2 Todennäköisyys

2.1 Todennäköisyyden peruskäsitteitä

103.

a) Sattuma määrää syntyvän lapsen sukupuolen, joten kyseessä on satunnaisilmiö.

b) Jokainen oppilas saa koulupaikan oppivelvollisuuden alkaessa, joten sattumalla ei ole osuutta tilanteessa. Kyseessä ei ole satunnaisilmiö.

c) Sattumalla on osuutta kissan turkin värin periytymiseen, joten kyseessä on satunnaisilmiö.

d) Teatteri määrittää lippujensa hinnat eikä sattumalla ole osuutta tilanteessa. Kyseessä ei ole satunnaisilmiö.

104.

a) Koripallo joko menee koriin tai ei mene koriin. Koripallon heitto koriin sisältää siis kaksi tapahtumaa: ”menee koriin” ja ”ei mene koriin”.

b) Nelihenkisessä ryhmässä poikien lukumäärä on välillä 0–4 oleva luku. Poikien lukumäärä sisältää siis tapahtumat: 0, 1, 2, 3 tai 4 poikaa.

c) Tikanheitossa tikka voi osua tauluun tai mennä taulun ohi. Tauluun osuessaan heiton tulos on joku numeroista 1–10. Tikanheiton tulos sisältää siis tapahtumat: ohi, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tai 10.

105.

Alkeistapaukset ovat satunnaisilmiön kaikki mahdolliset tulosvaihtoehdot.

a) Puoli tusinaa tarkoittaa lukumäärää kuusi. Vaihtoehtoja on kuusi, joten alkeistapausten lukumäärä on 6.

b) Kaksinumeroisia luonnollisia lukuja ovat luvut 10–99, joiden lukumäärä on $99 - 9 = 90$. Kun valitaan yksi luku, niin vaihtoehtoja on 90. Alkeistapausten lukumäärä on siis 90.

c) Kaksinumeroisia kokonaislukuja ovat positiiviset luvut 10–99, joiden lukumäärä on $99 - 9 = 90$ sekä negatiiviset luvut luvusta -99 lukuun -10, joiden lukumäärä on niinikään 90 . Kun valitaan yksi luku, niin vaihtoehtoja on 90 + 90 =180. Alkeistapausten lukumäärä on siis 180.

d) Täydessä korttipakassa on 52 korttia. Kun täydestä korttipakasta valitaan yksi kortti, niin vaihtoehtojen lukumäärä on 52. Alkeistapauksia on 52. (Se, että valittu kortti oli pata ei vaikuta alkeistapausten lukumäärään.)

e) Nykyisessä Veikkauksen järjestämässä lotossa pelaaja valitsee seitsemän eri numeroa väliltä 1–40. Ensimmäisen numeron valinnassa on siis 40 vaihtoehtoa, joten alkeistapausten lukumäärä on 40.

106.

Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapausten osuus kaikista alkeistapauksista.

Alkeistapauksia, eli puita on yhteensä $4 + 5 + 2 + 1 = 12$ (kappaletta).

a) Omenapuita on neljä. Omenapuiden osuus kaikista puista on

$$\frac{4}{12}^{(4} = \frac{1}{3}.$$

Kysytty todennäköisyys on siis $P(\text{"kaatunut puu on omenapuu"}) = \frac{1}{3}$.

b) Koivuja ja pihlajia on yhteensä $5 + 1 = 6$. Näiden osuus kaikista puista on

$$\frac{6}{12}^{(6} = \frac{1}{2}.$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"kaatunut puu on koivu tai pihjala"}) = \frac{1}{2}.$$

107.

Linnunpoikasia on yhteensä 500, joten alkeistapausten lukumäärä on 500.

Poikasista 180 on uroksia, joten naaraita on 500 – 180 = 320.

Naaraiden osuus kaikista poikasista on

$$\frac{320^{(20}}{500} = \frac{16}{25}.$$

Naarasten osuus ilmaisee todennäköisyyden, että syntyvä poikanen on naaras.

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"syntyvä poikanen on naaras"}) = \frac{16}{25}.$$

108.

Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapausten osuus kaikista alkeistapauksista.

Alkeistapauksia, eli perheenjäseniä on yhteensä kuusi (kappaletta).

a) Alle 11-vuotiaita perheenjäseniä on kaksi. Näiden osuus kaikista perheenjäsenistä on

$$\frac{2^{(2}}{6} = \frac{1}{3}.$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"voittaja on alle 11-vuotias"}) = \frac{1}{3} \approx 0{,}33.$$

b) Henkilö on täysi-ikäinen, jos hän on vähintään 18-vuotias. Täysi-ikäisiä perheenjäseniä on kolme. Näiden osuus kaikista perheenjäsenistä on

$$\frac{3^{(3}}{6} = \frac{1}{2}.$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"voittaja on täysi-ikäinen"}) = \frac{1}{2} = 0{,}50.$$

109.

Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapausten osuus kaikista alkeistapauksista.

Alkeistapauksia, eli poikia on yhteensä 20 (kappaletta).

a) Jääkiekonpelaajia on viisi. Näiden osuus kaikista pojista on

$$\frac{5}{20}^{(5} = \frac{1}{4}.$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"harrastaa jääkiekkoa"}) = \frac{1}{4}.$$

b) Jääkiekonpelaajia ja yleisurheilijoita on yhteensä $5 + 11 = 16$, joten niitä poikia, jotka eivät harrasta kumpaakaan lajia on $20 - 16 = 4$. Näiden osuus kaikista pojista on

$$\frac{4}{20}^{(4} = \frac{1}{5}.$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"ei harrasta jääkiekkoa eikä yleisurheilua"}) = \frac{1}{5}.$$

110.

Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapausten osuus kaikista alkeistapauksista.

Lasketaan kaikkien alkeistapauksien, eli opintotuen saajien lukumäärä. Pylväsdiagrammissa kunkin pylvään korkeus ilmaisee frekvenssiä. Opintotuen saajia on yhteensä

$83\,835 + 54\,511 + 71\,038 + 68\,338 + 156 = 277\,878$ (kappaletta).

a) Ahvenanmaalaisia opintotuensaajia on 156 (kappaletta). Lasketaan näiden osuus kaikista opintotuensaajista ja ilmaistaan osamäärä prosentteina:

$$\frac{156}{277\,878} \cdot 100\ \% = 0{,}0561 \ldots \% \approx 0{,}056\ \%.$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$P(\text{"opintotuen saaja on Ahvenanmaalta"}) = 0{,}056\ \%.$

Huomaa, että vastaus annetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Eteläsuomalaisia opintotuensaajia on 54 511. Lasketaan näiden osuus kaikista opintotuensaajista ja ilmaistaan osamäärä prosentteina:

$$\frac{54\,511}{277\,878} \cdot 100\ \% = 19{,}61 \ldots \% \approx 20\ \%.$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$P(\text{"opintotuen saaja on Etelä-Suomesta"}) = 20\ \%.$

111.

Heinäkuussa on 31 päivää. Heinäkuun päiviä on kuuden vuoden aikana yhteensä $6 \cdot 31 = 186$, joten alkeistapauksia on yhteensä 186. Heinäkuisia sadepäiviä on tutkimuksen mukaan kuuden vuoden aikana ollut yhteensä $8 + 12 + 9 + 6 + 10 + 9 = 54$, joten suotuisia alkeistapauksia on 54. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"heinäkuun päivänä sataa"}) = \frac{54}{186}^{(6} = \frac{9}{31}.$$

Todennäköisyys voidaan laskea myös keskiarvon avulla. Lasketaan aineiston perusteella sadepäivien keskimääräinen lukumäärä mainitulla alueella. Keskimääräinen lukumäärä saadaan laskemalla sadepäivien keskiarvo:

$$\bar{x} = \frac{8 + 12 + 9 + 6 + 10 + 9}{6} = \frac{54}{6} = 9.$$

Mainitulla alueella on heinäkuussa siis keskimäärin 9 sadepäivää.

Heinäkuussa on 31 päivää, joten sadepäivien osuus kaikista heinäkuun päivistä on $\frac{9}{31}$.

Sadepäivien osuus ilmaisee todennäköisyyden, että heinäkuun päivä on sadepäivä. Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"heinäkuun päivänä sataa"}) = \frac{9}{31}.$$

112.

Todennäköisyys lasketaan vertaamalla veriryhmään kuuluvien lukumäärää kaikkien suomalaisten lukumäärään.

Jokainen suomalainen kuuluu johonkin veriryhmään, joten kaikkien suomalaisten määrä saadaan laskemalla kaikkien veriryhmien edustajien määrät yhteen. Suomalaisia on yhteensä

$$1{,}9 + 0{,}33 + 0{,}88 + 0{,}11 + 1{,}54 + 0{,}28 + 0{,}39 + 0{,}06$$
$$= \mathbf{5{,}49} \text{ (miljoonaa henkilöä).}$$

a) AB-veriryhmään kuuluvia on yhteensä $0{,}39 + 0{,}06 = 0{,}45$ (miljoonaa henkilöä). Lasketaan näiden osuus kaikista suomalaisista ja ilmaistaan osamäärä prosentteina:

$$\frac{0{,}45}{\mathbf{5{,}49}} \cdot 100\ \% = 8{,}196\ldots\ \% \approx 8{,}2\ \%.$$

Prosenttiosuus ilmaisee todennäköisyyden, että satunnaisesti valittu suomalainen kuuluu veriryhmään AB. Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"kuuluu veriryhmään AB"}) = 8{,}2\ \%.$$

Huomaa, että vastaus annetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

b)

Veriryhmä	Rh-positiivisia (milj. henkilöä)	Rh-negatiivisia (milj. henkilöä)
A	**1,9**	0,33
B	**0,88**	0,11
O	**1,54**	**0,28**
AB	**0,39**	0,06

Henkilöitä, joiden veriryhmä on **O tai Rh-positiivinen** on yhteensä

$$1{,}9 + 0{,}88 + 1{,}54 + 0{,}28 + 0{,}39 = 4{,}99 \text{ (miljoonaa henkilöä).}$$

Lasketaan näiden osuus kaikista suomalaisista ja ilmaistaan osamäärä prosentteina:

$$\frac{4{,}99}{\mathbf{5,49}} \cdot 100\ \% = 90{,}89\ldots\ \% \approx 91\ \%.$$

Prosenttiosuus ilmaisee todennäköisyyden, että satunnaisesti valitun suomalaisen veriryhmä on O tai Rh-positiivinen. Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"kuuluu veriryhmään O tai Rh+"}) = 91\ \%.$$

Huomaa, että vastaus annetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

113.

a) Alle 3000 tuntia kestävien lamppujen lukumäärä on $70 + 120 = 190$ (kappaletta). Tutkimuksessa testattiin 900 lamppua, joten kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"kestää alle 3000 tuntia"}) = \frac{190}{900} = 0{,}211\ldots \approx 0{,}21.$$

b) Vähintään 1500 tuntia kestäviä lamppuja on yhteensä $120 + 310 + 400 = \mathbf{830}$**.** Näistä 1500 tuntia kestäneistä lampuista vielä ainakin 1500 tuntia kestävät lamput kuuluvat kestoltaan vähintään 3000 tuntia kestäviin lamppuihin, joiden lukumäärä on $310 + 400 = \mathbf{710}$ (kappaletta).

Verrataan **vähintään 3000 tuntia** kestävien lamppujen lukumäärää **vähintään 1500 tuntia** kestäneiden lamppujen lukumäärään:

$$P(\text{"1500 h kestänyt kestää vielä ainakin 1500 tuntia"}) = \frac{\mathbf{710}}{\mathbf{830}}$$
$$= 0{,}855\ldots \approx 0{,}86.$$

114.

a) Tulivuoria on yhteensä $6 + 12 + 9 + 17 + 7 + 6 + 2 = 59$ (kappaletta).

Ainakin 4000 metriä korkeita tulivuoria on yhteensä $7 + 6 + 2 = 15$ (kappaletta). Lasketaan näiden osuus kaikista tulivuorista ja ilmaistaan osamäärä prosentteina:

$$\frac{15}{59} \cdot 100\ \% = 25{,}423 \ldots \% \approx 25\ \%.$$

Prosenttiosuus ilmaisee todennäköisyyden, että purkautuva tulivuori on ainakin 4000 metriä korkea. Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"korkeus on ainakin 4000 m"}) = 25\ \%.$$

b) Niitä tulivuoria, joiden korkeus on välillä 3000 m – 5999 m on yhteensä $17 + 7 + 6 = \mathbf{30}$ (kappaletta). Näistä tulivuorista ainakin 5000 metriä korkeita on yhteensä **6** (kappaletta).

Lasketaan korkeudeltaan välillä **5000 m – 5999 metriä** korkeiden tulivuorien osuus korkeudeltaan välillä **3000 m – 5999 m** olevista tulivuorista ja ilmaistaan osamäärä prosentteina:

$$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{30}} \cdot 100\ \% = 20\ \%.$$

Prosenttiosuus ilmaisee todennäköisyyden, että purkautuva tulivuori, jonka korkeuden tiedetään olevan välillä 3000 m – 5999 m, on ainakin 5000 metriä korkea. Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"korkeus on ainakin 5000 m kun korkeus on 3000 m – 5999 m"}) = 20\ \%.$$

115.

a) Taulukoituja heittoja on yhteensä $8 + 10 + 14 + 14 + 4 = 50$ (kappaletta).

Niitä heittoja, joissa kiekon lähtönopeus on korkeintaan 114 km/h oli yhteensä $8 + 10 = 18$ (kappaletta). Lasketaan näiden osuus kaikista heitoista:

$$\frac{18^{(2}}{50} = \frac{9}{25}.$$

Suhteellinen osuus ilmaisee todennäköisyyden, että heitetyn kiekon lähtönopeus on korkeintaan 114 km/h. Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"nopeus on korkeintaan 114 km/h"}) = \frac{9}{25}.$$

b) Niitä heittoja, joissa kiekon lähtönopeus on ainakin 125 km/h on yhteensä $14 + 4 = \mathbf{18}$ (kappaletta). Näistä heitoista vähintään nopeudella 135 km/h lähteneitä kiekkoja oli **4** (kappaletta).

Lasketaan **vähintään nopeudella 135 km/h** lähteneiden heittojen osuus **vähintään 125 km/h** lähteneistä heitoista:

$$\frac{\mathbf{4}^{(2}}{\mathbf{18}} = \frac{2}{9}.$$

Prosenttiosuus ilmaisee todennäköisyyden, että kiekon lähtönopeus on vähintään 135 km/h kun tiedetään, että sen nopeus on ainakin 125 km/h.

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"lähtönopeus on vähintään 135 km/h kun se on ainakin 125 km/h"}) = \frac{2}{9}.$$

116.

Lottoarvonnassa ensimmäinen numero arvotaan luvuista 1 – 40. Alkeistapauksia on 40.

a) Tapahtuma A = ”ensimmäinen numero on neljä tai kahdeksan” sisältää luvut 4 ja 8. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on siis kaksi.

$$P(A) = \frac{2}{40}^{(2} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5{,}0\ \%.$$

Huomaa, että vastaus annetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Tapahtuma A = ”ensimmäinen numero on alle 10 ja parillinen” sisältää luvut 2, 4, 6 ja 8. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on siis neljä.

$$P(A) = \frac{4}{40}^{(4} = \frac{1}{10} = 0{,}10 = 10\ \%.$$

c) Tapahtuma A = ”ensimmäinen numero on korkeintaan 19” sisältää luvut 1–19, joita on yhteensä 19. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on siis 19.

$$P(A) = \frac{19}{40} = 0{,}475 = 47{,}5\ \% \approx 48\ \%.$$

d) Tapahtuma A = ”ensimmäinen numero on vähintään 20” sisältää luvut 20–40, joita on yhteensä $40 - 19 = 21$. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on siis 21.

$$P(A) = \frac{21}{40} = 0{,}525 = 52{,}5\ \% \approx 53\ \%.$$

e) Tapahtuma A = ”ensimmäinen numero on vähintään 20 ja pariton” sisältää luvut 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37 ja 39, joita on yhteensä 10. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on siis 10.

$$P(A) = \frac{10^{(10}}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%.$$

117.

Dodekaedrin muotoinen noppa sisältää silmäluvut 1–12.
Alkeistapauksia on 12.

a) Tapahtumalle A = ”silmäluku on 1” suotuisia alkeistapauksia on yksi.

$$P(A) = \frac{1}{12}.$$

b) Tapahtuma A = ”silmäluku on vähintään 10” sisältää silmäluvut 10, 11 ja 12. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on siis kolme.

$$P(A) = \frac{3}{12}^{(3} = \frac{1}{4}.$$

c) Tapahtumalle A = ”silmäluku on 2 tai 7” suotuisia alkeistapauksia on kaksi.

$$P(A) = \frac{2}{12}^{(2} = \frac{1}{6}.$$

118.

Tavallinen noppa sisältää silmäluvut 1–6. Alkeistapauksia on kuusi.

a) Tapahtuma A = ”silmäluku on parillinen” sisältää silmäluvut 2, 4 ja 6. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on siis kolme.

$$P(A) = \frac{3}{6}^{(3} = \frac{1}{2}.$$

b) Tapahtuma A = ”silmäluku on pariton tai 6” sisältää silmäluvut 1, 3, 5 ja 6. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on siis neljä.

$$P(A) = \frac{4}{6}^{(2} = \frac{2}{3}.$$

c) Tapahtuma A = ”silmäluku on korkeintaan 2” sisältää silmäluvut 1 ja 2. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on siis kaksi.

$$P(A) = \frac{2}{6}^{(2} = \frac{1}{3}.$$

d) Tapahtuma A = ”silmäluku on vähintään 3” sisältää silmäluvut 3, 4, 5 ja 6. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on siis neljä.

$$P(A) = \frac{4}{6}^{(2} = \frac{2}{3}.$$

119.

