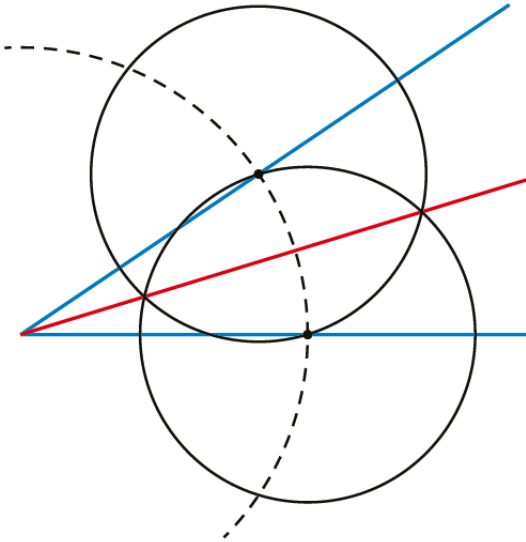
Siis $\sqrt{3} \approx 1,732$.

8.18

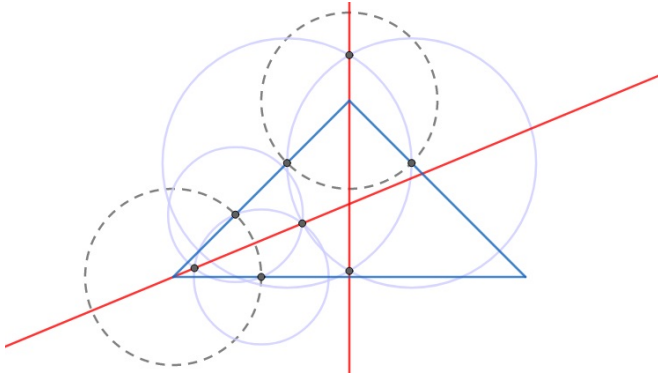
- a) Piirretään harpin avulla kulman molemmille sivuille pisteet, jotka ovat yhtä kaukana kulman kärjestä.

Piirretään harpilla näihin pisteisiin ympyrät, joiden säteet ovat pisteiden välisen janan pituiset.

Piirretään viivoittimella suora näiden ympyröiden leikkauspisteiden kautta. Tämä suora on kulmanpuolittaja.

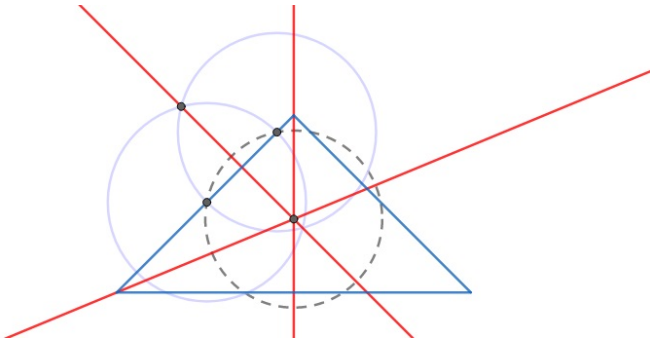


- b) Piirretään a-kohdan algoritmilla kolmion kahdelle kulmalle kulmanpuolittajat.

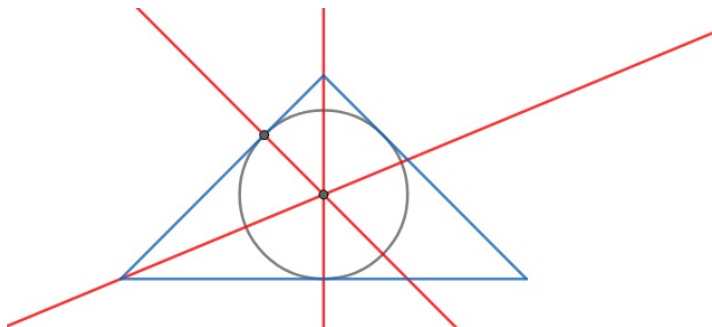


Kulmanpuolittajien leikkauspiste on yhtä kaukana kolmion kaikista sivuista, joten se on etsityn ympyrän keskipiste.

Piirretään tehtävän 8.10 algoritmilla kolmion yhdelle sivulle normaali, joka kulkee tämän keskipisteen kautta.

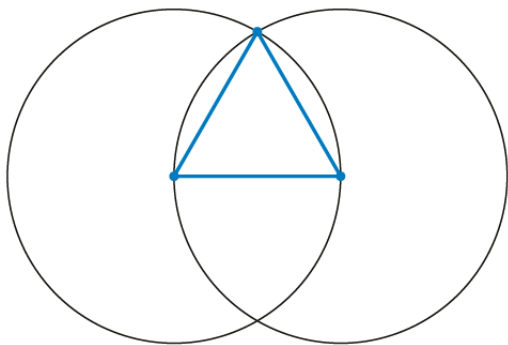


Ympyrä sivuaa kolmiota normaalin ja kolmion sivun leikkauspisteessä.



