

5.1

a) Luku 45 voidaan esittää kahden luvun tuloina seuraavilla tavoilla:

$$45 = 1 \cdot 45$$

$$45 = 3 \cdot 15$$

$$45 = 5 \cdot 9$$

Kokeillaan jakaa luku 45 luvuilla
1, 2, 3, 4, Kirjataan ylös ne
jakolaskut, jotka menevät tasan.

Jakolaskun $45 : 9$ kohdalla
huomataan, että samat tekijät
alkavat toistua.

Luku 18 voidaan esittää kahden luvun tuloina seuraavilla tavoilla:

$$18 = 1 \cdot 18$$

$$18 = 2 \cdot 9$$

$$18 = 3 \cdot 6$$

Luvun 45 tekijät ovat 1, 3, 9, 15 ja 45.

Luvun 18 tekijät ovat 1, 2, 3, 6, 9 ja 18.

Lukujen 45 ja 18 yhteiset tekijät ovat 1, 3 ja 9.

Lukujen 45 ja 18 suurin yhteinen tekijä on 9.

- b) Luvut 48 ja 24 voidaan esittää kahden luvun tuloina seuraavilla tavoilla:

$$48 = 1 \cdot 48$$

$$24 = 1 \cdot 24$$

$$48 = 2 \cdot 24$$

$$24 = 2 \cdot 12$$

$$48 = 3 \cdot 16$$

$$24 = 3 \cdot 8$$

$$48 = 4 \cdot 12$$

$$24 = 4 \cdot 6$$

$$48 = 6 \cdot 8$$

Luvun 48 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 ja 48.

Luvun 24 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ja 24.

Lukujen 48 ja 24 yhteiset tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 12 ja 24.

Lukujen 45 ja 18 suurin yhteinen tekijä on 3.

- c) Luvut 35 ja 12 voidaan esittää kahden luvun tuloina seuraavilla tavoilla:

$$35 = 1 \cdot 35$$

$$12 = 1 \cdot 12$$

$$35 = 5 \cdot 7$$

$$12 = 2 \cdot 6$$

$$12 = 3 \cdot 4$$

Luvun 35 tekijät ovat 1, 5, 7 ja 35.

Luvun 12 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6 ja 12.

Lukujen 45 ja 18 ainoa ja suurin yhteinen tekijä on 3.

Vastaus

- a) yhteiset tekijät 1, 3 ja 9; suurin yhteinen tekijä 9
b) yhteiset tekijät 1, 2, 3, 4, 6, 12 ja 24; suurin yhteinen tekijä 24
c) ainoa ja suurin yhteinen tekijä 3

5.2

- a–B Lukujen 14 ja 36 suurin yhteinen tekijä on 2.
- b–A Lukujen 18 ja 49 suurin yhteinen tekijä on 1.
- c–E Lukujen 54 ja 90 suurin yhteinen tekijä on 18.
- d–D Lukujen 45 ja 27 suurin yhteinen tekijä on 9.

- b)** Luvut 48 ja 24 voidaan esittää kahden luvun tuloina seuraavilla tavoilla:

$$48 = 1 \cdot 48$$

$$24 = 1 \cdot 24$$

$$48 = 2 \cdot 24$$

$$24 = 2 \cdot 12$$

$$48 = 3 \cdot 16$$

$$24 = 3 \cdot 8$$

$$48 = 4 \cdot 12$$

$$24 = 4 \cdot 6$$

$$48 = 6 \cdot 8$$

Luvun 48 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 ja 48.

Luvun 24 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ja 24.

Lukujen 48 ja 24 yhteiset tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 12 ja 24.

Lukujen 45 ja 18 suurin yhteinen tekijä on 3.

- c)** Luvut 35 ja 12 voidaan esittää kahden luvun tuloina seuraavilla tavoilla:

$$35 = 1 \cdot 35$$

$$12 = 1 \cdot 12$$

$$35 = 5 \cdot 7$$

$$12 = 2 \cdot 6$$

$$12 = 3 \cdot 4$$

Luvun 35 tekijät ovat 1, 5, 7 ja 35.