Kennelissä on seitsemän pentua. Alkeistapauksia on seitsemän.

a) Pennuista neljä on lyhytkarvaisia. Tapahtumalle A = ”pentu on lyhytkarvainen” suotuisia alkeistapauksia on siis neljä.

$$P(A) = \frac{4}{7} = 0{,}571\ldots \approx 57\ \%.$$

b) Lyhytkarvaisia pentuja on neljä ja niistä puolet, eli kaksi pentua, on mustavalkoisia. Tapahtumalle A = ”pentu on mustavalkoinen ja lyhytkarvainen” suotuisia alkeistapauksia on siis kaksi.

$$P(A) = \frac{2}{7} = 0{,}285\ldots \approx 29\ \%.$$

c) Lyhytkarvaisia pentuja on neljä, joten pitkäkarvaisia pentuja on $7 - 4 = 3$.
Tapahtumalle A = ”pentu on pitkäkarvainen” suotuisia alkeistapauksia on siis kolme.

$$P(A) = \frac{3}{7} = 0{,}428\ldots \approx 43\ \%.$$

Todennäköisyys voidaan laskea myös vastatapahtuman avulla. Tapahtuman $A =$ ”pentu on pitkäkarvainen” vastatapahtuma on $\bar{A} =$ ”pentu on lyhytkarvainen”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa a. Kysytty todennäköisyys on

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7} = 0{,}428\ldots \approx 43\ \%.$$

120.

Ryhmässä on yhteensä $7 + 5 = 12$ henkilöä. Alkeistapauksia on 12.

a) Pojista kahden ja tytöistä yhden etunimi alkaa A-kirjaimella. Tapahtumalle A = ”etunimi alkaa A-kirjaimella” suotuisia alkeistapauksia on siis $2 + 1 = 3$.

$$P(A) = \frac{3}{12}^{(3} = \frac{1}{4}.$$

b) Henkilöitä, joiden etunimi alkaa joko A- tai K-kirjaimella on yhteensä $3 + 2 + 2 + 1 = 8$.

Ryhmässä on yhteensä 12 henkilöä. Niitä henkilöitä, joiden etunimi alkaa muulla kuin A- tai K-kirjaimella on yhteensä $12 - 8 = 4$. Tapahtumalle A = ”etunimi alkaa muulla kuin A- tai K-kirjaimella” suotuisia alkeistapauksia on siis neljä.

$$P(A) = \frac{4}{12}^{(4} = \frac{1}{3}.$$

Todennäköisyys voidaan laskea myös vastatapahtuman avulla. Tapahtuman $A =$ ”etunimi alkaa muulla kuin A- tai K-kirjaimella” vastatapahtuma on $\bar{A} =$ ”etunimi alkaa A- tai K-kirjaimella”. Vastatapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on yhteensä $3 + 2 + 2 + 1 = 8$, joten vastatapahtuman todennäköisyys on

$$P(\bar{A}) = \frac{8}{12}^{(4} = \frac{2}{3}.$$

Kysytty todennäköisyys on

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

121.

Rasiassa oli alun perin 250 hammastikkua. Näistä teräväpäisiä oli 120, joten tylppäpäisiä tikkuja oli $250 - 120 = 130$ (tylppäpäistä tikkua).

a) Rasiasta on käytetty 85 tikkua, joten jäljellä on yhteensä $250 - 85 = 165$ tikkua. Alkeistapauksia on **165**.

Käytetyistä tikuista 45 oli tylppäpäisiä, joten jäljellä on $130 - 45 = 85$ tylppäpäistä tikkua. Tapahtumalle A = ”tikun pää on tylppä” suotuisia alkeistapauksia on siis 85.

$$P(A) = \frac{85}{\mathbf{165}} = 0{,}515 \ldots \approx 52\ \%.$$

b) Rasiassa jäljellä olevista 165 tikusta 85 on tylppäpäisiä, joten teräväpäisiä tikkuja on jäljellä $165 - 85 = 80$ tikkua. Tapahtumalle A = ”tikun pää on terävä” suotuisia alkeistapauksia on siis 80.

$$P(A) = \frac{80}{\mathbf{165}} = 0{,}484 \ldots \approx 48\ \%.$$

Todennäköisyyden voi laskea myös vastatapahtuman avulla. Tapahtuman $A =$ ”tikun molemmat päät ovat teräviä” vastatapahtuma on $\bar{A} =$ ”tikun toinen pää on tylppä”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa a.

Kysytty todennäköisyys on $100\ \% - 52\ \% = 48\ \%$.

122.

Abiturientteja on yhteensä $39 + 45 + 18 + 11 + 5 + 2 = 120$ abiturienttia. Alkeistapauksia on siis 120.

a) Tapahtumalle A = ”suorittanut vähintään 81 kurssia” suotuisia alkeistapauksia on $18 + 11 + 5 + 2 = 36$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{36}{120} = 0{,}30.$$

Huomaa, että vastaus annetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Vähintään 81 kurssia suorittaneita abiturientteja on yhteensä **36** abiturientteja. Näistä 36 abiturientista vielä ainakin 6 kurssia suorittavat abiturientit kuuluvat kurssimäärältään vähintään 87 kurssia suorittaneisiin abiturientteihin, joiden lukumäärä on $5 + 2 = \mathbf{7}$ (abiturienttia).

Verrataan **vähintään 87 kurssia** suorittaneiden abiturienttien lukumäärää **vähintään 81 kurssia** suorittaneiden abiturienttien lukumäärään:

$$P(\text{"81 kurssia suorittanut suorittaa vielä ainakin 6 kurssia"}) = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{36}} = 0{,}194\ldots \approx 0{,}19.$$

123.

a) Ryhmässä on yhteensä 16 henkilöä. Alkeistapauksia on siis 16.

Vaaleahiuksia on yhteensä $3 + 6 = 9$ henkilöä. Tapahtumalle A = ”henkilö on vaaleahiuksinen” suotuisia alkeistapauksia on siis yhdeksän.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{9}{16}.$$

b) Naisia on yhteensä 8 henkilöä. Alkeistapauksia on siis 8.

Vaaleahiuksia naisia on 6 henkilöä. Tapahtumalle A = ”naisista valittu henkilö on vaaleahiuksinen” suotuisia alkeistapauksia on siis kuusi.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{6^{(2}}{8} = \frac{3}{4}.$$

c) Ryhmässä on yhteensä 16 henkilöä. Alkeistapauksia on siis 16.

Vaaleahiuksia on yhteensä 9 henkilöä, joten ei-vaaleahiuksisia on $16 - 9 = 7$. Tapahtumalle A = ”henkilö ei ole vaaleahiuksinen” suotuisia alkeistapauksia on siis seitsemän.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{7}{16}.$$

Todennäköisyys voidaan laskea myös vastatapahtuman avulla. Tapahtuma ”henkilö ei ole vaaleahiuksinen” on tapahtuman A = ”henkilö on vaaleahiuksinen” vastatapahtuma. Vastatapahtuman todennäköisyys on

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} - \frac{9}{16} = \frac{16 - 9}{16} = \frac{7}{16}.$$

d) Miehiä on yhteensä 8 henkilöä. Alkeistapauksia on siis 8.

Vaaleahiuksia miehiä on kolme, joten ei-vaaleahiuksia miehiä on $8 - 3 = 5$ (miestä). Tapahtuman $A =$”miehistä valittu henkilö ei ole vaaleahiuksinen” todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{5}{8}.$$

124.

Lasketaan pyörityskertojen kokonaismäärä:

$$16 + 11 + 10 + 4 + 105 = 146.$$

a) Voittosumma 10 euroa tuli 11 tapauksessa pyörityksistä, joten sen osuus kaikista pyörityksistä on $\frac{11}{146} = 0{,}0753 \ldots \approx 7{,}5\ \%$. Prosenttiosuus ilmaisee todennäköisyyden, että pelaaja voittaa 10 euroa.

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"voittosumma on 10 eur"}) = \frac{11}{146} \approx 7{,}5\ \%.$$

b) ”Ei voittoa” vastaa voittosummaa 0 euroa, joka tuli 105 tapauksessa pyörityksistä. Tapahtuman ”ei voittoa” osuus kaikista pyörityksistä on $\frac{105}{146} = 0{,}719 \ldots \approx 72\ \%$. Prosenttiosuus ilmaisee todennäköisyyden, että pelaaja ei saa voittoa.

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"ei voittoa"}) = \frac{105}{146} \approx 72\ \%.$$

c) ”Vähintään 100 euroa” vastaa voittosummaa 100 euroa tai 500 euroa. Jompikumpi näistä voittosummista tuli $10 + 4 = 14$ tapauksessa pyörityksistä. Näiden osuus kaikista pyörityksistä on $\frac{14}{146} = 0{,}0958 \ldots \approx 9{,}6\ \%$. Prosenttiosuus ilmaisee todennäköisyyden, että pelaaja saa vähintään 100 euron voiton.

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"voittosumma vähintään 100 eur"}) = \frac{14}{146} \approx 9{,}6\ \%.$$

d) ”Vähemmän kuin 10 euroa tai ei voittoa lainkaan” vastaa voittosummaa 5 euroa tai 0 euroa. Jompikumpi näistä voittosummista tuli $16 + 105 = 121$ tapauksessa pyörityksistä. Näiden osuus kaikista pyörityksistä on $\frac{121}{146} = 0{,}828 \ldots \approx 83\ \%$. Prosenttiosuus ilmaisee todennäköisyyden, että pelaaja saa vähemmän kuin 10 euron voiton tai ei voittoa lainkaan.

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"voittosumma vähemmän kuin 10 eur tai ei voittoa"}) = \frac{121}{146}$$
$$\approx 83\ \%.$$

2.2 Todennäköisyyslaskennan malleja

125.

Merkitään kutakin henkilöä hänen nimensä alkukirjaimen avulla:

M = Mirja T = Tiina O = Otto V = Verneri

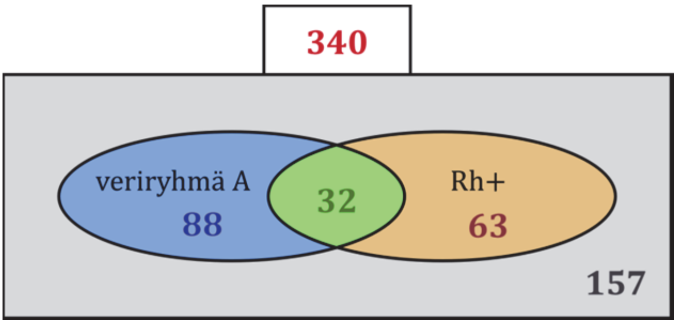
a) Työparin muodostaa mitkä tahansa kaksi henkilöä.
Mahdollisia työpareja on kuusi: MT, MO, MV, TO, TV ja OV.

b) Mahdollisia kolmen henkilön ryhmiä on neljä: MTO, MTV, MOV ja TOV.

126.

Sijoitetaan Venn-diagrammiin:

- opiskelijoiden yhteismäärä: **340** opiskelijaa.
- sekä veriryhmään A että Rh-positiivisiin kuuluvien yhteismäärä on **32**.
- veriryhmään A kuuluvat, jotka eivät kuulu Rh-positiivisiin: näitä on yhteensä $120 - 32 = \mathbf{88}$ opiskelijaa.
- Rh-positiivisten ryhmään kuuluvat, jotka eivät kuulu veriryhmään A: näitä on yhteensä $95 - 32 = \mathbf{63}$ opiskelijaa.
- niiden opiskelijoiden lukumäärä, jotka eivät kuulu veriryhmään A eivätkä Rh-positiivisten ryhmään: näitä opiskelijoita on $\mathbf{340} - \mathbf{88} - \mathbf{32} - \mathbf{63} = \mathbf{157}$. Tämä luku tulee Venn-diagrammin oikeaan alakulmaan.



127.

Merkitään kutakin lihalajia sanan alkukirjaimen avulla:

A = ankka H = hanhi P = porsaanpaisti

N = naudanpaisti J = jänis

Listataan kaikki kahden ruokalajin yhdistelmät. Ensimmäiseen ruokalajiin voidaan valita mikä hyvänsä viidestä vaihtoehdosta. Tämän jälkeen toiseen ruokalajiin voidaan valita mikä hyvänsä jäljellä olevista neljästä vaihtoehdosta. Erilaisia alkeistapauksia, eli kahden ruokalajin illallisia on yhteensä 20:

AH	AP	AN	AJ
HA	HP	HN	HJ
PA	PH	PN	PJ
NA	NH	NP	NJ
JA	JH	JP	JN

Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapauksien osuus kaikista alkeistapauksista.

a) Tapahtumalle ”illallisella tarjotaan jänistä” suotuisia ovat ne alkeistapaukset, joissa esiintyy **J**-kirjain**.** Suotuisia alkeistapauksia on yhteensä kahdeksan:

AH	AP	AN	A**J**
HA	HP	HN	H**J**
PA	PH	PN	P**J**
NA	NH	NP	N**J**
JA	**J**H	**J**P	**J**N

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"illallisella tarjotaan jänistä"}) = \frac{8}{20}^{(4} = \frac{2}{5}.$$

b) Illallisella tarjoillaan lintua, jos tarjolla on ankkaa tai hanhea. Tapahtumalle ”illallisella tarjotaan lintua ja nautaa” suotuisia ovat ne alkeistapaukset, joissa esiintyy joko **A-** tai **H-**kirjain ja sen parina **N-**kirjain. Suotuisia alkeistapauksia on yhteensä neljä:

AH	AP	**AN**	AJ
HA	HP	**HN**	HJ
PA	PH	PN	PJ
NA	**NH**	NP	NJ
JA	JH	JP	JN

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"illallisella tarjotaan lintua ja nautaa"}) = \frac{4}{20}^{(4} = \frac{1}{5}.$$

c) Tapahtumalle ”illallisella ei tarjota porsasta” suotuisia ovat ne alkeistapaukset, joissa ei esiinny P-kirjainta. Suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 12:

AH	AP	**AN**	**AJ**
HA	HP	**HN**	**HJ**
PA	PH	PN	PJ
NA	**NH**	NP	**NJ**
JA	**JH**	JP	**JN**

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"illallisella ei tarjoilla porsasta"}) = \frac{12^{(4}}{20} = \frac{3}{5}.$$

128.

Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapauksien osuus kaikista alkeistapauksista. Esimerkissä 1 on laskettu kaikkien alkeistapauksien lukumäärä tilanteessa, jossa viidestä henkilöstä muodostetaan kolmen henkilön ryhmä. Erilaisia alkeistapauksia on yhteensä 10.

a) Tapahtumalle ”kaikki ankanpojat pääsevät loppukilpailuun” suotuisia alkeistapauksia on ainoastaan yksi (THL).

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"kaikki ankanpojat pääsevät loppukilpailuun"}) = \frac{1}{10}.$$

b) Loppukilpailijat valitaan viiden opiskelijan joukosta, joista kolme on ankanpoikia ja loput kaksi muita opiskelijoita. Koska loppukilpailuun valitaan kolme opiskelijaa, ja ehdokkaista vain kaksi on ei-ankanpoikia, niin loppukilpailijoiden joukossa on varmasti ainakin yksi ankanpoika. Tapahtuma ”kukaan ankanpojista ei pääse loppukilpailuun” on siis mahdoton eikä yksikään alkeistapauksista ole sille suotuisa, eli tapahtumalle suotuisien alkeistapauksien lukumäärä on 0.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"kukaan ankanpojista ei pääse loppukilpailuun"}) = \frac{0}{10} = 0.$$

c) Ainakin yksi ankanpojista pääsee varmasti mukaan loppukilpailuun. Tapahtuma ”ainakin yksi ankanpoika pääsee loppukilpailuun” on siis varma ja kaikki alkeistapaukset ovat sille suotuisia.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ainakin yksi ankanpoika pääsee loppukilpailuun"}) = \frac{10}{10} = 1.$$

129.

Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapauksien osuus kaikista alkeistapauksista. Lasketaan ensin kaikkien alkeistapauksien lukumäärä, eli kaikki mahdolliset arvonnan tulokset. Merkitään kutakin henkilöä hänen nimensä alkukirjaimen avulla:

R = Reetta S = Sanni L = Lauri I = Ida T = Tino O = Olli

Näistä henkilöistä kolme saa lipun konserttiin. Kaikki mahdolliset arvonnan tulokset ovat:

RSL	**R**SI	**R**ST	**R**SO
RLI	**R**LT	**R**LO	
RIT	**R**IO	**R**TO	
SLI	SLT	SLO	
SIT	SIO	STO	
LIT	LIO	LTO	ITO

Alkeistapauksia, eli arvonnan tuloksia, on yhteensä 20.

a) Tapahtumalle ”Reetta saa konserttilipun” suotuisia alkeistapauksia ovat ne, joissa esiintyy **R**-kirjain. Näitä on yhteensä 10.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"Reetta saa konserttilipun"}) = \frac{10^{(10}}{20} = \frac{1}{2}.$$

b) Tapahtumalle ”Sanni, Lauri ja Ida saavat konserttilipun” suotuisia alkeistapauksia on ainoastaan yksi (SLI).

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"Sanni, Lauri ja Ida saavat konserttilipun"}) = \frac{1}{20}.$$

c) Tapahtumalle ”joko Tino tai Olli saa konserttilipun mutta eivät molemmat” suotuisia alkeistapauksia ovat ne, joissa esiintyy **T** tai **O**-kirjain, mutta eivät ne, joissa on sekä T- että O-kirjain. Näitä on yhteensä 12:

RSL	RSI	RS**T**	RS**O**
RLI	RL**T**	RL**O**	
RI**T**	RI**O**	RTO	
SLI	SL**T**	SL**O**	
SI**T**	SI**O**	STO	
LI**T**	LI**O**	LTO	ITO

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"joko Tino tai Olli saa konserttilipun mutta eivät molemmat"})$$
$$= \frac{12^{(4}}{20} = \frac{3}{5}.$$

130.

a) Täydennetään taulukko. Oppilaita on yhteensä **50** (kappaletta). Oppilaista 36 % osallistuu kuoron toimintaan, joten kuoron toimintaan osallistuvia on

$$0{,}36 \cdot 50 = \mathbf{18} \text{ (oppilasta).}$$

Oppilaista 52 % soittaa bändissä, joten bändissä soittavia on

$$0{,}52 \cdot 50 = \mathbf{26} \text{ (oppilasta).}$$

Oppilaista 4 % sekä osallistuu kuoron toimintaan että soittaa bändissä. Näitä oppilaita on

$$0{,}04 \cdot 50 = \mathbf{2} \text{ (oppilasta).}$$

Sijoitetaan nämä luvut taulukkoon.