8.19

- a) Piirretään harpilla ympyrä. Valitaan ympyrän kehältä jokin piste ja piirretään siihen toinen samansäteinen ympyrä. Piirretään viivoittimella kolmio, jonka kärkinä ovat ympyröiden keskipisteet ja toinen leikkauspiste. Kolmio on tasasivuinen.

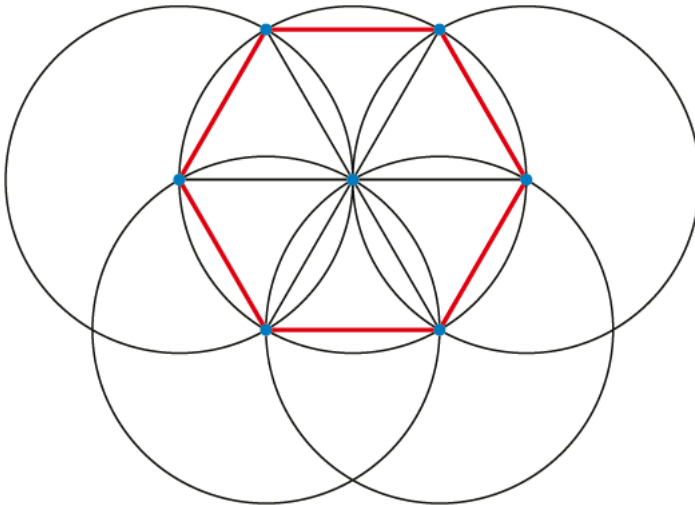


- b) Piirretään ensimmäinen ympyrä. Tämän ympyrän keskipisteestä tulee kuusikulmion keskipiste ja kuusiokulmion kärjet ovat tämän ympyrän kehällä.

Piirretään toinen ympyrä, jonka keskipiste on ensimmäisen ympyrän kehällä, joka joka kulkee ensimmäisen ympyrän keskipisteen kautta.

Piirretään kolmas ympyrä, jonka keskipiste on ensimmäisen ja toisen ympyrän leikkauspisteessä ja joka kulkee ensimmäisen ympyrän keskipisteen kautta.

Toistetaan tätä menettelyä kunnes ensimmäisen ympyrän kehällä on kuusi ympyröiden leikkauspistettä. Yhdistetään nämä leikkauspisteet janoilla. Syntynyt kuvio on säännöllinen kuusikulmio.