Luvun 12 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6 ja 12.

Lukujen 45 ja 18 ainoa ja suurin yhteinen tekijä on 3.

Vastaus

- a)** yhteiset tekijät 1, 3 ja 9; suurin yhteinen tekijä 9
b) yhteiset tekijät 1, 2, 3, 4, 6, 12 ja 24; suurin yhteinen tekijä 24
c) ainoa ja suurin yhteinen tekijä 3

5.3

a) Muodostetaan jakoyhtälöt laskimen avulla.

$$495 = 364 \cdot 1 + 131$$

$$364 = 131 \cdot 2 + 102$$

$$131 = 102 \cdot 1 + 29$$

$$102 = 29 \cdot 3 + 15$$

$$29 = 15 \cdot 1 + 14$$

$$15 = 14 \cdot 1 + 1$$

$$14 = 1 \cdot 14 + 0$$

$$\text{Siis } \text{syt}(495, 364) = 1.$$

Muodostetaan ensin lukujen 495 ja 364 jakoyhtälö ja sitten aina edellisen jakajan ja jakojäännöksen jakoyhtälö.

Jatketaan kunnes jakolasku menee tasan.

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on suurin yhteinen tekijä.

b) Murtoluvun voi supistaa vain osoittajan ja nimittäjän yhteisillä tekijöillä. Koska lukujen 495 ja 364 ainoa yhteinen tekijä on 1, niin murtolukua $\frac{364}{495}$ ei voi supistaa.

Vastaus

a) $\text{syt}(495, 364) = 1$

b) ei voi

5.4

Etsitään Eukleideen algoritmin avulla suurin luku, jolla murtoluku $\frac{168}{182}$ voidaan supistaa.

Muodostetaan jakoyhtälöt laskimen avulla.

$$182 = 168 \cdot 1 + 14$$

$$168 = 14 \cdot 12 + 0$$

Siiis $\text{sy}(182, 168) = 14$.

Suurin luku, jolla murtoluku $\frac{168}{182}$ voidaan supistaa, on 14.

Vastaus

14

5.5

- a) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$56 = 32 \cdot 1 + 24$$

$$32 = 24 \cdot 1 + 8$$

$$24 = 8 \cdot 3 + 0$$

Siis $\text{sy}(56, 32) = 8$.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(56, 32) \cdot 8 = 56 \cdot 32 \quad | :8 \quad \text{pym}(a, b) \cdot \text{sy}(a, b) = ab$$

$$\text{pym}(56, 32) = \frac{56 \cdot 32}{8} = 224$$

- b) Murtolukujen yhteiseksi nimittäjäksi tulee laventaa lukujen 56 ja 32 pienin yhteinen monikerta 224. Laventajat saadaan selville jakolaskulla.

$$224 : 56 = 4$$

$$224 : 32 = 7$$

Lavennetaan murtoluvut.

$${}^4) \frac{1}{56} = \frac{4}{224}$$

$${}^7) \frac{1}{32} = \frac{7}{224}$$

Vastaus

a) $\text{pym}(56, 32) = 224$

b) $\frac{1}{56} = \frac{4}{224}$ ja $\frac{1}{32} = \frac{7}{224}$

5.6

- a) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$182 = 140 \cdot 1 + 42$$

$$140 = 42 \cdot 3 + 14$$

$$42 = 14 \cdot 3 + 0$$

$$\text{Siis } \text{syt}(182, 140) = 14.$$

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(182, 140) = \frac{182 \cdot 140}{14} = 1820 \qquad \text{pym}(a, b) = \frac{ab}{\text{syt}(a, b)}$$

- b) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$300 = 255 \cdot 1 + 45$$

$$255 = 45 \cdot 5 + 30$$

$$45 = 30 \cdot 1 + 15$$

$$30 = 15 \cdot 2 + 0$$

$$\text{Siis } \text{syt}(300, 255) = 15.$$

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(300, 255) = \frac{300 \cdot 255}{15} = 5100 \qquad \text{pym}(a, b) = \frac{ab}{\text{syt}(a, b)}$$