	Kuoro	**Ei kuoro**	**Yhteensä**
Bändi	**2**		**26**
Ei bändi			
Yhteensä	**18**		**50**

Lasketaan taulukosta puuttuvat tiedot annettujen tietojen avulla.

	Kuoro	**Ei kuoro**	**Yhteensä**
Bändi	2	$26 - 2 = 24$	26
Ei bändi	$18 - 2 = 16$	$24 - 16 = 8$	$50 - 26 = 24$
Yhteensä	18	$24 + 8 = 32$	**50**

b) Oppilas valitaan koko ryhmästä, joten alkeistapauksia on yhteensä 50. Tapahtumalle ”ei osallistu kumpaankaan” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä **8**.

	Kuoro	**Ei kuoro**	**Yhteensä**
Bändi	2	24	26
Ei bändi	16	**8**	24
Yhteensä	18	32	**50**

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ei osallistu kumpaakaan"}) = \frac{8}{50}^{(2} = \frac{4}{25}.$$

c) Oppilas valitaan koko ryhmästä, joten alkeistapauksia on yhteensä 50. Tapahtumalle ”osallistuu ainakin toiseen” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä $\mathbf{2} + \mathbf{24} + \mathbf{16} = 42$.

	Kuoro	**Ei kuoro**	**Yhteensä**
Bändi	**2**	**24**	26
Ei bändi	**16**	8	24
Yhteensä	18	32	**50**

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"osallistuu ainakin toiseen"}) = \frac{42}{50}^{(2} = \frac{21}{25}.$$

d) Oppilas valitaan koko ryhmästä, joten alkeistapauksia on yhteensä 50. Tapahtumalle ”osallistuu vain yhteen” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä **24** + **16** = 40.

	Kuoro	**Ei kuoro**	**Yhteensä**
Bändi	2	**24**	26
Ei bändi	**16**	8	24
Yhteensä	18	32	**50**

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"osallistuu vain yhteen"}) = \frac{40}{50}^{(10} = \frac{4}{5}.$$

e) Oppilas valitaan kuorossa laulavien joukosta, joten alkeistapauksia on yhteensä 18. Näistä tapahtumalle ”soittaa myös bändissä” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 2.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"kuorossa laulava soittaa myös bändissä"}) = \frac{2}{18}^{(2} = \frac{1}{9}.$$

131.

Tehtävän ratkaisussa voidaan hyödyntää joko taulukkoa tai Venn-diagrammia.

Ratkaistaan tehtävä ensin taulukon avulla. Aloitetaan sijoittamalla tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

	Haluaa taidemuseoon	**Ei halua taidemuseoon**	**Yhteensä**
Haluaa eläintarhaan	5		13
Ei halua eläintarhaan			
Yhteensä	12		**28**

Lasketaan taulukosta puuttuvat tiedot annettujen tietojen avulla.

	Haluaa taidemuseoon	**Ei halua taidemuseoon**	**Yhteensä**
Haluaa eläintarhaan	5	$13 - 5 = 8$	13
Ei halua eläintarhaan	$12 - 5 = 7$	$15 - 7 = 8$	$28 - 13 = 15$
Yhteensä	12	$28 - 12 = 16$	**28**

a) Henkilö valitaan kaikista luokkaretkelle osallistuvista, joten alkeistapauksia on **28.** Vain taidemuseossa haluaa käydä 7 opiskelijaa ja vain eläintarhassa haluaa käydä 8 opiskelijaa, joten vain toiseen paikkaan haluavia on yhteensä $7 + 8 = 15$ lukiolaista.

Kysytty todennäköisyys on

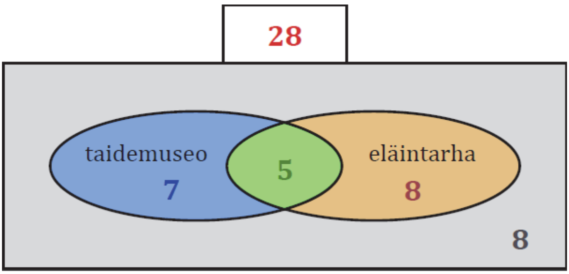
$$P(\text{"haluaa käydä vain toisessa paikassa"}) = \frac{15}{28}.$$

b) Henkilö valitaan eläintarhaan menevistä. Näitä on yhteensä 13 opiskelijaa, joten alkeistapauksia on 13. Näistä 8 haluaa käydä vain eläintarhassa. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"on menossa eläintarhaan ja haluaa käydä vain siellä"}) = \frac{8}{13}.$$

Tehtävä voidaan ratkaista myös Venn-diagrammin avulla. Sijoitetaan Venn-diagrammiin lukuarvot:

- luokkaretkelle osallistuvien opiskelijoiden yhteismäärä **28**
- sekä taidemuseoon että eläintarhaan haluavien lukumäärä **5**
- vain taidemuseoon haluavien lukumäärä $12 - 5 = \mathbf{7}$
- vain eläintarhaan haluavien lukumäärä $13 - 5 = \mathbf{8}$
- niiden opiskelijoiden lukumäärä, jotka eivät halua kumpaankaan: $28 - 5 - 7 - 8 = \mathbf{8}$



a) Henkilö valitaan kaikista luokkaretkelle osallistuvista, joten alkeistapauksia on 28. Vain toiseen paikkaan haluavia on yhteensä $7 + 8 = 15$ lukiolaista.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"haluaa käydä vain toisessa paikassa"}) = \frac{15}{28}.$$

b) Henkilö valitaan eläintarhaan menevistä. Näitä on yhteensä $5+8=13$ opiskelijaa, joten alkeistapauksia on 13. Näistä kahdeksan haluaa käydä vain eläintarhassa.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"on menossa eläintarhaan ja haluaa käydä vain siellä"}) = \frac{8}{13}.$$

132.

Tehtävän ratkaisussa voidaan hyödyntää joko taulukkoa tai Venn-diagrammia.

Ratkaistaan tehtävä ensin taulukon avulla. Aloitetaan sijoittamalla tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

	Käy työssä	**Ei käy työssä**	**Yhteensä**
On äiti	14		19
Ei ole äiti		6	
Yhteensä	17		

Lasketaan taulukosta puuttuvat tiedot annettujen tietojen avulla.

	Käy työssä	**Ei käy työssä**	**Yhteensä**
On äiti	14	$19 - 14 = 5$	19
Ei ole äiti	$17 - 14 = 3$	6	$3 + 6 = 9$
Yhteensä	17	$5 + 6 = 11$	$19 + 9 = \mathbf{28}$ $17 + 11 = \mathbf{28}$

a) Henkilö valitaan kaikista yhdistyksen naisjäsenistä, joten alkeistapauksia on yhteensä **28**. Tapahtumalle ”ei ole äiti” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 9. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ei ole äiti"}) = \frac{9}{28}.$$

b) Henkilö valitaan kaikista yhdistyksen naisjäsenistä, joten alkeistapauksia on yhteensä **28**. Tapahtumalle ”ei käy työssä” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 11. Kysytty todennäköisyys on

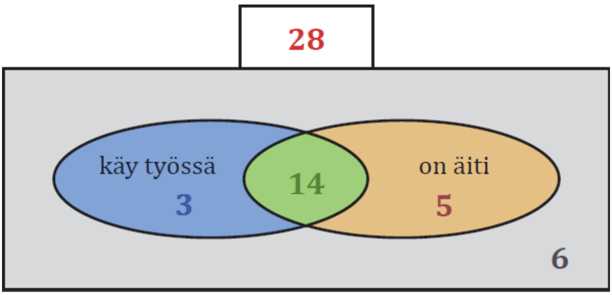
$$P(\text{"ei käy työssä"}) = \frac{11}{28}.$$

c) Henkilö valitaan työssäkäyvistä naisjäsenistä, joita on 17. Alkeistapauksia on siis yhteensä 17. Näistä tapahtumalle ”ei ole äiti” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 3. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"työssäkäyvistä valittu ei ole äiti"}) = \frac{3}{17}.$$

Tehtävä voidaan ratkaista myös Venn-diagrammin avulla. Sijoitetaan Venn-diagrammiin lukuarvot:

- työssäkäyvien äitien lukumäärä **14**
- niiden työssäkäyvien lukumäärä, joilla ei ole lapsia: $17 - 14 = \mathbf{3}$
- niiden äitien lukumäärä, jotka eivät käy töissä: $19 - 14 = \mathbf{5}$
- niiden naisjäsenien lukumäärä, jotka eivät käy töissä ja joilla ei ole lapsia: **6**
- yhdistyksen naisjäsenten yhteismäärä, joka on $3 + 14 + 5 + 6 = \mathbf{28}$



a) Henkilö valitaan koko ryhmästä, joten alkeistapauksia on yhteensä 28. Niiden naisjäsenten lukumäärä, jotka eivät ole äitejä on $3 + 6 = 9$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ei ole äiti"}) = \frac{9}{28}.$$

b) Henkilö valitaan koko ryhmästä, joten alkeistapauksia on yhteensä 28. Niiden naisjäsenten lukumäärä, jotka eivät käy töissä on $5 + 6 = 11$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ei käy töissä"}) = \frac{11}{28}.$$

c) Henkilö valitaan työssäkäyvien joukosta, joita on yhteensä $3 + 14 = 17$. Alkeistapauksia on siis 17. Näistä niiden lukumäärä, jotka eivät ole äitejä on 3.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"työssäkäyvä naisjäsen ei ole äiti"}) = \frac{3}{17}.$$

133.

a) Oppilaista vasenkätisiä on 20 %, joten oikeakätisiä on $100\ \% - 20\ \% = 80\ \%$. Prosenttiosuus kertoo myös todennäköisyyden sille, että satunnaisesti valittu oppilas on oikeakätinen. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"oikeakätinen"}) = 80\ \%.$$

Tehtävän b- ja c-kohtia varten laaditaan ratkaisun avuksi taulukko. Sijoitetaan ensin tehtävänannossa annetut prosenttiosuudet taulukkoon:

	Sinisilmäinen	**Ei sinisilmäinen**	**Yhteensä**
Vasenkätinen	10		20
Oikeakätinen			
Yhteensä	40		

Kaikkien oppilaiden osuus prosentteina on 100 %. Lasketaan taulukosta puuttuvat tiedot annettujen avulla:

	Sinisilmäinen	**Ei sinisilmäinen**	**Yhteensä**
Vasenkätinen	10	$20 - 10 = 10$	20
Oikeakätinen	$40 - 10 = 30$	$60 - 10 = 50$	$100 - 20 = 80$
Yhteensä	40	$100 - 40 = 60$	**100**

b) Tapahtumalle ”oppilas ei ole oikeakätinen eikä sinisilmäinen” eli tapahtumalle ”oppilas on vasenkätinen ja ei sinisilmäinen” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä **10 %**.

	Sinisilmäinen	**Ei sinisilmäinen**	**Yhteensä**
Vasenkätinen	10 %	**10 %**	20 %
Oikeakätinen	30 %	50 %	80 %
Yhteensä	40 %	60 %	**100 %**

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"oppilas ei ole oikeakätinen eikä sinisilmäinen"}) = \mathbf{10\ \%}.$$

c) Oikeakätisiä oppilaita on **80 %**. Näistä sinisilmäisiä on **30 %**.

	Sinisilmäinen	**Ei sinisilmäinen**	**Yhteensä**
Vasenkätinen	10 %	10 %	20 %
Oikeakätinen	**30 %**	50 %	**80 %**
Yhteensä	40 %	60 %	**100 %**

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"oikeakätisistä valittu oppilas on sinisilmäinen"}) = \frac{30}{80}$$
$$= 0{,}375 \approx 38\ \%.$$

Ratkaisussa käytettiin prosenttiosuuksia, mutta tehtävä voidaan ratkaista myös lukumäärien avulla. Kaikkien oppilaiden lukumäärää ei ole kerrottu. Tehtävässä tarkastellaan suhteellisia osuuksia, joten voidaan päättää, että luokalla on esimerkiksi **30** oppilasta. (Laskun kannalta ei ole merkitystä, mitä lukua käytät. Lukuarvon tilalla voidaan käyttää myös kirjainta, tai lukuarvojen tilalla voidaan käyttää prosenttiosuuksia.)

- Oppilaista 40 % on sinisilmäisiä. Sinisilmäisiä oppilaita on $0{,}4 \cdot 30 = \mathbf{12}$ (oppilasta).
- Oppilaista 20 % on vasenkätisiä. Vasenkätisiä on $0{,}2 \cdot 30 = \mathbf{6}$ (oppilasta).
- Oppilaista 10 % on sekä sinisilmäisiä että vasenkätisiä. Näitä oppilaita on $0{,}1 \cdot 30 = \mathbf{3}$ (oppilasta).

Lasketaan taulukosta puuttuvat tiedot annettujen tietojen avulla.

	Sinisilmäinen	**Ei sinisilmäinen**	**Yhteensä**
Vasenkätinen	**3**	$6 - 3 = 3$	**6**
Oikeakätinen	$12 - 3 = 9$	$24 - 9 = 15$	$30 - 6 = 24$
Yhteensä	**12**	$3 + 15 = 18$	**30**

a) Tapahtumalle ”on oikeakätinen” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 24. Oppilas valitaan kaikkien luokan oppilaiden joukosta, joten kaikkien alkeistapauksien lukumäärä on 30. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"oikeakätinen"}) = \frac{24}{30} = 0{,}8 = 80\ \%.$$

b) Oppilas valitaan kaikkien luokan oppilaiden joukosta, joten kaikkien alkeistapauksien lukumäärä on 30. Tapahtumalle ”ei ole oikeakätinen eikä sinisilmäinen” eli tapahtumalle ”vasenkätinen ja ei sinisilmäinen” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 3.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ei ole oikeakätinen eikä sinisilmäinen"}) = \frac{3}{30} = 0{,}1 = 10\ \%.$$

c) Oppilas valitaan oikeakätisten joukosta, joten alkeistapauksia on yhteensä 24. Näiden oppilaiden joukossa tapahtumalle ”on sinisilmäinen” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 9.

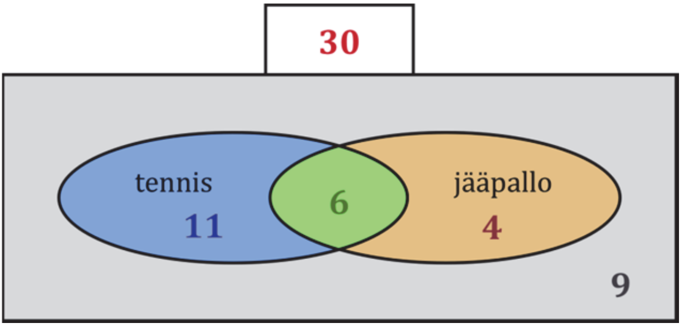
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"oikeakätisistä valittu on sinisilmäinen"}) = \frac{9}{24} = 0{,}375 \approx 38\ \%.$$

134.

Ratkaistaan tehtävä Venn-diagrammin avulla. Sijoitetaan Venn-diagrammiin lukuarvot:

- ryhmään kuuluvien henkilöiden yhteismäärä on **30**
- sekä tennistä että jääpalloa harrastavien lukumäärä on **6**
- vain tennistä harrastavien lukumäärä on $17 - 6 = \mathbf{11}$
- vain jääpalloa harrastavien lukumäärä on $10 - 6 = \mathbf{4}$
- niiden opiskelijoiden lukumäärä, jotka eivät harrasta kumpaankaan lajia on $\mathbf{30} - \mathbf{6} - \mathbf{11} - \mathbf{4} = \mathbf{9}$



Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapauksien osuus kaikista alkeistapauksista.

a) Henkilö valitaan koko ryhmästä, joten alkeistapauksia on yhteensä **30**. Tapahtumalle ”pelaa vain tennistä” suotuisia alkeistapauksia on **11**. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"pelaa vain tennistä"}) = \frac{11}{30}.$$

b) Henkilö valitaan koko ryhmästä, joten alkeistapauksia on yhteensä **30**. Tapahtumalle ”pelaa joko tennistä tai jääpalloa (tai molempia)” suotuisia alkeistapauksia $\mathbf{11} + \mathbf{6} + \mathbf{4} = 21$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"pelaa joko tennistä tai jääpalloa (tai molempia)"}) = \frac{21}{30}^{(3} = \frac{7}{10}.$$

c) Henkilö valitaan koko ryhmästä, joten alkeistapauksia on yhteensä **30**. Tapahtumalle ”harrastaa vain toista lajia” suotuisia alkeistapauksia on $\mathbf{11} + \mathbf{4} = 15$.

Kysytty todennäköisyys on

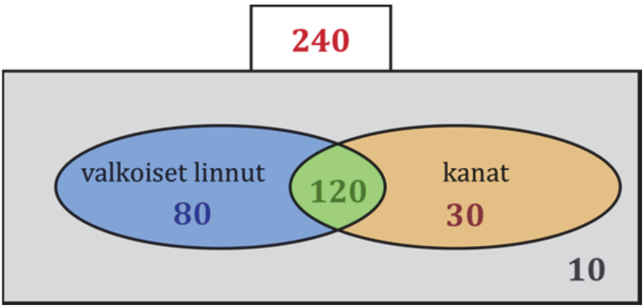
$$P(\text{"harrastaa vain toista lajia"}) = \frac{15}{30}^{(15} = \frac{1}{2}.$$

Tehtävä voidaan ratkaista myös taulukon avulla.

135.