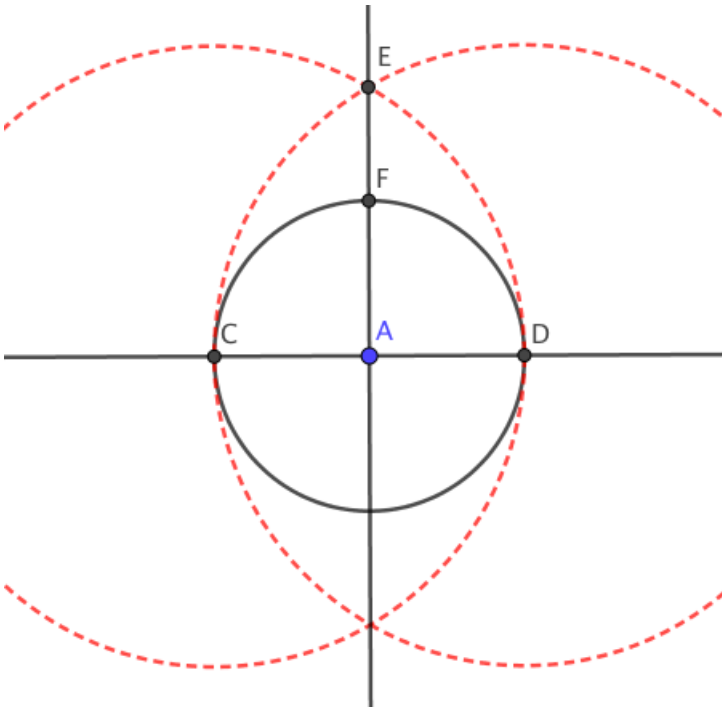


8.20

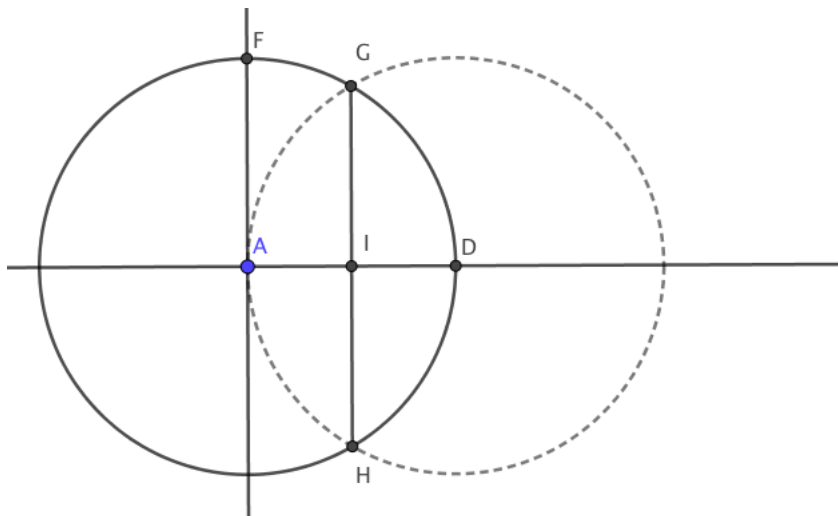
Piirretään harpilla halutun säteinen ympyrä. Viisikulmion keskipiste on tämän ympyrän keskipisteessä ja viisikulmion kärjet ympyrän kehällä.

Piirretään viivoittimella suora, joka kulkee ympyrän keskipisteen A kautta.

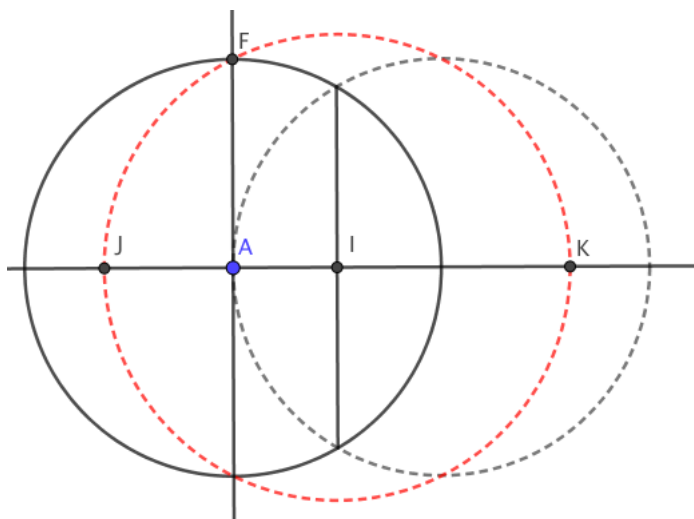
Piirretään tehtävän 8.10 algoritmilla suoralle normaali, joka kulkee ympyrän keskipisteen A kautta.



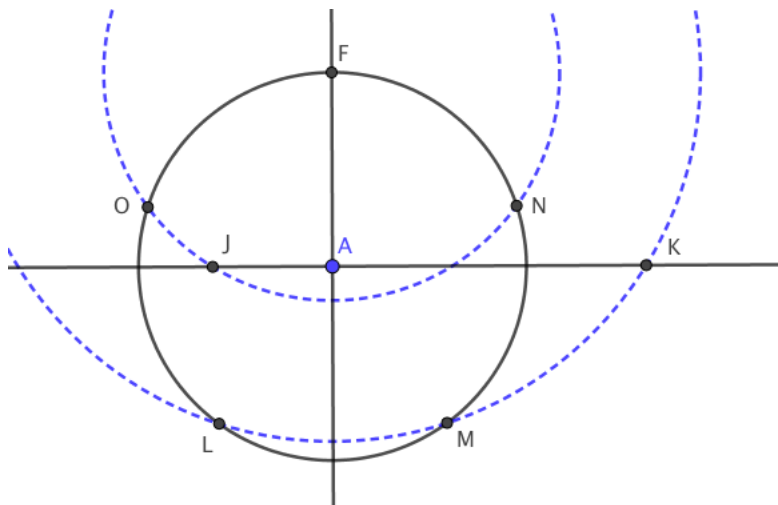
Poistetaan kuvasta punaiset apuympyrät. Piirretään pisteeseen D ympyrä, joka kulkee pisteen A kautta. Yhdistetään ympyröiden leikkauspisteet G ja H janalla.



Piirretään seuraavaksi ympyrä, jonka keskipiste on I ja joka kulkee pisteen F kautta. Tämä ympyrä leikkaa vaakasuoran pisteissä J ja K .



Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on F ja joka kulkee pisteen J kautta, ja toinen ympyrä, jonka keskipiste on F ja joka kulkee pisteen K kautta.



Nyt alkuperäisen ympyrän kehällä on viisi leikkauspistettä: pisteet F , N , M , L ja O . Yhdistetään pisteet janoilla. Syntyy säännöllinen viisikulmio.