Vastaus

- a) $\text{syt}(182, 140) = 14$, $\text{pym}(182, 140) = 1820$
b) $\text{syt}(300, 255) = 15$, $\text{pym}(300, 255) = 5100$

5.7

- a) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$116 = 87 \cdot 1 + 29$$

$$87 = 29 \cdot 3 + 0$$

$$\text{Siis } \text{syt}(116, 87) = 29.$$

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{116 \cdot 87}{29} = 348$$

$$\text{pym}(a, b) = \frac{ab}{\text{syt}(a, b)}$$

Murtolukujen yhteinen nimittäjä on 348. Selvitetään laventajat.

$$348 : 116 = 3$$

$$348 : 87 = 4$$

Lavennetaan murtoluvut.

$$3) \quad \frac{1}{116} = \frac{3}{348}$$

$$4) \quad \frac{1}{87} = \frac{4}{348} \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{SEP} \end{array} \right]$$

- b) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$70 = 25 \cdot 2 + 20$$

$$25 = 20 \cdot 1 + 5$$

$$20 = 5 \cdot 4 + 0$$

$$\text{Siis } \text{syt}(70, 25) = 5.$$

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{70 \cdot 25}{5} = 350$$

$$\text{pym}(a, b) = \frac{ab}{\text{syt}(a, b)}$$

Murtolukujen yhteinen nimittäjä on 350. Selvitetään laventajat.

$$350 : 70 = 5$$

$$350 : 25 = 14$$

Lavennetaan murtoluvut.

$$5) \quad \frac{3}{70} = \frac{15}{350}$$

$$14) \quad \frac{4}{25} = \frac{56}{350} \quad \boxed{\frac{1}{14} \cdot \frac{4}{25} = \frac{56}{350}}$$

Vastaus

$$\text{a) } \frac{1}{116} = \frac{3}{348} \text{ ja } \frac{1}{87} = \frac{4}{348}$$

$$\text{b) } \frac{3}{70} = \frac{15}{350} \text{ ja } \frac{4}{25} = \frac{56}{350}$$

5.8

a) klo 8.52

b) Bussit saapuvat seuraavan kerran yhtä aikaa pysäkille, kun kello seitsemästä kuluneiden minuuttien määrä on lukujen 16 ja 28 pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(16, 28) = 112$$

Määritetään CAS-laskimella.

Bussit saapuvat yhtä aikaa pysäkille, kun kello seitsemästä on kulunut 112 minuuttia.

$$112 \text{ min} = 60 \text{ min} + 52 \text{ min} = 1 \text{ h } 52 \text{ min}$$

Kello seitsemästä on kulunut 1 h 52 min, joten kello on 8.52.

Vastaus

a) klo 8.52

b) klo 8.52

5.9

Tumman neliön sivu on lukujen 378 ja 180 pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(378, 180) = 3780$$

Määritetään CAS-laskimella.

Tumman neliön sivu on siis 3780 mm.

Lasketaan, kuinka monta laattaa tarvitaan neliön kullekin sivulle.

$$3780 : 378 = 10$$

$$3780 : 180 = 21$$

Laattoja tarvitaan $10 \cdot 21 = 210$ kappaletta.

Lasketaan tumman neliön pinta-ala.

$$3780 \text{ mm} \cdot 3780 \text{ mm} = 14\,288\,400 \text{ mm}^2 \approx 14,3 \text{ m}^2$$

Vastaus

210 laattaa, pinta-ala $14,3 \text{ m}^2$

5.10

Määritetään lukujen 70, 315 ja 133 suurin yhteinen tekijä käyttämällä tietoa:

$$\text{syt}(a, b, c) = \text{syt}(\text{syt}(a, b), c)$$

$$\text{syt}(70, 315, 133) = \text{syt}(\text{syt}(70, 315), 133)$$

Selvitetään ensin lukujen 70 ja 315 suurin yhteinen tekijä.