Ratkaistaan tehtävä Venn-diagrammin avulla. Sijoitetaan Venn-diagrammiin lukuarvot:

- lintujen yhteismäärä on $\mathbf{240}$
- valkoisten kanojen lukumäärä on $\mathbf{120}$
- niiden valkoisten lintujen lukumäärä, jotka eivät ole kanoja on $200 - 120 = \mathbf{80}$
- niiden kanojen lukumäärä, jotka eivät ole valkoisia on $150 - 120 = \mathbf{30}$
- niiden lintujen lukumäärä, jotka eivät ole valkoisia eivätkä ole kanoja on $\mathbf{240} - \mathbf{120} - \mathbf{80} - \mathbf{30} = \mathbf{10}$



Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapauksien osuus kaikista alkeistapauksista.

a) Lintu valitaan kaikista linnuista, joten alkeistapauksia on yhteensä **240**. Tapahtumalle ”valkoinen lintu, joka ei ole kana” suotuisia alkeistapauksia on **80**.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"valkoinen lintu, joka ei ole kana"}) = \frac{80}{240}^{(10} = \frac{8}{24}^{(8} = \frac{1}{3}.$$

b) Lintu valitaan kaikista linnuista, joten alkeistapauksia on yhteensä **240**. Tapahtumalle ”kana, joka ei ole valkoinen” suotuisia alkeistapauksia on **30**.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"kana, joka ei ole valkoinen"}) = \frac{30}{240}^{(10} = \frac{3}{24}^{(3} = \frac{1}{8}.$$

c) Lintu valitaan kaikista linnuista, joten alkeistapauksia on yhteensä **240**. Tapahtumalle ”lintu, joka ei ole valkoinen eikä kana” suotuisia alkeistapauksia on **10**.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"lintu, joka ei ole valkoinen eikä kana"}) = \frac{10}{240}^{(10} = \frac{1}{24}.$$

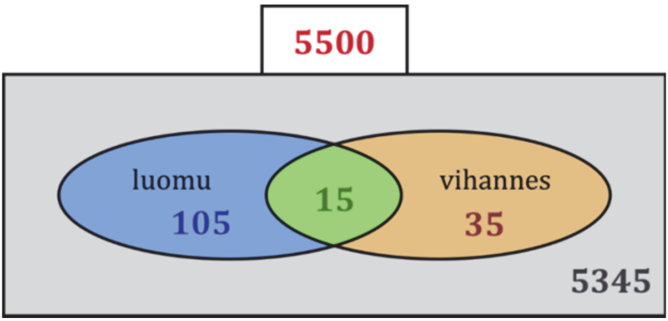
Tehtävä voidaan ratkaista myös taulukon avulla.

136.

Tehtävän ratkaisussa voidaan hyödyntää joko Venn-diagrammia tai taulukkoa.

Ratkaistaan tehtävä ensin Venn-diagrammin avulla. Sijoitetaan Venn-diagrammiin lukuarvot:

- myynnissä olevien tuotteiden yhteismäärä on $\mathbf{5500}$
- luomuvihannesten lukumäärä on $\mathbf{15}$
- niiden luomutuotteiden lukumäärä, jotka eivät ole vihanneksia on $120 - 15 = \mathbf{105}$
- niiden vihannesten lukumäärä, jotka eivät ole luomua on $50 - 15 = \mathbf{35}$
- niiden tuotteiden lukumäärä, jotka eivät ole luomutuotteita eivätkä ole vihanneksia on $\mathbf{5500} - \mathbf{15} - \mathbf{105} - \mathbf{35} = \mathbf{5345}$



Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapauksien osuus kaikista alkeistapauksista.

a) Tuote valitaan kaikista myynnissä olevista tuotteista, joten alkeistapauksia on yhteensä **5500**. Niiden luomutuotteiden lukumäärä, jotka eivät ole vihanneksia on **105**.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{"on luomutuote muttei vihannes"}) &= \frac{105}{5500} \\ &= 0{,}0190\ldots \approx 0{,}019. \end{aligned}$$

Huomaa, että vastaus annetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Tuote valitaan kaikista myymälän tuotteista, joten alkeistapauksia on yhteensä **5500**. Niiden vihannesten lukumäärä, jotka eivät ole luomua on **35**.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{"ei ole luomutuote mutta on vihannes"}) &= \frac{35}{5500} \\ &= 0{,}00636\ldots \approx 0{,}0064. \end{aligned}$$

c) Tuote valitaan kaikista myymälän tuotteista, joten alkeistapauksia on yhteensä **5500**. Niiden tuotteiden lukumäärä, jotka eivät ole luomutuotteita eivätkä vihanneksia on **5345**.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{"ei ole luomutuote eikä vihannes"}) &= \frac{5345}{5500} \\ &= 0{,}971\ldots \approx 0{,}97. \end{aligned}$$

Tehtävä voidaan ratkaista myös taulukon avulla. Sijoitetaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

	Luomu	**Ei luomu**	**Yhteensä**
Vihannes	15		50
Muut tuote			
Yhteensä	120		**5500**

Lasketaan taulukosta puuttuvat tiedot annettujen tietojen avulla.

	Luomu	**Ei luomu**	**Yhteensä**
Vihannes	15	$50 - 15 = \mathbf{35}$	50
Ei vihannes	$120 - 15 = \mathbf{105}$	$5450 - 105 = \mathbf{5345}$	$5500 - 50 = 5450$
Yhteensä	120	$35 + 5345 = 5380$	**5500**

a) Tuote valitaan kaikista myymälän tuotteista, joten alkeistapauksia on yhteensä **5500**. Tapahtumalle ”on luomutuote mutta ei vihannes” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä **105**.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"on luomutuote mutta ei vihannes"}) = \frac{105}{5500}$$

$$= 0{,}0190\ldots \approx 0{,}019.$$

Huomaa, että vastaus annetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Tuote valitaan kaikista myymälän tuotteista, joten alkeistapauksia on yhteensä **5500**. Tapahtumalle ”ei ole luomutuote mutta on vihannes” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä **35**.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ei ole luomutuote mutta on vihannes"}) = \frac{35}{5500}$$
$$= 0{,}00636\ldots \approx 0{,}0064.$$

Huomaa, että vastaus annetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

c) Tuote valitaan kaikista myymälän tuotteista, joten alkeistapauksia on yhteensä **5500**. Tapahtumalle ”ei ole luomutuote eikä vihannes” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä **5345**.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ei ole luomutuote eikä vihannes"}) = \frac{5345}{5500} = 0{,}971\ldots \approx 0{,}97.$$

137.

Ratkaistaan tehtävä taulukon avulla. Puita on yhteensä **200** (kappaletta). Puista **80** on haapoja, joten koivuja on $200 - 80 = \mathbf{120}$.

Haavoista 30 % kärsii tuholaisista. Näitä haapoja on $0{,}3 \cdot 80 = \mathbf{24}$ (haapaa).

Koivuista 20 % kärsii tuholaisista. Näitä koivuja on $0{,}2 \cdot 120 = \mathbf{24}$ (koivua).

Lasketaan taulukosta vielä puuttuvat tiedot annettujen tietojen avulla.

	Haapa	**Koivu**	**Yhteensä**
Kärsii tuholaisista	**24**	**24**	$24 + 24 = 48$
Ei kärsi tuholaisista	$80 - 24 = 56$	$120 - 24 = \mathbf{96}$	$200 - 48 = 152$
Yhteensä	**80**	**120**	**200**

Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapauksien osuus kaikista alkeistapauksista.

a) Puu valitaan kaikista kaadetuista puista, joten alkeistapauksia on yhteensä **200**. Haapoja on 80.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"valittu puu on haapa"}) = \frac{80}{200}^{(10} = \frac{8}{20}^{(4} = \frac{2}{5}.$$

b) Puu valitaan kaikista kaadetuista puista, joten alkeistapauksia on yhteensä **200**. Niitä koivuja, jotka eivät kärsi tuholaisista on **96**.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"valittu puu on koivu, joka ei kärsi tuholaisista"}) = \frac{96}{200}^{(4}$$

$$= \frac{24}{50}^{(2} = \frac{12}{25}.$$

c) Puu valitaan kaadetuista koivuista, joiden lukumäärä on 120. Alkeistapauksia on siis yhteensä **120**. Niitä koivuja, jotka eivät kärsi tuholaisista on **96**.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"koivuista valittu puu ei kärsi tuholaisista"}) = \frac{96}{120}^{(4}$$

$$= \frac{24}{30}^{(6} = \frac{4}{5}.$$

138.

Kahden nopan heitossa alkeistapaukset ovat kahden silmäluvun pareja. Havainnollistetaan alkeistapauksia taulukon avulla.

2. noppa							
	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	2	(1 ,2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
		1. noppa					

Alkeistapauksia on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$.

a) Tapahtumalle ”molemmilla nopilla saadaan sama silmäluku” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä kuusi.

2. noppa							
	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	**(6, 6)**
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	**(5, 5)**	(6, 5)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	**(4, 4)**	(5, 4)	(6, 4)
	3	(1, 3)	(2, 3)	**(3, 3)**	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	2	(1, 2)	**(2, 2)**	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	1	**(1, 1)**	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
		1. noppa					

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"sama silmäluku"}) = \frac{6}{36}^{(6} = \frac{1}{6}$$

b) Tapahtumalle ”ainakin toinen silmäluvuista on vähintään neljä” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 27.

2. noppa	**6**	**(1,6)**	**(2,6)**	**(3,6)**	**(4,6)**	**(5,6)**	**(6,6)**
	5	**(1,5)**	**(2,5)**	**(3,5)**	**(4,5)**	**(5,5)**	**(6,5)**
	4	**(1,4)**	**(2,4)**	**(3,4)**	**(4,4)**	**(5,4)**	**(6,4)**
	3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	**(4,3)**	**(5,3)**	**(6,3)**
	2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	**(4,2)**	**(5,2)**	**(6,2)**
	1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	**(4,1)**	**(5,1)**	**(6,1)**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
		1. noppa					

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ainakin toinen silmäluku vähintään 4"}) = \frac{27^{(9}}{36} = \frac{3}{4}.$$

139.

Kahden nopan heitossa alkeistapaukset ovat kahden silmäluvun pareja. Havainnollistetaan alkeistapauksia taulukon avulla. Lasketaan taulukkoon kutakin alkeistapausta vastaava silmälukujen summa.

2. noppa							
	6	$(1, 6)$ $1 + 6$ $= 7$	$(2, 6)$ $2 + 6$ $= 8$	$(3, 6)$ $3 + 6$ $= 9$	$(4, 6)$ $4 + 6$ $= 10$	$(5, 6)$ $5 + 6$ $= 11$	$(6, 6)$ $6 + 6$ $= 12$
	5	$(1, 5)$ $1 + 5$ $= 6$	$(2, 5)$ $2 + 5$ $= 7$	$(3, 5)$ $3 + 5$ $= 8$	$(4, 5)$ $4 + 5$ $= 9$	$(5, 5)$ $5 + 5$ $= 10$	$(6, 5)$ $6 + 5$ $= 11$
	4	$(1, 4)$ $1 + 4$ $= 5$	$(2, 4)$ $2 + 4$ $= 6$	$(3, 4)$ $3 + 4$ $= 7$	$(4, 4)$ $4 + 4$ $= 8$	$(5, 4)$ $5 + 4$ $= 9$	$(6, 4)$ $6 + 4$ $= 10$
	3	$(1, 3)$ $1 + 3$ $= 4$	$(2, 3)$ $2 + 3$ $= 5$	$(3, 3)$ $3 + 3$ $= 6$	$(4, 3)$ $4 + 3$ $= 7$	$(5, 3)$ $5 + 3$ $= 8$	$(6, 3)$ $6 + 3$ $= 9$
	2	$(1, 2)$ $1 + 2$ $= 3$	$(2, 2)$ $2 + 2$ $= 4$	$(3, 2)$ $3 + 2$ $= 5$	$(4, 2)$ $4 + 2$ $= 6$	$(5, 2)$ $5 + 2$ $= 7$	$(6, 2)$ $6 + 2$ $= 8$
	1	$(1, 1)$ $1 + 1$ $= 2$	$(2, 1)$ $2 + 1$ $= 3$	$(3, 1)$ $3 + 1$ $= 4$	$(4, 1)$ $4 + 1$ $= 5$	$(5, 1)$ $5 + 1$ $= 6$	$(6, 1)$ $6 + 1$ $= 7$
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
		1. noppa					

Alkeistapauksia on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$.

a) Pelilaudalla liikutaan eteenpäin silmälukujen summan osoittama määrä. Tapahtumaa ”liikutaan 9 askelta” vastaa summa 9. Tapahtumalle ”liikutaan 9 askelta” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä neljä.

2. noppa							
	6	7	8	**9**	10	11	12
	5	6	7	8	**9**	10	11
	4	5	6	7	8	**9**	10
	3	4	5	6	7	8	**9**
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
		1. noppa					

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"liikutaan 9 askelta"}) = \frac{4}{36}^{(4} = \frac{1}{9}.$$

b) Tapahtumaa ”liikutaan vähintään 9 askelta” vastaavat summan arvot 9–12. Tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia on yhteensä kymmenen.

2. noppa							
	6	7	8	**9**	**10**	**11**	**12**
	5	6	7	8	**9**	**10**	**11**
	4	5	6	7	8	**9**	**10**
	3	4	5	6	7	8	**9**
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
		1. noppa					

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"liikutaan vähintään 9 askelta"}) = \frac{10^{(2}}{36} = \frac{5}{18}.$$

c) Todennäköisin on se silmälukujen summa, joka esiintyy taulukossa yleisimmin. Kootaan kaikkien summan arvojen frekvenssit taulukoksi.

Pistelukujen summan arvo	**Frekvenssi**
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	**6**
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

Summan arvolla 7 on suurin frekvenssi, joten se on todennäköisin silmälukujen summa.

140.

Lasketaan silmälukujen summat taulukkoon. Alkeistapauksia on yhteensä $8 \cdot 8 = 64$.

2. noppa									
	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
		1. noppa							

a) Tapahtumalle ”silmälukujen summa on 10” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä seitsemän.

2. noppa									
	8	9	**10**	11	12	13	14	15	16
	7	8	9	**10**	11	12	13	14	15
	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14
	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13
	4	5	6	7	8	9	**10**	11	12
	3	4	5	6	7	8	9	**10**	11
	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
		1. noppa							

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"summa on 10"}) = \frac{7}{64}.$$

b) Tapahtumalle ”silmälukujen summa on vähintään 10” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 28.

2. noppa	**8**	9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
	7	8	9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
	6	7	8	9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
	5	6	7	8	9	**10**	**11**	**12**	**13**
	4	5	6	7	8	9	**10**	**11**	**12**
	3	4	5	6	7	8	9	**10**	**11**
	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
		1. noppa							

Kysytty todennäköisyys on

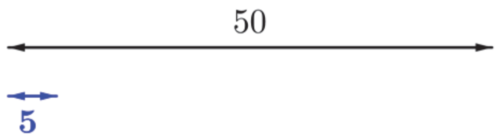
$$P(\text{"summa on vähintään 10"}) = \frac{28^{(4}}{64} = \frac{7}{16}.$$

141.

Lossin saavuttua asemalle, se odottaa matkustajia 5 minuuttia ja lähtee sen jälkeen matkaan. Yhdensuuntainen lossimatka kestää 20 minuuttia. Saavuttuaan määränpääasemalle lossi jälleen odottaa matkustajia 5 minuuttia, jonka jälkeen se lähtee paluumatkalle. Paluumatka kestää 20 minuuttia, minkä jälkeen lossi saapuu takaisin lähtöasemalle.

Lossi siis saapuu asemalle $5 + 20 + 5 + 20 = 50$ minuutin jaksoissa.

Havainnollistetaan yksittäistä 50 minuutin jaksoa janalla, jonka pituus on 50 yksikköä. Tähän janaan sisältyy 5 yksikön mittainen osuus, jonka lossi seisoo asemalla.

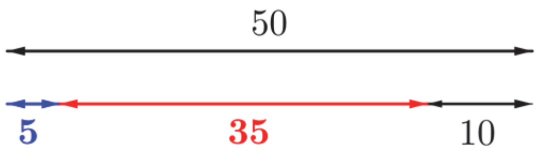


a) Lossiasemalle saapuva auto pääsee heti lossiin, jos se tulee asemalle niiden viiden minuutin aikana, jotka lossi seisoo odottamassa matkustajia.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"pääsee heti lossiin"}) = \frac{5}{50}^{(5} = \frac{1}{10}.$$

b) Lossiasemalle saapuva auto joutuu odottamaan lossia yli 10 minuuttia, jos edellinen lossi on ehtinyt lähteä asemalta ja seuraavan lossin saapumiseen on yli 10 minuuttia.



Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"joutuu odottamaan yli 10 min"}) = \frac{50-5-10}{50}$$

$$= \frac{35^{(5}}{50} = \frac{7}{10}.$$

142.

Henkilö voi syntyä mihin tahansa kellonaikaan vuorokaudessa. Vuorokaudessa on 24 tuntia ja vuorokausi vaihtuu keskiyöllä (klo 0).

a) Aikaväliin klo 12–16 sisältyy neljä tuntia, joten vuorokauden 24 tunnista tapahtumalle ”syntyy klo 12–16” suotuisia tunteja on neljä.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"syntyy klo 12–16 "}) = \frac{4}{24}^{(4} = \frac{1}{6}.$$

b) Henkilö on syntynyt ennen aamuyhdeksää, jos hän on syntynyt klo 0–9. Tähän aikaväliin sisältyy yhdeksän tuntia, joten vuorokauden 24 tunnista tapahtumalle ”syntyy ennen klo 9” suotuisia tunteja on yhdeksän.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"syntyy ennen klo 9"}) = \frac{9}{24}^{(3} = \frac{3}{8}.$$

c) Vuorokaudessa on ääretön määrä ajanhetkiä. Tästä johtuen yksittäisen ajanhetken todennäköisyys on nolla.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"syntyy tasan klo 22"}) = 0.$$

143.

Tikka voi osua mihin tahansa ympyränmuotoisen tikkataulun kohtaan. Kaikkia alkeistapauksia kuvaa ympyrä, jonka pinta-ala saadaan ympyrän pinta-alakaavasta $A = \pi r^2$.