$$315 = 70 \cdot 4 + 35$$

$$70 = 35 \cdot 2 + 0$$

$$\text{Siis } \text{syt}(315, 70) = 35.$$

Selvitetään lukujen 35 ja 133 suurin yhteinen tekijä.

$$133 = 35 \cdot 3 + 28$$

$$35 = 28 \cdot 1 + 7$$

$$28 = 7 \cdot 4 + 0$$

$$\text{Siis } \text{syt}(133, 35) = 7.$$

$$\text{Eli } \text{syt}(70, 315, 133) = 7.$$

Vastaus

7

5.11

a) Luku 78 voidaan esittää kahden luvun tuloina seuraavilla tavoilla:

$$78 = 1 \cdot 78$$

$$78 = 2 \cdot 39$$

$$78 = 3 \cdot 26$$

$$78 = 6 \cdot 13$$

Kokeillaan jakaa luku 78 luvuilla
1, 2, 3, 4, Kirjataan ylös ne
jakolaskut, jotka menevät tasan.

Jakolaskun $78 : 13$ kohdalla
huomataan, että samat tekijät
alkavat toistua.

Luku 84 voidaan esittää kahden luvun tuloina seuraavilla tavoilla:

$$84 = 1 \cdot 84$$

$$84 = 2 \cdot 42$$

$$84 = 3 \cdot 28$$

$$84 = 4 \cdot 21$$

$$84 = 6 \cdot 14$$

Luvun 78 tekijät ovat 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39 ja 78.

Luvun 84 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 14, 21, 28, 42 ja 84.

Lukujen 78 ja 84 yhteiset tekijät ovat 1, 2, 3 ja 6.

Lukujen 78 ja 84 suurin yhteinen tekijä on 6.

b) Luvut 108 ja 180 voidaan esittää kahden luvun tuloina seuraavilla tavoilla:

$$108 = 1 \cdot 108$$

$$180 = 1 \cdot 180$$

$$108 = 2 \cdot 54$$

$$180 = 2 \cdot 90$$

$$108 = 3 \cdot 36$$

$$180 = 3 \cdot 60$$

$$108 = 4 \cdot 27$$

$$180 = 4 \cdot 45$$

$$108 = 6 \cdot 18$$

$$180 = 5 \cdot 36$$

$$108 = 9 \cdot 12$$

$$180 = 6 \cdot 30$$

$$180 = 9 \cdot 20$$

$$180 = 12 \cdot 15$$

Luvun 108 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54 ja 108.

Luvun 180 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 20, 30, 36, 45, 60, 90 ja 180.

Lukujen 108 ja 180 yhteiset tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18 ja 36.

Lukujen 108 ja 180 suurin yhteinen tekijä on 36.

- c) Luvut 102 ja 202 voidaan esittää kahden luvun tuloina seuraavilla tavoilla:

$$102 = 1 \cdot 102$$

$$202 = 1 \cdot 202$$

$$102 = 2 \cdot 51$$

$$202 = 2 \cdot 101$$

$$102 = 3 \cdot 34$$

$$102 = 6 \cdot 17$$

Luvun 102 tekijät ovat 1, 2, 3, 6, 17, 34, 51 ja 102.

Luvun 202 tekijät ovat 1, 2, 101 ja 202.

Lukujen 102 ja 202 yhteiset tekijät ovat 1 ja 2.

Lukujen 102 ja 202 suurin yhteinen tekijä on 2.

Vastaus

- a) yhteiset tekijät 1, 2, 3 ja 6; suurin yhteinen tekijä 6
b) yhteiset tekijät 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18 ja 36;
suurin yhteinen tekijä 36
c) yhteiset tekijät ovat 1 ja 2; suurin yhteinen tekijä 2

5.12

a) Muodostetaan jakoyhtälöt laskimen avulla.

$$29614 = 11055 \cdot 2 + 7504$$

$$11055 = 7504 \cdot 1 + 3551$$

$$7504 = 3551 \cdot 2 + 402$$

$$3551 = 402 \cdot 8 + 335$$

$$402 = 335 \cdot 1 + 67$$

$$335 = 67 \cdot 5 + 0$$

Siis $\text{syt}(29\,614, 11\,055) = 67$.