Tikkataulun säde on $r = 1 \text{ cm} + 9 \cdot 2 \text{ cm} = 19 \text{ cm}$, joten kaikkia alkeistapauksia kuvaavan ympyrän pinta-ala on

$$A_1 = \pi \cdot 19^2 = 361\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Todennäköisyys saadaan pinta-alojen avulla laskemalla tapahtumalle suotuisan kuvion pinta-alan osuus kaikkia alkeistapauksia kuvaavan joukon pinta-alasta.

a) Heiton pisteluvuksi saadaan 10, jos tikka osuu tikkataulun keskellä olevaan ympyrään, jonka säde on 1 cm. Tapahtumalle suotuisan kuvion pinta-ala on $A_2 = \pi \cdot 1^2 = \pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{"pisteluku 10"}) &= \frac{A_2}{A_1} \\ &= \frac{\pi}{361\pi}^{(\pi} \\ &= \frac{1}{361} = 0{,}00277\ldots \approx 0{,}0028. \end{aligned}$$

b) Heiton pisteluvuksi saadaan vähintään 8, jos pisteluku on välillä 8–10 eli jos tikka osuu tikkataulun keskellä olevaan ympyrään, jonka säde on 1 cm + 2 cm + 2 cm = 5 cm. Tapahtumalle suotuisan kuvion pinta-ala on $A_2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\ (\mathrm{cm}^2)$.

Kysytty todennäköisyys on

$$
\begin{aligned}
P(\text{"pisteluku vähintään 8"}) &= \frac{A_2}{A_1} \\
&= \frac{25\pi}{361\pi}{}^{(\pi} \\
&= \frac{25}{361} = 0{,}0692\ldots \approx 0{,}069.
\end{aligned}
$$

c) Pistelukujen 4 ja 5 välisellä kehällä ei ole pinta-alaa, joten tapahtumalle ”pisteluku osuu kehälle” suotuisan kuvion pinta-ala on nolla.

Kysytty todennäköisyys on

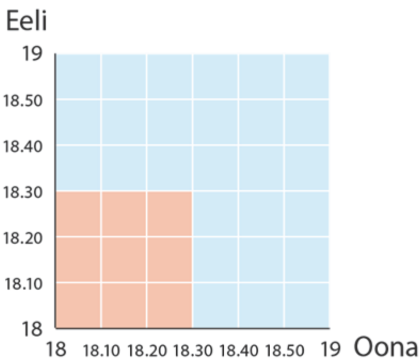
$$
P(\text{"tikka osuu kehälle"}) = \frac{0}{361\pi} = 0.
$$

144.

Ajanhetkiä, jolloin Oona ja Eeli saapuvat ravintolaan, voidaan havainnollistaa geometrisesti neliönä. Neliön sivun pituus muodostuu klo 18 ja klo 19 välissä olevista ajanhetkistä. Oonan saapumisaika on merkitty vaaka-akselille ja Eelin saapumisaika pystyakselille.

Kaikkia alkeistapauksia kuvaa sininen neliö. Sen sivun pituus on 60 (min) ja pinta-ala on $A_1 = 60^2 = 3600$.

a) Tapahtumalle ”molemmat saapuvat ennen klo 18.30” suotuisia alkeistapauksia kuvaa kuvioon piirretty punainen neliö. Sen sivun pituus on 30 (min) ja pinta-ala on $A_2 = 30 \cdot 30 = 900$.



Kysytty todennäköisyys saadaan pinta-alojen avulla:

$$P(\text{"molemmat saapuvat ennen klo 18.30"}) = \frac{A_2}{A_1} = \frac{900}{3600}^{(100}$$

$$= \frac{9}{36}^{(9} = \frac{1}{4}$$

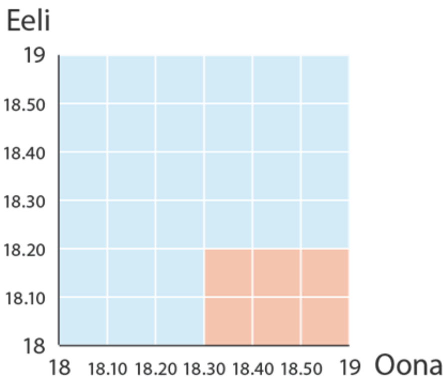
$$= 0{,}25 = 25\ \%.$$

b) Tapahtumalle ”Eeli ennen klo 8.20 ja Oona klo 18.30 jälkeen” suotuisia alkeistapauksia kuvaa kuvioon piirretty punainen suorakulmio, jonka pinta-ala on $A_2 = 30 \cdot 20 = 600$.

Kysytty todennäköisyys saadaan pinta-alojen avulla:

$$P(\text{"Eeli ennen klo 18.20 ja Oona klo 18.30 jälkeen"}) = \frac{A_2}{A_1}$$

$$= \frac{600}{3600}^{(600} = \frac{1}{6} = 0{,}166\ldots \approx 17\ \%.$$



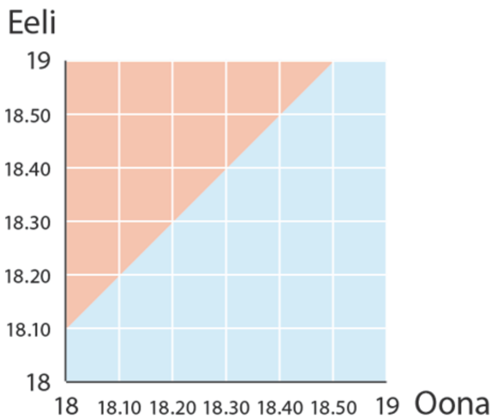
c) Oona joutuu odottamaan Eeliä yli 10 minuuttia silloin, kun Eeli saapuu 10 minuuttia Oonan saapumisajan jälkeen: jos Oona saapuu klo 18, niin Eeli vasta 18.10 jälkeen, jos Oona saapuu klo 18.10, niin Eeli vasta klo 18.20 jälkeen jne.

Tapahtumalle ”Oona odottaa yli 10 min” suotuisia alkeistapauksia kuvaa kuvioon piirretty punainen kolmio, jonka pinta-ala on
$A_2 = \frac{50 \cdot 50}{2} = \frac{2500}{2} = 1250.$

Kysytty todennäköisyys saadaan pinta-alojen avulla:

$$P(\text{"Oona odottaa yli 10 min"}) = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1250^{(50}}{3600}$$

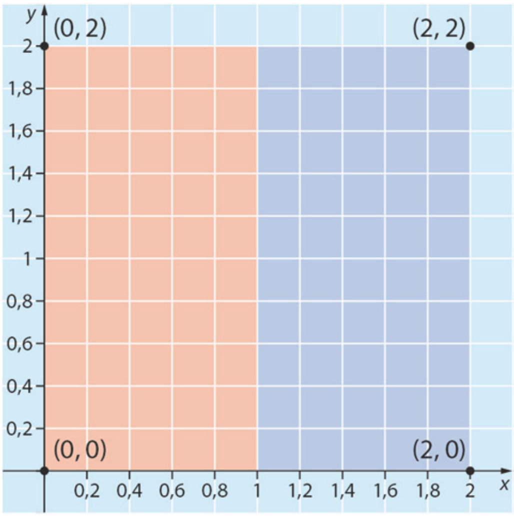
$$= \frac{25}{72} = 0{,}347\ldots \approx 35\ \%.$$



145.

Kaikkia alkeistapauksia, eli eri mahdollisuuksia valita piste (x, y) kuvaa neliö, jonka sivunpituus on 2 (yksikköä) ja pinta-ala on $A_1 = 2^2 = 4$. Huomaa, että x- ja y-koordinaattien lukuarvot ovat reaalilukuja (eivät välttämättä kokonaislukuja).

a) Tapahtumalle ”x-koordinaatti pienempi kuin 1” suotuisia alkeistapauksia kuvaa kuvioon piirretty punainen suorakulmio, jonka pinta-ala on $A_2 = 1 \cdot 2 = 2$.



Kysytty todennäköisyys saadaan pinta-alojen avulla.

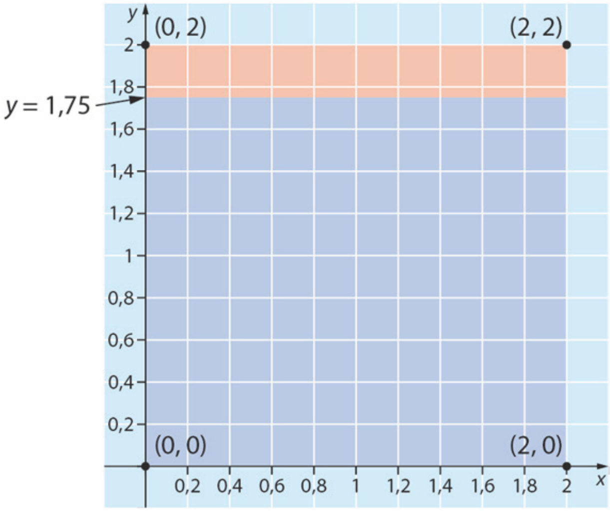
$$P(\text{"}x\text{-koordinaatti pienempi kuin 1"}) = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2^{(2}}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}50.$$

Huomaa, että vastaus pyydettiin kahden desimaalin tarkkuudella.

b) Tapahtumalle ”y-koordinaatti suurempi kuin 1,75” suotuisia alkeistapauksia kuvaa kuvioon piirretty punainen suorakulmio, jonka leveys on 2 ja korkeus on

$$2 - 1{,}75 = 0{,}25.$$

Suotuisan kuvion pinta-ala on $A_2 = 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}50$.



Kysytty todennäköisyys saadaan pinta-alojen avulla.

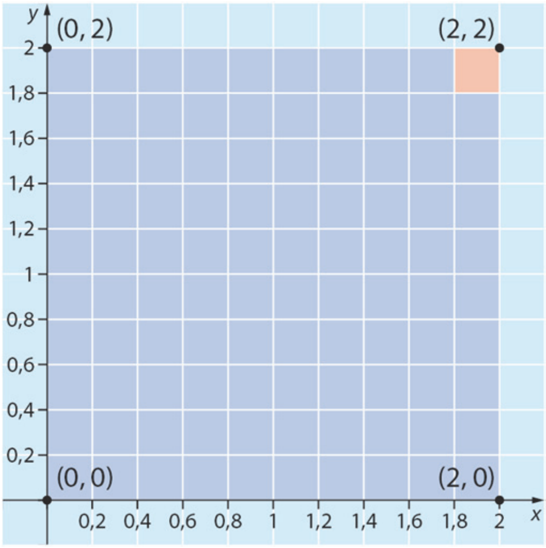
$$P(\text{"}y\text{-koordinaatti suurempi kuin 1,75"}) = \frac{A_2}{A_1} = \frac{0{,}50}{4}$$

$$= 0{,}125 \approx 0{,}13.$$

c) Tapahtumalle ”x- ja y-koordinaatit suurempia kuin 1,8” suotuisia alkeistapauksia kuvaa kuvioon piirretty punainen neliö, jonka sivun pituus on

$$2 - 1{,}8 = 0{,}2.$$

Suotuisan kuvion pinta-ala on $A_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$.



Kysytty todennäköisyys saadaan pinta-alojen avulla.

$$P(\text{"molemmat koordinaatit suurempia kuin 1,8"}) = \frac{A_2}{A_1}$$

$$= \frac{0{,}04}{4} = 0{,}01.$$

146.

Todennäköisyys saadaan laskemalla tapahtumalle suotuisien alkeistapauksien osuus kaikista alkeistapauksista. Lasketaan ensin kaikkien alkeistapausten lukumäärä, eli kaikki mahdolliset arvonnan tulokset. Merkitään kutakin henkilöä hänen nimensä alkukirjaimen avulla:

T = Tatu P = Patu V = Veera S = Satu

Arvotaan kaksi henkilöä istumapaikoille. Kaikki mahdolliset arvonnan tulokset eli alkeistapaukset ovat:

TP	TV	TS
PV	PS	VS

Alkeistapauksia on yhteensä 6.

a) Tapahtumalle ”Tatu pääsee istumaan” suotuisia alkeistapauksia ovat ne, joissa esiintyy T-kirjain. Näitä on yhteensä kolme: TP, TV ja TS.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"Tatu pääsee istumaan"}) = \frac{3^{(3}}{6} = \frac{1}{2}.$$

b) Tapahtumalle ”Tatu ja Patu saavat istumapaikat” suotuisia alkeistapauksia on vain yksi: TP.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"Tatu ja Patu saavat istumapaikat"}) = \frac{1}{6}.$$

c) Tapahtumalle ”Veera ei pääsee istumaan” suotuisia alkeistapauksia ovat ne, joissa ei esiintyy V-kirjainta. Näitä on yhteensä kolme: TP, TS ja PS.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"Veera ei pääsee istumaan"}) = \frac{3^{(3}}{6} = \frac{1}{2}.$$

d) Tapahtumalle ”Veera tai Satu saa istumapaikan” suotuisia alkeistapauksia ovat ne, joissa esiintyy V-kirjain tai S-kirjain tai molemmat. Näitä on yhteensä viisi: TV, TS, PV, PS, VS.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"Veera tai Satu saa istumapaikan"}) = \frac{5}{6}.$$

147.

Tehtävän ratkaisussa voidaan hyödyntää joko taulukkoa tai Venn-diagrammia. Ratkaistaan tehtävä taulukon avulla.

Sijoitetaan ensin tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

	Pizzalle	**Ei pizzalle**	**Yhteensä**
Elokuviin	4		7
Ei elokuviin			
Yhteensä	9		**28**

Lasketaan taulukosta puuttuvat tiedot annettujen tietojen avulla.

	Pizzalle	**Ei pizzalle**	**Yhteensä**
Elokuviin	4	$7-4=3$	7
Ei elokuviin	$9-4=5$	$19-3=16$	$28-7=21$
Yhteensä	9	$28-9=19$	**28**

a) Oppilas valitaan koko luokasta, joten alkeistapauksia on yhteensä **28**. Tapahtumalle ”vain pizzalle” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 5.

	Pizzalle	**Ei pizzalle**	**Yhteensä**
Elokuviin	4	3	7
Ei elokuviin	5	16	21
Yhteensä	9	19	**28**

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"vain pizzalle"}) = \frac{5}{28}.$$

b) Oppilas valitaan koko luokasta, joten alkeistapauksia on yhteensä **28**. Tapahtumalle ”ei elokuviin” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 21.

	Pizzalle	**Ei pizzalle**	**Yhteensä**
Elokuviin	4	3	7
Ei elokuviin	5	16	21
Yhteensä	9	19	**28**

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ei elokuviin"}) = \frac{21}{28}^{(7} = \frac{3}{4}.$$

c) Oppilas valitaan koko luokasta, joten alkeistapauksia on yhteensä **28**. Tapahtumalle ”elokuviin tai pizzalle mutta ei molempiin” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä $5 + 3 = 8$.

	Pizzalle	**Ei pizzalle**	**Yhteensä**
Elokuviin	4	3	7
Ei elokuviin	5	16	21
Yhteensä	9	19	**28**

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"pizzalle tai elokuviin muttei molempiin"}) = \frac{8}{28}^{(4} = \frac{2}{7}.$$

d) Oppilas valitaan pizzalle lähtevistä, joita on yhteensä **9**. Alkeistapauksia on yhteensä 9. Näistä myös elokuviin lähtee 4, joten tapahtumalle ”myös elokuviin” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 4.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"pizzalle lähtevä lähtee myös elokuviin"}) = \frac{4}{9}.$$

148.

Tehtävän ratkaisussa voidaan hyödyntää joko taulukkoa tai Venn-diagrammia. Ratkaistaan tehtävä taulukon avulla.

Sijoitetaan ensin tehtävässä annetut tiedot taulukkoon. Impressionistisista maalauksista neljännes on ranskalaisia, joten ranskalaisten impressionistien maalauksia on

$$\frac{40}{4} = \mathbf{10} \text{ (kappaletta)}.$$

	impressionistinen	**ei-impressionistinen**	**Yhteensä**
ranskalainen	**10**		50
ei-ranskalainen			
Yhteensä	40		**112**

Lasketaan taulukosta puuttuvat tiedot annettujen tietojen avulla.

	impressio-nistinen	**ei-impressionistinen**	**Yhteensä**
ranskalainen	10	$50 - 10 = 40$	50
ei-ranskalainen	$40 - 10 = 30$	$72 - 40 = 32$	$112 - 50 = 62$
Yhteensä	40	$112 - 40 = 72$	**112**

a) Tapahtumalle ”valittu teos on impressionistinen” suotuisia alkeistapauksia on 40. Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"valittu teos on impressionistinen"}) = \frac{40}{112}^{(8} = \frac{5}{14}.$$

b) Tapahtumalle ”valittu teos on ranskalainen” suotuisia alkeistapauksia on 50.Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"valittu teos on ranskalainen"}) = \frac{50}{112}^{(2} = \frac{25}{56}.$$

c) Tapahtumalle ”valittu teos on ranskalaisen impressionistin” suotuisia alkeistapauksia on 10.Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{"valittu teos on ranskalaisen impressionistin"}) = \frac{10}{112}^{(2} = \frac{5}{56}.$$

d) Tapahtumalle ”valittu teos on ranskalaisen tai ei-impressionistin” suotuisat alkeistapaukset on merkitty taulukkoon punaisella taustalla. Suotuisia tapauksia on yhteensä $10 + 40 + 32 = 82$.

	impressionistin	**ei-impressionistin**	**Yhteensä**
ranskalainen	10	40	50
ei-ranskalainen	30	32	62
Yhteensä	40	72	**112**

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"valittu teos on ranskalaisen tai ei-impressionistinen"}) = \frac{82}{112}^{(2}$$

$$= \frac{41}{56}.$$

149.

Kahden nopan heitossa alkeistapaukset ovat kahden silmäluvun pareja. Kaikkien alkeistapausten joukkoa voidaan havainnollistaa taulukolla.

2. noppa	**12**												
	11												
	10												
	9												
	8												
	7												
	6												
	5												
	4												
	3												
	2												
	1												
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
		1. noppa											

Alkeistapauksia, eli kahden nopan heittotuloksia on yhteensä

$$12 \cdot 12 = 144.$$

a) Tapahtumalle ”molempien noppien silmäluku on 10” on **vain yksi** suotuisa alkeistapaus.