Muodostetaan ensin lukujen 29614 ja 11055 jakoyhtälö ja sitten aina edellisen jakajan ja jakojäännöksen jakoyhtälö.

Jatketaan kunnes jakolasku menee tasan.

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on suurin yhteinen tekijä.

b) Murtoluvun voi supistaa vain osoittajan ja nimittäjän yhteisillä tekijöillä. Koska lukujen 29 614 ja 11 055 suurin yhteinen tekijä on

67, niin murtoluvun $\frac{11\,055}{29\,614}$ voi supistaa luvulla 67.

Vastaus

a) $\text{syt}(29\,614, 11\,055) = 67$

b) Voi supistaa luvulla 67.

5.13

- a) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$396 = 363 \cdot 1 + 33$$

$$363 = 33 \cdot 11 + 0$$

$$\text{Siis } \text{syt}(396, 363) = 33.$$

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(396, 363) = \frac{396 \cdot 363}{36} = 4356 \qquad \text{pym}(a, b) = \frac{ab}{\text{syt}(a, b)}$$

- b) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$504 = 320 \cdot 1 + 184$$

$$320 = 184 \cdot 1 + 136$$

$$184 = 136 \cdot 1 + 48$$

$$136 = 48 \cdot 2 + 40$$

$$48 = 40 \cdot 1 + 8$$

$$40 = 8 \cdot 5 + 0$$

$$\text{Siis } \text{syt}(504, 320) = 8.$$

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(504, 320) = \frac{504 \cdot 320}{8} = 20160 \qquad \text{pym}(a, b) = \frac{ab}{\text{syt}(a, b)}$$

Vastaus

a) $\text{pym}(396, 363) = 4356$

b) $\text{pym}(504, 320) = 20\,160$

5.14

- a) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$429 = 130 \cdot 3 + 39$$

$$130 = 39 \cdot 3 + 13$$

$$39 = 13 \cdot 3 + 0$$

Siiis $\text{syt}(429, 130) = 13$.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(429, 130) = \frac{429 \cdot 130}{13} = 4290 \qquad \text{pym}(a, b) = \frac{ab}{\text{syt}(a, b)}$$

Murtolukujen yhteinen nimittäjä on 4290. Selvitetään laventajat.

$$4290 : 429 = 10$$

$$4290 : 130 = 33$$

Lavennetaan murtoluvut.

$$^{10)} \frac{1}{429} = \frac{10}{4290}$$

$$^{33)} \frac{1}{130} = \frac{33}{4290}$$



- b) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$220 = 99 \cdot 2 + 22$$

$$99 = 22 \cdot 4 + 11$$

$$22 = 11 \cdot 2 + 0$$

$$\text{Siis } \text{syt}(220, 99) = 11.$$

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(220, 99) = \frac{220 \cdot 99}{11} = 1980 \qquad \text{pym}(a, b) = \frac{ab}{\text{syt}(a, b)}$$

Murtolukujen yhteinen nimittäjä on 1980. Selvitetään laventajat.

$$1980 : 220 = 9$$

$$1980 : 99 = 20$$

Lavennetaan murtoluvut.

$$\textcolor{red}{9}) \frac{3}{220} = \frac{27}{1980} \qquad \textcolor{red}{20}) \frac{5}{99} = \frac{100}{1980} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{11} \\ \text{SEP} \end{array} \right\}$$

Vastaus

$$\text{a)} \quad \frac{1}{429} = \frac{10}{4290} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{130} = \frac{33}{4290}$$

$$\text{b)} \quad \frac{3}{220} = \frac{27}{1980} \quad \text{ja} \quad \frac{5}{99} = \frac{100}{1980}$$

5.15

- a) Epätosi, koska luvun 21 tekijät ovat 1, 3, 7 ja 21.
- b) Tosi.
- c) Epätosi, koska lukujen 21 ja 42 suurin yhteinen tekijä on 21.
- d) Epätosi, koska lukujen 45 ja 72 pienin yhteinen monikerta on 360.

5.16

Kuution särmän pituus on lukujen 24, 18 ja 8 pienin yhteinen monikerta. Koska luku 8 sisältyy lukuun 24 tasan kolme kertaa, riittää määrittää lukujen 24 ja 18 pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(24, 18) = 72$$

Määritetään CAS-laskimella.

Kuution särmän pituus on siis 72 cm.

Lasketaan, kuinka monta tiiltä tarvitaan kuution kullekin särmälle.

$$72 : 24 = 3$$

$$72 : 18 = 4$$

$$72 : 8 = 9$$

Tiiliä tarvitaan $3 \cdot 4 \cdot 9 = 108$ kappaletta.

Lasketaan kuution tilavuus.

$$(72 \text{ cm})^3 = 373\,248 \text{ cm}^3 = 0,373\,248 \text{ m}^3 \approx 0,37 \text{ m}^3$$

Vastaus

108 tiiltä, tilavuus $0,37 \text{ m}^3$

5.17

Tiedetään, että $\text{sy}(x, 28) = 14$ ja $\text{py}(x, 28) = 84$.

Ratkaistaan luku x .

$$14 \cdot 84 = x \cdot 28 \quad | :28$$

$$\text{sy}(a, b) \cdot \text{py}(a, b) = ab$$

$$x = \frac{14 \cdot 84}{28} = 42$$

Vastaus

42

5.18

Määritetään lukujen 510, 1938 ja 3740 suurin yhteinen tekijä käyttämällä tietoa:

$$\text{syt}(a, b, c) = \text{syt}(\text{syt}(a, b), c)$$

$$\text{syt}(510, 1938, 3740) = \text{syt}(\text{syt}(510, 1938), 3740)$$

Selvitetään ensin lukujen 510 ja 1938 suurin yhteinen tekijä.

$$1938 = 510 \cdot 3 + 408$$

$$510 = 408 \cdot 1 + 102$$

$$408 = 102 \cdot 4 + 0$$

Siis $\text{syt}(510, 1938) = 102$.

Selvitetään lukujen 102 ja 3740 suurin yhteinen tekijä.

$$3740 = 102 \cdot 36 + 68$$

$$102 = 68 \cdot 1 + 34$$

$$68 = 34 \cdot 2 + 0$$

Siis $\text{syt}(102, 3740) = 34$.

Eli $\text{syt}(510, 1938, 3740) = 34$.

Vastaus

34

5.19

Määritetään lukujen 12, 18 ja 25 suurin yhteinen tekijä käyttämällä tietoa:

$$\text{pym}(a, b, c) = \text{pym}(\text{pym}(a, b), c)$$

$$\text{pym}(12, 18, 25) = \text{pym}(\text{pym}(12, 18), 25)$$

Selvitetään lukujen 12 ja 18 suurin yhteinen tekijä.

$$18 = 12 \cdot 1 + 6$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

Siis $\text{sy}(12, 18) = 6$.

Selvitetään lukujen 12 ja 18 pienin yhteinen monikerta.

$$6 \cdot \text{pym}(12, 18) = 12 \cdot 18 \quad | :6 \quad \text{sy}(a, b) \cdot \text{pym}(a, b) = ab$$

$$\text{pym}(12, 18) = \frac{12 \cdot 18}{6} = 36$$

Selvitetään lukujen 36 ja 25 suurin yhteinen tekijä.

$$36 = 25 \cdot 1 + 11$$

$$25 = 11 \cdot 2 + 3$$

$$11 = 3 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Siis $\text{sy}(36, 25) = 1$.