2. noppa												
12												
11												
10										**X**		
9												
8												
7												
6												
5												
4												
3												
2												
1												
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
	1. noppa											

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"molemmilla nopilla silmäluku on 10"}) = \frac{\mathbf{1}}{144}$$

$$= 0{,}00694\ldots \approx 0{,}0069.$$

b) Nopan silmäluku on korkeintaan 5, jos se on välillä 1–5. Tapahtumalle ”molempien noppien silmäluku on korkeintaan 5” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä **25**.

2. noppa	**12**												
	11												
	10												
	9												
	8												
	7												
	6												
	5	X	X	X	X	X							
	4	X	X	X	X	X							
	3	X	X	X	X	X							
	2	X	X	X	X	X							
	1	X	X	X	X	X							
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
		1. noppa											

Kysytty todennäköisyys on

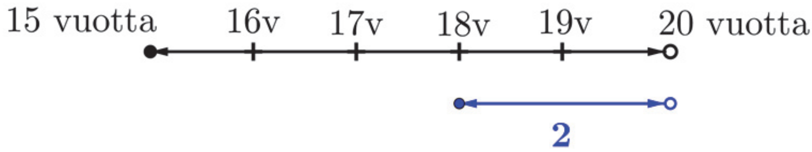
$$P(\text{"molemmilla nopilla silmäluku on korkeintaan 5"}) = \frac{\mathbf{25}}{144}$$

$$= 0{,}173\ldots \approx 0{,}17.$$

150.

a) Opiskelijan ikä on välillä 15–20 vuotta. Havainnollistetaan opiskelijan ikää janalla, jonka pituus on $20 - 15 = 5$ yksikköä.

Opiskelija on täyttänyt 18 vuotta, jos hänen ikänsä on välillä 18–20.



Kysytty todennäköisyys on

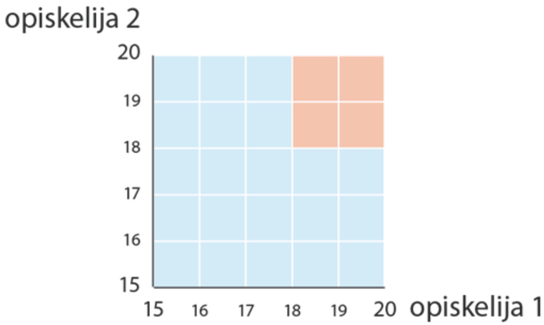
$$P(\text{"ikä vähintään 18 vuotta"}) = \frac{2}{5} = 0{,}40 = 40\ \%.$$

b) Molempien opiskelijoiden ikä on välillä 15–20 vuotta. Havainnollistetaan kahden opiskelijan ikää neliönä, jonka sivunpituus on $20 - 15 = 5$ (yksikköä) ja pinta-ala on

$$A_1 = 5 \cdot 5 = 25.$$

Tapahtumalle ”molempien opiskelijoiden ikä on vähintään 18 vuotta” suotuisia alkeistapauksia kuvaa kuvioon piirretty punainen neliö, jonka sivunpituus on $20 - 18 = 2$ (yksikköä) ja pinta-ala on

$$A_2 = 2 \cdot 2 = 4.$$



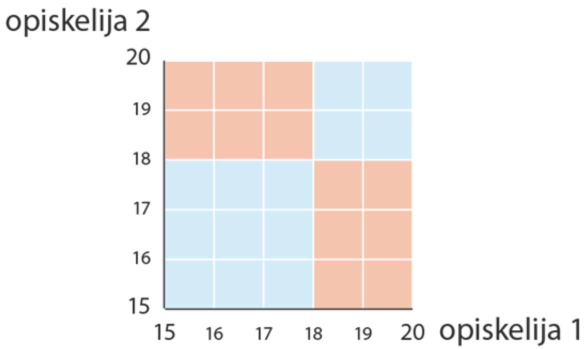
Kysytty todennäköisyys saadaan pinta-alojen avulla.

$$P(\text{"molemmat opiskelijat vähintään 18 vuotta"}) = \frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{25}$$

$$= 0{,}16 = 16\ \%.$$

c) Suotuisia alkeistapauksia kuvaavat kuvioon piirretyt kaksi punaista suorakulmiota. Kummankin suorakulmion toisen sivun pituus on $20 - 18 = 2$ (yksikköä) ja toisen sivun pituus on $18 - 15 = 3$ (yksikköä). Yhden suorakulmion pinta-ala on $2 \cdot 3 = 6$, joten tapahtumalle ”toinen opiskelija on täyttänyt 18 vuotta, mutta toinen ei” suotuisan alueen pinta-ala on

$$A_2 = 2 \cdot 6 = 12.$$



Kysytty todennäköisyys saadaan pinta-alojen avulla.

$$P(\text{"toinen täyttänyt 18 vuotta, mutta toinen ei"}) = \frac{A_2}{A_1} = \frac{12}{25}$$

$$= 0{,}48 = 48\ \%.$$

2.3 Kertolaskusääntö

151.

Sipulien itämistodennäköisyydet ovat

$$P(\text{"narsissin sipuli itää"}) = \mathbf{0{,}75} \text{ ja}$$

$$P(\text{"krookuksen sipuli itää"}) = \mathbf{0{,}82}.$$

Siemenet itävät toisistaan riippumattomasti. Voidaan käyttää riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä:

$$P(A \textbf{ ja } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{"molemmat itävät"}) &= P(\text{"narsissi itää } \textbf{ja} \text{ krookus itää"}) \\ &= \mathbf{0{,}75} \cdot \mathbf{0{,}82} = 0{,}615 \approx 0{,}62. \end{aligned}$$

152.

Joka kuudes arpa voittaa, joten todennäköisyys

$$P(\text{"arpa on voittoarpa"}) = \mathbf{\frac{1}{6}}.$$

Arpoja on paljon, joten arvan ostaminen ei vaikuta seuraavan arvan voittotodennäköisyyteen. Voidaan käyttää riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä:

$$P(A \textbf{ ja } B) = P(A) \cdot P(B).$$

a)

$$P(\text{"1. arpa on voittoarpa } \textbf{ja} \text{ 2. arpa on voittoarpa"}) = \mathbf{\frac{1}{6}} \cdot \mathbf{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36}$$

b) $P(\text{"1. arpa on voitto } \textbf{ja} \text{ 2. arpa on voitto } \textbf{ja} \text{ 3. arpa on voitto"})$

$$= \mathbf{\frac{1}{6}} \cdot \mathbf{\frac{1}{6}} \cdot \mathbf{\frac{1}{6}} = \frac{1}{216}$$

153.

a) Taikuri nostaa kaksi punaista palloa, jos ensimmäinen nostettu pallo on punainen ja toinen nostettu pallo on punainen.

Ensimmäisessä laatikossa on yhteensä kuusi palloa, joista kaksi on punaisia, joten

$$P(\text{"1. pallo on punainen"}) = \frac{2^{(2}}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}.$$

Toisessa laatikossa on yhteensä kahdeksan palloa, joista kolme on punaisia, joten

$$P(\text{"2. pallo on punainen"}) = \mathbf{\frac{3}{8}}.$$

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"1. pallo on punainen } \textbf{ja} \text{ 2. pallo on punainen"}) = \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{\frac{3}{8}} = \frac{1}{8}.$$

b) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman ja säännön $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ avulla. Tapahtuman $A =$”ainakin yksi pallo on punainen” vastatapahtuma on $\bar{A} =$”kumpikaan pallo ei ole punainen”.

Lasketaan vastatapahtuman ”kumpikaan pallo ei ole punainen” todennäköisyys. Todennäköisyys, että ensimmäinen pallo ei ole punainen on

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"1. pallo ei ole punainen"}) \\
&= 1 - P(\text{"1. pallo on punainen"}) \\
&= 1 - \mathbf{\frac{1}{3}} \\
&= \mathbf{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}
$$

Todennäköisyys, että toinen pallo ei ole punainen on

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"2. pallo ei ole punainen"}) \\
&= 1 - P(\text{"2. pallo on punainen"}) \\
&= 1 - \mathbf{\frac{3}{8}} \\
&= \mathbf{\frac{5}{8}}.
\end{aligned}
$$

Kertolaskusäännön mukaan vastatapahtuman todennäköisyys on

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"kumpikaan pallo ei ole punainen"}) \\
&= P(\text{"1. pallo ei ole punainen } \textbf{ja} \text{ 2. pallo ei ole punainen"}) \\
&= \mathbf{\frac{2}{3}} \cdot \mathbf{\frac{5}{8}} = \frac{10^{(2}}{24} = \frac{5}{12}.
\end{aligned}
$$

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
&P(\text{"ainakin yksi pallo on punainen"}) \\
&= 1 - P(\text{"kumpikaan pallo ei ole punainen"}) \\
&= 1 - \frac{5}{12} \\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

154.

$P(\text{"pysähtyy 1. valoihin"}) = \mathbf{0,45}$, joten
$P(\text{"ei pysähdy 1. valoihin"}) = 1 - 0{,}45 = \mathbf{0,55}$.

$P(\text{"pysähtyy 2. valoihin"}) = \mathbf{0,30}$, joten
$P(\text{"ei pysähdy 2. valoihin"}) = 1 - 0{,}30 = \mathbf{0,70}$.

Valojen toiminta on toisistaan riippumatonta, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä:

$$P(A \textbf{ ja } B) = P(A) \cdot P(B).$$

a) $P(\text{"pysähtyy 1. valoihin"} \textbf{ ja } \text{"pysähtyy 2. valoihin"})$

$$= \mathbf{0,45} \cdot \mathbf{0,30}$$
$$= 0{,}135 \approx 0{,}14.$$

b) $P(\text{"ei pysähdy 1. valoihin"} \textbf{ ja } \text{"ei pysähdy 2. valoihin"})$

$$= \mathbf{0,55} \cdot \mathbf{0,70} = 0{,}385 \approx 0{,}39.$$

c) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman ja säännön $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ avulla. Tapahtuman ”pysähtyy ainakin yhden kerran” vastatapahtuma on ”ei pysähdy kertaakaan”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa b.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"pysähtyy ainakin kerran"})$$
$$= 1 - P(\text{"ei pysähdy kertaakaan"})$$
$$= 1 - 0{,}385$$
$$= 0{,}615 \approx 0{,}62.$$

155.

Noin viidesosa suomalaisista asuu pääkaupunkiseudulla, joten todennäköisyys $P(\text{"asuu pääkaupunkiseudulla"}) = \frac{1}{5}$.

a) $P(\text{"1. asuu pääkaupunkiseudulla" } \textbf{ja} \text{ "2. asuu pääkaupunkiseudulla"})$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

b) Todennäköisyys, että suomalainen ei asu pääkaupunkiseudulla on

$$P(\text{"ei asu pääkaupunkiseudulla"}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},$$

joten kysytty todennäköisyys on

$P(\text{"kumpikaan ei asu pääkaupunkiseudulla"})$

$= P(\text{"1. ei asu pääkaupunkiseudulla } \textbf{ja} \text{ 2. ei asu pääkaupunkiseudulla"})$

$= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}$

$= \frac{16}{25}.$

c) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman ja säännön $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ avulla. Tapahtuman ”ainakin toinen asuu pääkaupunkiseudulla” vastatapahtuma on ”kumpikaan ei asu pääkaupunkiseudulla”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa b.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{”ainakin toinen asuu pk-seudulla”}) \\
&= 1 - P(\text{”kumpikaan ei asu pk-seudulla”}) \\
&= 1 - \frac{16}{25} \\
&= \frac{9}{25}.
\end{aligned}
$$

156.

Merkitään silmäluvun 1 todennäköisyyttä kirjaimella *p.* Nopan silmälukujen todennäköisyydet ovat suoraan verrannollisia silmälukuihin, joten muiden silmälukujen todennäköisyydet ovat:

Silmäluku	**Todennäköisyys**
1	p
2	$2p$
3	$3p$
4	$4p$
5	$5p$
6	$6p$

Todennäköisyyksien summan on oltava yksi. Tästä ehdosta saadaan yhtälö:

$$p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$$

eli

$$21p = 1,$$

mistä ratkaistaan $p = \frac{1}{21}$.

Silmälukujen todennäköisyydet ovat:

Silmäluku	**Todennäköisyys**
1	$\frac{1}{21}$
2	$\frac{2}{21}$
3	$\frac{3}{21}^{(3} = \frac{1}{7}$
4	$\frac{4}{21}$
5	$\frac{5}{21}$
6	$\frac{6}{21}^{(3} = \frac{2}{7}$

Todennäköisyys, että saadaan kahdella heitolla kaksi kuutosta, on

$$P(\text{"1. heitolla kuutonen } \textbf{ja} \text{ 2. heitolla kuutonen"})$$
$$= \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$$
$$= \frac{4}{49}$$
$$= 0{,}0816\ldots \approx 8{,}2\ \%.$$

157.

Joka kolmas sairastaa anemiaa, joten $P(\text{"sairastaa"}) = \frac{1}{3}$.

a) Lasketaan todennäköisyys, että kaikki kahdeksan henkilöä sairastavat anemiaa.

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"kaikki kahdeksan sairastavat"})$$

$$= P(\text{"1. sairastaa } \textbf{ja} \text{ 2. sairastaa } \textbf{ja} \dots \textbf{ja} \text{ 8. sairastaa"})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^8$$

$$= 0{,}000152 \dots$$

$$\approx 0{,}00015.$$

b) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin yksi kahdeksasta sairastaa” vastatapahtuma on ”kukaan kahdeksasta ei sairasta”.

Lasketaan vastatapahtuman todennäköisyys. Yksittäisen henkilön todennäköisyys olla terve on $P(\text{"ei sairasta"}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Kertolaskusäännön mukaan vastatapahtuman todennäköisyys on

$$P(\text{"kukaan kahdeksasta ei sairasta"})$$

$$= P(\text{"1. ei sairasta } \textbf{ja} \text{ 2. ei sairasta } \textbf{ja} \ldots \textbf{ja} \text{ 8. ei sairasta"})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

$$= 0{,}0390 \ldots$$

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{”ainakin yksi kahdeksasta sairastaa”})$$

$$= 1 - P(\text{”kukaan kahdeksasta ei sairasta”})$$

$$= 1 - 0{,}0390 \ldots.$$

$$= 0{,}960 \ldots$$

$$\approx 0{,}96.$$

158.

Numerovaihtoehtoja on yhteensä 10. Mintun nelinumeroisen tunnusluvun kunkin yksittäisen numeron kohdalla vain yksi näistä on oikea numero, joten todennäköisyys, että Mintun valitsema yksittäinen numero on oikein, on

$$P(\text{"numero on oikein"}) = \frac{1}{10}.$$

a) Tunnusluku on oikein, jos kaikki neljä numeroa ovat oikein.

Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned}
&P(\text{"kaikki neljä numeroa oikein"}) \\
&= P\left(\begin{matrix}\text{"1. numero oikein } \textbf{ja} \text{ 2. numero oikein } \textbf{ja} \text{ 3. numero oikein} \\ \textbf{ja} \text{ 4. numero oikein"}\end{matrix}\right) \\
&= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \\
&= \left(\frac{1}{10}\right)^4 \\
&= \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001.
\end{aligned}$$

b) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin yksi oikea numero” vastatapahtuma on ”kaikki numerot väärin”.

Todennäköisyys, että yksittäinen numero valitaan väärin

$$P(\text{"numero on väärin"}) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Vastatapahtuman todennäköisyys on kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"kaikki neljä numeroa väärin"})$$
$$= P\left(\begin{array}{c}\text{"1. numero väärin } \textbf{ja} \text{ 2. numero väärin } \textbf{ja} \text{ 3. numero väärin} \\ \textbf{ja} \text{ 4. numero väärin"}\end{array}\right)$$
$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10}$$
$$= \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \frac{6561}{10\,000}.$$

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ainakin yksi oikea numero"})$$
$$= 1 - P(\text{"kaikki neljä numeroa väärin"})$$
$$= 1 - \frac{6561}{10\,000}$$
$$= \frac{3439}{10\,000} = 0{,}3439 \approx 0{,}34.$$

159.

Laskimista 2 prosentissa on tyyppivirhe, joten todennäköisyys, että laskin on viallinen, on $P(\text{"on viallinen"}) = 0{,}02$.

Laskimista $100\ \% - 2\ \% = 98\ \%$ ei ole viallisia, joten todennäköisyys, että laskimessa ei ole tyyppivirhettä on $P(\text{"ei ole viallinen"}) = 0{,}98$.

a) Lasketaan todennäköisyys, että kaikki ryhmän 26 laskinta ovat ei-viallisia.

Kertolaskusäännön mukaan

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"kaikki 26 laskinta ei} - \text{viallisia"})\\
&= P\left(\begin{matrix}\text{"1. laskin ei ole viallinen } \textbf{ja} \text{ 2. laskin ei ole viallinen } \textbf{ja} \ldots \\ \textbf{ja} \text{ 26. laskin ei ole viallinen"}\end{matrix}\right)\\
&= \underbrace{0{,}98 \cdot 0{,}98 \cdot \ldots \cdot 0{,}98}_{\text{26 kpl}}\\
&= (0{,}98)^{26}\\
&= 0{,}5913\ldots\\
&\approx 0{,}591 = 59{,}1\ \%.
\end{aligned}
$$

Huomaa, että vastaus pyydettiin kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin yksi viallinen” vastatapahtuma on ”kaikki ei-viallisia”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa b.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
&P(\text{”ainakin yksi viallinen”})\\
&= 1 - P(\text{”kaikki ei} - \text{viallisia”})\\
&= 1 - 0{,}5913\ldots\\
&= 0{,}4086\ldots\\
&\approx 0{,}409 = 40{,}9\ \%.
\end{aligned}$$

160.

a) Koko viikonlopun sataa, jos sataa sekä lauantaina että sunnuntaina. Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"sataa lauantaina } \textbf{ja} \text{ sataa sunnuntaina"})$$
$$= 0{,}07 \cdot 0{,}14$$
$$= 0{,}0098.$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että jokaisena päivänä sataa. Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"sataa maanantaina } \textbf{ja} \text{ sataa tiistaina } \textbf{ja} \ldots \textbf{ ja} \text{ sataa sunnuntaina"})$$
$$= 0{,}51 \cdot 0{,}33 \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}62 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}14$$
$$= 0{,}0000258\ldots$$
$$\approx 0{,}000026.$$

c) Lasketaan taulukkoon todennäköisyydet, että yksittäisinä päivinä ei sada.