Selvitetään lukujen 36 ja 25 pienin yhteinen monikerta.

$$1 \cdot \text{pym}(36, 25) = 36 \cdot 25$$

$$\text{syt}(a, b) \cdot \text{pym}(a, b) = ab$$

$$\text{pym}(12, 18) = 900$$

Lukujen 12 ja 18 pienin yhteinen monikerta on 36,
ja lukujen 36 ja 25 pienin yhteinen monikerta on 900,
joten lukujen 12, 18 ja 25 pienin yhteinen monikerta on 900.

Vastaus

900

5.20

Oletetaan, että n on luonnollinen luku.

Etsitään lukujen $11n + 3$ ja $7n + 2$ suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$11n + 3 = (7n + 2) \cdot 1 + (4n + 1)$$

$$7n + 2 = (4n + 1) \cdot 1 + (3n + 1)$$

$$4n + 1 = (3n + 1) \cdot 1 + n$$

$$3n + 1 = n \cdot 3 + 1$$

$$n = 1 \cdot n + 0$$

Siis $\text{syta}(11n + 3, 7n + 2) = 1$.

5.21

Oletetaan, että luku r_n on kokonaislukujen a ja b ($a > b$) suurin yhteinen tekijä.

Kirjoitetaan oletus (eli lähtötiedot) näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku r_n on jaollinen jokaisella lukujen a ja b yhteisellä tekijällä.

Kirjoitetaan väite näkyviin.

Luku r_n toteuttaa Eukleideen algoritmin.

Aloitetaan päättely oletuksesta.

$$a = bq_1 + r_1$$

$$b = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

...

$$r_{n-2} = r_{n-1}q + r_n$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$$

Olkoon luku c mielivaltainen lukujen a ja b yhteinen tekijä.

Jos luku c on lukujen a ja b yhteinen tekijä, niin se on myös lukujen b ja r_1 yhteinen tekijä.

Jos luku c on lukujen b ja r_1 yhteinen tekijä, se on myös lukujen r_1 ja r_2 yhteinen tekijä.

Näin jatkaen havaitaan, että luku c on myös lukujen r_{n-1} ja r_n yhteinen tekijä.

On siis osoitettu, että luku r_n on jaollinen jokaisella lukujen a ja b yhteisellä tekijällä. $\square$

Perustellaan, miksi väite on tosi.

5.22

Tulee osoittaa:

- 1) Jos luku d on lukujen a , b ja c yhteinen tekijä, niin se on lukujen $\text{sy}(a, b)$ ja c yhteinen tekijä.
- 2) Jos luku d on lukujen $\text{sy}(a, b)$ ja c yhteinen tekijä, niin se on lukujen a , b ja c yhteinen tekijä.

Osoitetaan ensin kohta 1.

Olkoon d lukujen a , b ja c yhteinen tekijä.

Koska d on lukujen a ja b yhteinen tekijä, se on myös luvun $\text{sy}(a, b)$ tekijä (tehtävän 5.21 perusteella).

Siten luku d on lukujen $\text{sy}(a, b)$ ja c yhteinen tekijä.

Osoitetaan sitten kohta 2.

Olkoon d lukujen $\text{sy}(a, b)$ ja c yhteinen tekijä.

Koska d on luvun $\text{sy}(a, b)$ tekijä, niin $\text{sy}(a, b) = d \cdot m$, missä m on jokin kokonaisluku.

Koska luvut a ja b ovat jaollisia luvulla $\text{sy}(a, b) = d \cdot m$, niin ne ovat jaollisia myös luvulla d .

Siten d on lukujen a , b ja c yhteinen tekijä.

Perustellaan väite.

Koska kohtien 1 ja 2 perusteella lukujen a , b ja c yhteiset tekijät ovat samat kuin lukujen $\text{syt}(a, b)$ ja c yhteiset tekijät, niin niiden suurin yhteinen tekijäkin on sama.

On siis osoitettu, että $\text{syt}(a, b, c) = \text{syt}(\text{syt}(a, b), c)$.