Viikonpäivä	**Sateen todennäköisyys**	**Todennäköisyys, että ei sada**
ma	0,51	$1 - 0{,}51 = 0{,}49$
ti	0,33	$1 - 0{,}33 = 0{,}67$
ke	0,23	$1 - 0{,}23 = 0{,}77$
to	0,62	$1 - 0{,}62 = 0{,}38$
pe	0,11	$1 - 0{,}11 = 0{,}89$
la	0,07	$1 - 0{,}07 = 0{,}93$
su	0,14	$1 - 0{,}14 = 0{,}86$

Kyseisellä viikolla ei ole sadepäiviä lainkaan, jos yhtenäkään päivänä ei sada. Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön mukaan

$P(\text{"yhtenäkään päivänä ei sada"})$
$= P(\text{"ei sada maanantaina } \textbf{ja} \text{ ei sada tiistaina } \textbf{ja} \dots \textbf{ja} \text{ ei sada sunnuntaina"})$
$= 0{,}49 \cdot 0{,}67 \cdot 0{,}77 \cdot 0{,}38 \cdot 0{,}89 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}86$
$= 0{,}0683 \dots$
$\approx 0{,}068.$

d) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin yksi sadepäivä” vastatapahtuma on ”yhtenäkään päivänä ei sada”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa c.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
&P(\text{”ainakin yksi sadepäivä"})\\
&= 1 - P(\text{”yhtenäkään päivänä ei sada”})\\
&= 1 - 0{,}0683 \dots\\
&= 0{,}931 \dots\\
&\approx 0{,}93.
\end{aligned}$$

161.

a) Täydessä korttipakassa on jokaista maata 13 korttia. Herttojen lukumäärä on täydessä pakassa 13 korttia.

Koska kortti palautetaan joka noston jälkeen takaisin pakkaan, kortteja on aina jokaisen noston kohdalla pakassa yhteensä 52 kappaletta, joista herttoja on 13 kappaletta. Todennäköisyys, että yksittäisellä nostolla nostetaan hertta, pysyy nostosta toiseen samana:

$$P(\text{"nostetaan hertta"}) = \frac{13^{(13}}{52} = \frac{1}{4}.$$

Todennäköisyys, että kaikki peräkkäin nostetut kolme korttia ovat herttoja, on

$$\begin{aligned}
&P(\text{"nostetaan kolme herttaa"}) \\
&= P(\text{"1. kortti on hertta } \textbf{ja} \text{ 2. kortti on hertta } \textbf{ja} \text{ 3. kortti on hertta"}) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\
&= \frac{1}{64} = 0{,}015625 \approx 0{,}016.
\end{aligned}$$

b) Herttoja on 13. Todennäköisyys, että ensimmäinen nostettu kortti on hertta, on

$$P(\text{"1. kortti on hertta"}) = \frac{13}{52}.$$

Koska nostettua korttia ei palauteta takaisin pakkaan, on pakassa ensimmäisen noston jälkeen $52 - 1 = 51$ korttia. Koska ensimmäinen nostettu kortti oli hertta, pakassa on jäljellä $13 - 1 = 12$ herttaa.

Todennäköisyys, että toinen nostettu kortti on hertta, on

$$P(\text{"2. kortti on hertta"}) = \frac{12}{51}.$$

Jokainen nosto vähentää pakassa olevien korttien lukumäärää yhdellä kortilla. Koska joka nostolla nostetaan hertta, vähentää jokainen nosto pakassa jäljellä olevien herttojen lukumäärää yhdellä kortilla.

Todennäköisyys, että kaikki peräkkäin nostetut kolme korttia ovat herttoja, on

$$\begin{aligned}
&P(\text{"nostetaan kolme herttaa"}) \\
&= P(\text{"1. kortti on hertta } \textbf{ja} \text{ 2. kortti on hertta } \textbf{ja} \text{ 3. kortti on hertta"}) \\
&= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \\
&= \frac{11}{850} = 0{,}0129\ldots \approx 0{,}013.
\end{aligned}$$

162.

a) A-kirjaimia on yhteensä seitsemän. Todennäköisyys, että ensimmäinen nostettu kirjainlaatta on A-kirjain, on

$$P(\text{"1. laatta on A"}) = \frac{7}{46}.$$

Nostettua kirjainlaattaa ei noston jälkeen palauteta takaisin pussiin, joten pussissa on ensimmäisen noston jälkeen $46 - 1 = 45$ kirjainlaattaa. Koska ensimmäinen nostettu laatta oli A-kirjain, pussissa on jäljellä A-kirjaimia $7 - 1 = 6$ kappaletta.

Todennäköisyys, että toinen nostettu kirjainlaatta on A-kirjain, on

$$P(\text{"2. laatta on A"}) = \frac{6}{45}.$$

Jokainen nosto vähentää pussissa olevien kirjainlaattojen lukumäärää yhdellä laatalla. Koska joka nostolla nostetaan A-kirjain, vähentää jokainen nosto pussissa jäljellä olevien A-kirjainten lukumäärää yhdellä laatalla.

Todennäköisyys, että kaikki peräkkäin nostetut kirjainlaatat ovat A-kirjaimia, on

$$\begin{aligned}
&P(\text{"nostetaan neljä A} - \text{kirjainta"})\\
&P(\text{"1. laatta on A } \textbf{ja} \text{ 2. laatta on A } \textbf{ja} \text{ 3. laatta on A } \textbf{ja} \text{ 4. laatta on A"})\\
&= \frac{7}{46} \cdot \frac{6}{45} \cdot \frac{5}{44} \cdot \frac{4}{43}\\
&= 0{,}0002144\ldots\\
&\approx 0{,}00021 = 0{,}021\ \%.
\end{aligned}$$

b) Kirjainlaatta palautetaan joka noston jälkeen takaisin pussiin, joten kirjainlaattoja on aina jokaisen noston kohdalla pussissa yhteensä 46 kappaletta, joista A-kirjaimia on seitsemän kappaletta.
Todennäköisyys, että yksittäisellä nostolla nostetaan A-kirjain, pysyy nostosta toiseen samana.

Todennäköisyys, että kaikki peräkkäin nostetut neljä kirjainlaattaa ovat A-kirjaimia, on

$$
\begin{aligned}
&P(\text{nostetaan neljä A-kirjainta})\\
&P(\text{"1. laatta on A } \textbf{ja} \text{ 2. laatta on A } \textbf{ja} \text{ 3. laatta on A } \textbf{ja} \text{ 4. laatta on A"})\\
&= \frac{7}{46} \cdot \frac{7}{46} \cdot \frac{7}{46} \cdot \frac{7}{46}\\
&= \left(\frac{7}{46}\right)^4\\
&= 0{,}000536\ldots\\
&\approx 0{,}00054 = 0{,}054\ \%.
\end{aligned}
$$

163.

a) Valittua kappaletta ei poisteta listalta, joten jokainen kaveruksista tekee valintansa samalta 25 kappaleen soittolistalta, jossa 12 kappaletta on genreltään poppia.

Todennäköisyys, että yksittäisen kaveruksen valinta osuu poppiin, on

$$P(\text{"valinta on poppia"}) = \frac{12}{25}.$$

Todennäköisyys pysyy valinnasta toiseen samana.

Todennäköisyys, että kaikkien viiden kaveruksen valinta osuu poppiin, on

$P(\text{"kaikki viisi valitsevat poppia"})$

$= P(\text{"1. valitsee poppia } \textbf{ja} \text{ 2. valitsee poppia } \textbf{ja} \ldots \textbf{ ja} \text{ 5. valitsee poppia"})$

$= \frac{12}{25} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{12}{25}$

$= \left(\frac{12}{25}\right)^5$

$= 0{,}0254 \ldots$

$\approx 0{,}025.$

b) Soittolistalla on 25 kappaletta, joista 12 on genreltään poppia. Todennäköisyys, että ensimmäinen valinta osuu poppiin, on

$$P(\text{"1. valinta on poppia"}) = \frac{12}{25}.$$

Kappale poistetaan valinnan jälkeen soittolistalta, joten listalla on ensimmäisen valinnan jälkeen $25 - 1 = 24$ kappaletta. Ensimmäinen valittu kappale oli poppia, ja kappale on nyt siis poistettu listalta, joten listalla on jäljellä $12 - 1 = 11$ poppikappaletta.

Todennäköisyys, että seuraava valinta osuu poppiin, on

$$P(\text{"2. valinta on poppia"}) = \frac{11}{24}.$$

Jokainen valinta vähentää soittolistalla olevien kappaleiden lukumäärää yhdellä kappaleella. Koska jokainen valinta osuu poppikappaleeseen, vähentää jokainen valinta soittolistalla jäljellä olevien poppikappaleiden lukumäärää yhdellä kappaleella.

Todennäköisyys, että kaikki peräkkäin tehdyt viisi valintaa osuvat poppiin, on

$P(\text{"kaikki viisi valitsevat poppia"})$

$= P(\text{"1. valitsee poppia } \textbf{ja} \text{ 2. valitsee poppia } \textbf{ja} \ldots \textbf{ ja} \text{ 5. valitsee poppia"})$

$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} \cdot \frac{10}{23} \cdot \frac{9}{22} \cdot \frac{8}{21}$

$= 0{,}0149\ldots \approx 0{,}015.$

164.

a) Korissa on yhteensä $8 + 17 = 25$ omenaa, joista 17 on punaisia.

Jokainen valittu omena vähentää korissa olevien omenien kokonaismäärää. Koska jokainen valinta osuu punaiseen omenaan, vähentää jokainen valittu omena myös korissa olevien punaisten omenien lukumäärää.

Todennäköisyys, että valitaan neljä punaista omenaa, on kertolaskusäännön mukaan

$P(\text{"kaikki omenat ovat punaisia"})$

$= P\left(\begin{array}{c}\text{"1. omena punainen } \textbf{ja} \text{ 2. omena punainen } \textbf{ja} \text{ 3. omena punainen} \\ \textbf{ja} \text{ 4. omena punainen"}\end{array}\right)$

$= \dfrac{17}{25} \cdot \dfrac{16}{24} \cdot \dfrac{15}{23} \cdot \dfrac{14}{22}$

$= 0{,}188\ldots$

$\approx 0{,}19.$

b) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin yksi omena on vihreä” vastatapahtuma on ”kaikki omenat ovat punaisia”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa b.

Kysytty todennäköisyys on

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"ainakin yksi omena on vihreä"})\\
&= 1 - P(\text{"kaikki omenat ovat punaisia"})\\
&= \ 1 - 0{,}188\ldots\\
&= 0{,}811\ldots\\
&\approx 0{,}81.
\end{aligned}
$$

c) Lasketaan todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin yksi omena on punainen” vastatapahtuma on ”kaikki omenat ovat vihreitä”.

Lasketaan vastatapahtuman ”kaikki omenat ovat vihreitä” todennäköisyys. Korissa on yhteensä $8 + 17 = 25$ omenaa, joista 8 on vihreitä. Jokainen valittu omena vähentää korissa olevien omenien kokonaismäärää, ja koska jokainen valinta osuu vihreään omenaan, vähentää jokainen valittu omena myös korissa olevien vihreiden omenien lukumäärää.

Todennäköisyys, että valitaan neljä vihreää omenaa, on kertolaskusäännön mukaan

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"kaikki omenat ovat vihreitä"}) \\
&= P\left(\begin{matrix}\text{"1. omena on vihreä } \textbf{ja} \text{ 2. omena on vihreä } \textbf{ja} \text{ 3. omena on vihreä} \\ \textbf{ja} \text{ 4. omena on vihreä"}\end{matrix}\right) \\
&= \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{6}{23} \cdot \frac{5}{22} \\
&= 0{,}00553\ldots
\end{aligned}
$$

Kysytty todennäköisyys on

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"ainakin yksi omena on punainen"}) \\
&= 1 - P(\text{"kaikki omenat ovat vihreitä"}) \\
&= 1 - 0{,}00553\ldots \\
&= 0{,}994\ldots \\
&\approx 0{,}99.
\end{aligned}
$$

165.

Merkitään korissa olevien pilaantuneiden kirsikoiden lukumäärää kirjaimella x (kappaletta).

Sari poimii korista yhden kirsikan. Todennäköisyys, että se on pilaantunut, on

$$P(\text{"1. kirsikka on pilaantunut"}) = \frac{x}{50}.$$

Tämän jälkeen korissa on $50 - 1 = 49$ kirsikkaa. Näistä pilaantuneita kirsikoita on $x - 1$ (kappaletta).

Sari poimii korista toisen kirsikan. Todennäköisyys, että se on pilaantunut, on

$$P(\text{"2. kirsikka on pilaantunut"}) = \frac{x-1}{49}.$$

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"1. kirsikka on pilaantunut } \textbf{ja} \text{ 2. kirsikka on pilaantunut"}) = \frac{x}{50} \cdot \frac{x-1}{49}.$$

Tiedetään, että molemmat kirsikat ovat pilaantuneita todennäköisyydellä $\frac{3}{175}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tuntematon lukumäärä *x*.

$$\frac{x}{50} \cdot \frac{x-1}{49} = \frac{3}{175}$$

Yhtälö ratkaistaan symbolisen laskennan ohjelmalla: $x = -6$ tai $x = 7$.

Kirjain *x* tarkoittaa korissa olevien pilaantuneiden kirsikoiden lukumäärää, joten ainoastaan positiivinen ratkaisu $x = 7$ kelpaa.

Sari on ostanut 7 pilaantunutta kirsikkaa.

166.

Merkitään yksittäisen arvan voittotodennäköisyyttä kirjaimella x.

Lauri ostaa ensimmäisen arvan. Todennäköisyys, että se on voittoarpa, on

$$P(\text{"1. arpa on voittoarpa"}) = x.$$

Lauri ostaa toisen arvan. Jokaisella yksittäisellä arvalla on sama todennäköisyys voittaa, joten

$$P(\text{"2. arpa on voittoarpa"}) = x.$$

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"1. arpa on voittoarpa } \textbf{ja} \text{ 2. arpa on voittoarpa"}) = x \cdot = x^2.$$

Tiedetään, että molemmat arvat ovat voittoarpoja todennäköisyydellä 0,34. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tuntematon voittotodennäköisyys *x.*

$$x^2 = 0{,}34$$

Yhtälö ratkaistaan neliöjuuren avulla: $x = \pm\sqrt{0{,}34} = \pm 0{,}583\ldots$

Kirjain x tarkoittaa arvan voittotodennäköisyyttä, joten ainoastaan positiivinen ratkaisu $x = 0{,}583\ldots \approx 0{,}58$ kelpaa.

Yksittäisen arvan voittotodennäköisyys on 0,58.

167.

Merkitään puuttuvien patojen lukumäärää kirjaimella x (kappaletta).

Täydessä korttipakassa on 52 korttia, ja täydestä pakasta puuttuu nyt x korttia, joten pakassa on yhteensä $52 - x$ korttia. Täydessä korttipakassa on 13 pataa, ja padoista puuttuu nyt x korttia, joten pakassa on yhteensä $13 - x$ pataa.

Pakasta vedetään yksi kortti. Todennäköisyys, että kortti on pata, on

$$P(\text{"1. kortti on pata"}) = \frac{13 - x}{52 - x}.$$

Tämän jälkeen pakassa on kortteja $(52 - x) - 1 = 51 - x$ (kappaletta). Näistä patoja on $(13 - x) - 1 = 12 - x$ (kappaletta).

Pakasta vedetään toinen kortti. Todennäköisyys, että kortti on pata, on

$$P(\text{"2. kortti on pata"}) = \frac{12 - x}{51 - x}.$$

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"1. kortti on pata } \textbf{ja} \text{ 2. kortti on pata"}) = \frac{13 - x}{52 - x} \cdot \frac{12 - x}{51 - x}.$$

Tiedetään, että todennäköisyys saada kaksi pataa on $\frac{3}{94}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tuntematon lukumäärä *x.*

$$\frac{13-x}{52-x} \cdot \frac{12-x}{51-x} = \frac{3}{94}$$

Yhtälö ratkaistaan symbolisen laskennan ohjelmalla: $x = 4$ tai $x = \frac{129}{7} = 18{,}428\ldots$

Kirjain x tarkoittaa puuttuvien patojen lukumäärää, joten ainoastaan ratkaisu $x = 4$ kelpaa. (Toinen ratkaisu $x = \frac{129}{7} = 18{,}428\ldots$ ei kelpaa kahdestakaan syystä: puuttuvia patoja on kokonaisluvun ilmaisema lukumäärä, ja koska patoja on kaiken kaikkiaan 13, voi niitä puuttua korkeintaan 13.)

Pakasta puuttuu neljä pataa.

168.

Vasenkätisiä on 10 % väestöstä, joten todennäköisyys, että satunnaisesti valittu henkilö on vasenkätinen on $10\ \% = 0{,}1$. Oikeakätisiä on $100\ \% - 10\ \% = 90\ \%$, joten todennäköisyys, että henkilö on oikeakätinen on

$$P(\text{"oikeakätinen"}) = 0{,}9.$$

Merkitään ryhmässä olevien henkilöiden lukumäärää kirjaimella x (kappaletta).

Muodostetaan tapahtuman ”ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen” todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

Tapahtuman ”ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen” vastatapahtuma on ”ryhmässä kaikki ovat oikeakätisiä”. Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned}
&P(\text{”kaikki ryhmän } x \text{ henkilöä ovat oikeakätisiä”})\\
&= P\left(\begin{matrix}\text{"1. henkilö on oikeakätinen } \textbf{ja} \text{ 2. henkilö on oikeakätinen } \textbf{ja} \ldots \\ \textbf{ja } x\text{. henkilö on oikeakätinen"}\end{matrix}\right)\\
&= \underbrace{0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot \ldots \cdot 0{,}9}_{x \text{ kpl}}\\
&= 0{,}9^x.
\end{aligned}$$

Tapahtuman ”ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen” todennäköisyys on tällöin

$$
\begin{aligned}
&P(\text{”ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen”})\\
&= 1 - P(\text{”kaikki ryhmän } x \text{ henkilöä ovat oikeakätisiä”})\\
&= 1 - 0{,}9^x.
\end{aligned}
$$

Halutaan, että todennäköisyys tälle tapahtumalle on vähintään 0,8.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan tuntematon lukumäärä *x.*

$$1 - 0{,}9^x \geq 0{,}8$$

Epäyhtälö ratkaistaan symbolisen laskennan ohjelmalla: $x \geq 15{,}275\ldots$

Kirjain x tarkoittaa ryhmään tarvittavien henkilöiden lukumäärää. Ratkaisusta nähdään, että 15 henkilöä ei riitä, joten ryhmäkoon tulee olla vähintään 16 henkilöä.

Ryhmässä tulee olla 16 henkilöä.

169.

a) Pojat osuvat häränsilmään toisistaan riippumattomasti. Voidaan käyttää riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä:

$$P(A\ \textbf{ja}\ B) = P(A) \cdot P(B).$$

$$P(\text{"Ilari osuu häränsilmään"}) = 0{,}18 \text{ ja}$$

$$P(\text{"Matti osuu häränsilmään"}) = 0{,}25, \text{ joten}$$

$$\begin{aligned} P(\text{"molemmat osuvat häränsilmään"}) &= 0{,}18 \cdot 0{,}25 \\ &= 0{,}045 = 4{,}5\ \%. \end{aligned}$$

b) Lasketaan poikien todennäköisyydet olla osumatta häränsilmään:

$$P(\text{"Ilari ei osu häränsilmään"}) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$$

$$P(\text{"Matti ei osu häränsilmään"}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{"kumpikaan ei osu häränsilmään"}) &= 0{,}82 \cdot 0{,}75 \\ &= 0{,}615 = 61{,}5\ \%. \end{aligned}$$

Huomaa, että vastaus pyydettiin prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

c) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin toinen osuu häränsilmään” vastatapahtuma on ”kumpikaan ei osu häränsilmään”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa b.

Kysytty todennäköisyys on

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"ainakin yksi osuu häränsilmään"}) \\
&= 1 - P(\text{"kumpikaan ei osu häränsilmään"}) \\
&= \ 1 - 0{,}615 \\
&= 0{,}385 \\
&\approx 38{,}5\ \%.
\end{aligned}
$$

170.

Kumpikin virkailija on vapaana keskimäärin 20 minuuttia tunnista (60 minuutista), joten

$$P(\text{"virkailija on vapaana"}) = \frac{20^{(20}}{60} = \frac{1}{3}.$$

a) Todennäköisyys, että molemmat virkailijat ovat vapaana on kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"molemmat vapaana"}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

b) Virkailija on vapaana keskimäärin 20 minuuttia tunnissa, joten hän on varattuna $60 - 20 = 40$ minuuttia tunnissa. Virkailijan todennäköisyys olla varattuna on

$$P(\text{"virkailija on varattu"}) = \frac{40^{(20}}{60} = \frac{2}{3}.$$

Tämä voidaan laskea myös vastatapahtuman avulla:

$$P(\text{"virkailija on varattu"})$$

$$= 1 - P(\text{"virkailija on vapaana"})$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"molemmat varattuina"}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

c) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin toinen vapaana” vastatapahtuma on ”molemmat varattuina”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa b.

Kysytty todennäköisyys on

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"ainakin toinen vapaana"})\\
&= 1 - P(\text{"molemmat varattuina"})\\
&= \ 1 - \frac{4}{9}\\
&= \frac{5}{9}.
\end{aligned}
$$

171.

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"lauseen kaikki 26 kirjainta ovat virheellisiä"})$$

$$= P\left(\begin{array}{c}\text{"1. kirjain on virheellinen } \textbf{ja} \text{ 2. kirjain on virheellinen } \textbf{ja} \ldots \\ \textbf{ja} \text{ 26. kirjain on virheellinen"}\end{array}\right)$$

$$= \underbrace{0{,}12 \cdot 0{,}12 \cdot \ldots \cdot 0{,}12}_{26 \text{ kpl}}$$

$$= 0{,}12^{26}$$

$$= 1{,}144 \ldots \cdot 10^{-24} \approx 1{,}14 \cdot 10^{-24}.$$

Huomaa, että vastaus pyydettiin kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Aada näppäilee yksittäisen kirjaimen oikein todennäköisyydellä

$$P(\text{"kirjain on oikein"}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88.$$

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"lauseen kaikki 26 kirjainta ovat oikein"})$$

$$= P(\text{"1. kirjain on oikein } \textbf{ja} \text{ 2. kirjain on oikein } \textbf{ja} \ldots \textbf{ ja} \text{ 26. kirjain on oikein"})$$

$$= \underbrace{0{,}88 \cdot 0{,}88 \cdot \ldots \cdot 0{,}88}_{26 \text{ kpl}}$$

$$= 0{,}88^{26}$$

$$= 0{,}03602 \ldots \approx 0{,}0360.$$

c) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin yksi väärä kirjain” vastatapahtuma on ”kaikki kirjaimet oikein”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa b.

Kysytty todennäköisyys on tällöin

$$\begin{aligned}
&P(\text{”lauseessa on ainakin yksi väärä kirjain”})\\
&= 1 - P(\text{”lauseen kaikki 26 kirjainta ovat oikein”})\\
&= 1 - 0{,}03602\ldots\\
&= 0{,}9639\ldots\\
&\approx 0{,}964.
\end{aligned}$$

172.

Täydessä korttipakassa on 52 korttia. Korteista puolet on punaisia ja puolet mustia, joten punaisia kortteja on $\frac{52}{2} = 26$ korttia.

Lasketaan molemmille nostotavoille todennäköisyys saada neljä punaista korttia.

Nosto ilman takaisinpanoa: Todennäköisyys, että ensimmäinen nostettu kortti on punainen, on

$$P(\text{"1. kortti on punainen"}) = \frac{26}{52}^{(26} = \frac{1}{2}.$$

Koska nostettua korttia ei palauteta takaisin pakkaan, on pakassa ensimmäisen noston jälkeen $52 - 1 = 51$ korttia. Koska ensimmäinen nostettu kortti oli punainen, pakassa on jäljellä $26 - 1 = 25$ punaista korttia.

Todennäköisyys, että toinen nostettu kortti on punainen, on

$$P(\text{"2. kortti on punainen"}) = \frac{25}{51}.$$

Jokainen nosto vähentää pakassa olevien korttien lukumäärää yhdellä kortilla. Koska joka nostolla nostetaan punainen kortti, vähentää jokainen nosto pakassa jäljellä olevien punaisten korttien lukumäärää yhdellä kortilla.

Todennäköisyys, että kaikki peräkkäin nostetut neljä korttia ovat punaisia, on kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"nostetaan neljä punaista korttia"})$$
$$= \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$$
$$= \frac{46}{833}$$
$$= 0{,}00553 \ldots \approx \mathbf{5{,}52\ \%}.$$

Nosto takaisinpanolla: Jos kortti palautetaan joka noston jälkeen takaisin pakkaan, niin kortteja on aina jokaisen noston kohdalla pakassa yhteensä 52 kappaletta, ja korteista on punaisia puolet eli 26 kappaletta. Todennäköisyys, että yksittäisellä nostolla nostetaan punainen kortti, pysyy nostosta toiseen samana:

$$P(\text{"nostetaan punainen kortti"}) = \frac{26^{(26}}{52} = \frac{1}{2}.$$

Todennäköisyys, että kaikki peräkkäin nostetut neljä korttia ovat punaisia, on kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"nostetaan neljä punaista korttia"})$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= \frac{1}{16}$$
$$= 0{,}00625 = \mathbf{6{,}25\ \%}.$$

Vertaamalla laskettuja todennäköisyyksiä nähdään, että jälkimmäisellä nostotavalla neljän punaisen kortin todennäköisyys on suurempi. Todennäköisempää on saada neljä punaista korttia silloin, kun kortit palautetaan pakkaan.

Vastaus voidaan myös päätellä ilman, että lasketaan tarkkoja todennäköisyyksiä:

- Jälkimmäisessä nostotavassa, kun kortti palautetaan takaisin pakkaan ennen uutta nostoa, punaisten korttien suhteellinen osuus pysyy samana nostosta toiseen: todennäköisyys nostaa punainen kortti on $\frac{1}{2} = 50\ \%$ joka nostolla.

- Edellisessä nostotavassa, kun korttia ei palauteta takaisin pakkaan, punaisten korttien suhteellinen osuus pienenee joka nostolla: ensimmäisellä nostolla se on $\frac{1}{2} = 50\ \%$, toisella nostolla $\frac{25}{51} \approx 49\ \%$, kolmannella $\frac{24}{50} = 48\ \%$ ja neljännellä enää $\frac{23}{49} = 47\ \%$. Koska todennäköisyys nostaa punainen kortti pienenee joka nostolla, niin tässä nostotavassa neljän punaisen kortin todennäköisyys on pienempi.

173.

Merkitään kurssilla olevien poikien lukumäärää kirjaimella x (poikaa).

Kurssilla on 15 tyttöä, joten kurssilla olevien opiskelijoiden lukumäärä on yhteensä $x + 15$ (opiskelijaa).

Opiskelijoista valitaan umpimähkään yksi opiskelija. Todennäköisyys, että hän on tyttö, on

$$P(\text{"1. valinta on tyttö"}) = \frac{15}{x+15}.$$

Tämän jälkeen ryhmässä on $(x + 15) - 1 = x + 14$ opiskelijaa. Yksi tyttö on jo valittu, joten tyttöjä on jäljellä $15 - 1 = 14$.

Jäljellä olevista opiskelijoista valitaan umpimähkään toinen opiskelija. Todennäköisyys, että hän on tyttö, on

$$P(\text{"2. valinta on tyttö"}) = \frac{14}{x+14}.$$

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"1. valinta on tyttö } \textbf{ja} \text{ 2. valinta on tyttö"}) = \frac{15}{x+15} \cdot \frac{14}{x+14}.$$

Tiedetään, että todennäköisyys valita kaksi tyttöä on $\frac{1}{6}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tuntematon poikien lukumäärä *x.*

$$\frac{15}{x+15} \cdot \frac{14}{x+14} = \frac{1}{6}$$

Yhtälö ratkaistaan symbolisen laskennan ohjelmalla: $x = -50$ tai $x = 21$.

Kirjain x tarkoittaa poikien lukumäärää, joten ainoastaan positiivinen ratkaisu $x = 21$ kelpaa.

Kurssilla on 21 poikaa.

2.4 Yhteenlaskusääntö

174.

a) Kortteja on yhteensä 52. Näistä

- kuvakortteja on $4 \cdot 3 = 12$
- kakkosia on $4 \cdot 1 = 4$

Tapahtumalle ”valittu kortti on kuvakortti tai kakkonen” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä $12 + 4 = 16$. Kysytty todennäköisyys on

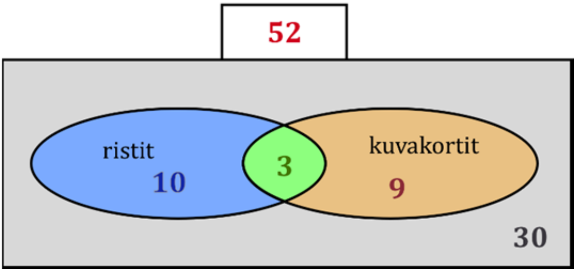
$$P(\text{"valittu kortti on kuvakortti tai kakkonen"}) = \frac{16}{52}^{(4} = \frac{4}{13}.$$

Todennäköisyys voidaan laskea myös yhteenlaskusäännöllä. Tapahtumat ”valittu kortti on kuvakortti” ja ”valittu kortti on kakkonen” ovat erilliset, joten yhteenlaskusäännön mukaan $P(A\ \textbf{tai}\ B) = P(A) + P(B)$ eli

$$\begin{aligned} P(\text{"valittu kortti on kuvakortti } \textbf{tai} \text{ kakkonen"}) &= \frac{12}{52} + \frac{4}{52} \\ &= \frac{16}{52}^{(4} = \frac{4}{13}. \end{aligned}$$

b) Todennäköisyys voidaan laskea Venn-diagrammin avulla. Kortteja on yhteensä 52. Näistä

- kuvakortteja on $4 \cdot 3 = 12$,
- ristejä on 13,
- risteistä **3** on kuvakortteja, joten muita ristejä on $13 - 3 = \mathbf{10}$
- muita kuvakortteja on $12 - 3 = \mathbf{9}$



Tapahtumalle ”valittu kortti on kuvakortti tai risti” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä $\mathbf{10} + \mathbf{3} + \mathbf{9} = 22$, joten kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"valittu kortti on kuvakortti tai risti"}) = \frac{22^{(2}}{52} = \frac{11}{26}.$$

Todennäköisyys voidaan laskea myös yhteenlaskusäännöllä. Tapahtumat ”valittu kortti on kuvakortti” ja ”valittu kortti on risti” eivät ole erillisiä, koska kolme ristiä on kuvakortteja. Tällöin kysytty todennäköisyys lasketaan käyttämällä yleistä yhteenlaskusääntöä

$$P(A \textbf{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

jonka mukaan

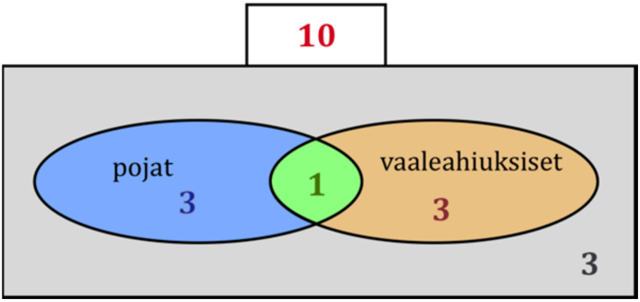
$$P(\text{"valittu kortti on kuvakortti } \textbf{tai} \text{ risti"}) = \frac{12}{52} + \frac{13}{52} - \frac{3}{52}$$

$$= \frac{22}{52} = \frac{11}{26}.$$

175.

Piirretään ratkaisun avuksi Venn-diagrammi. Ryhmässä on yhteensä **10** henkilöä. Näistä

- vaaleahiuksisia poikia on **1**
- poikia on yhteensä neljä, joten ei-vaaleahiuksisia poikia on $4 - 1 = \mathbf{3}$
- vaaleahiuksisia tyttöjä **3**



Tapahtumalle ”valittu henkilö on vaaleatukkainen tai poika” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä $3 + 1 + 3 = 7$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"valittu henkilö on vaaleatukkainen tai poika"}) = \frac{7}{10}.$$

Todennäköisyys voidaan laskea myös käyttämällä yleistä yhteenlaskusääntöä:

$$P(A\ \textbf{tai}\ B) = P(A) + P(B) - P(A\ \text{ja}\ B)$$

$$P(\text{"valittu henkilö on vaaleatukkainen } \textbf{tai} \text{ poika"})$$

$$= P(\text{"vaaleatukkainen"}) + P(\text{"poika"})$$

$$- P(\text{"vaaleatukkainen poika"})$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

176.

Merkitään tapahtumia O = ”henkilö kuuluu O-veriryhmään” ja Rh– = ”henkilöllä on negatiivinen Rh-tekijä”. Tällöin

$P(O) = 0{,}33 \qquad P(\text{Rh}-) = 0{,}13 \quad \text{ja} \quad P(O \text{ ja Rh}-) = 0{,}05.$

Tapahtumat ”valittu henkilö kuuluu O-veriryhmään” ja ”valitulla henkilöllä on negatiivinen Rh-tekijä” eivät ole erillisiä, koska 5 % suomalaisista kuuluu molempiin ryhmiin.

Tällöin kysytty todennäköisyys lasketaan käyttämällä yleistä yhteenlaskusääntöä

$$P(A \textbf{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B),$$

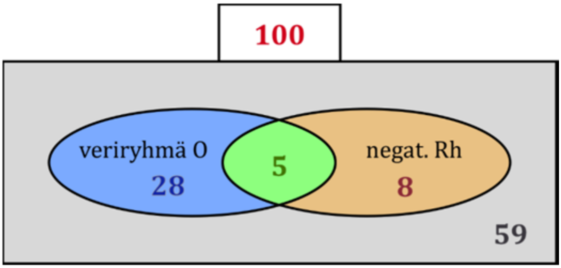
jonka mukaan

$$P(O \textbf{ tai } \text{Rh}-) = 0{,}33 + 0{,}13 - 0{,}05 = 0{,}41.$$

Satunnaisesti valittu henkilö kuuluu veriryhmään O tai hänellä on negatiivinen Rh-tekijä todennäköisyydellä 0,41.

Tehtävä voidaan ratkaista myös Venn-diagrammin avulla. Kaikkien suomalaisten määrä prosentteina on **100** %. Näistä

- sekä veriryhmään O että Rh-negatiivisten ryhmään kuuluu **5** %
- pelkään veriryhmään O kuuluu 33 % − 5 % = **28** %
- pelkään Rh-negatiivisten ryhmään kuuluu 13 % − 5 % = **8** %



Tapahtumalle ”kuuluu veriryhmään O tai Rh-negatiivisiin” suotuisien alkeistapauksien määrä prosentteina on 28 % + 5 % + 8 % = 41 %, joten kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{”kuuluu veriryhmään O tai Rh-negatiivisiin”}) = 41\ \% = 0{,}41.$$

177.

Korin todennäköisyys on $P(\text{"kori"}) = 0{,}60$, joten ohi menevän heiton todennäköisyys on $P(\text{"ohi"}) = 1 - 0{,}60 = 0{,}40$.

a) Todennäköisyys, että molemmat heitot menevät ohi on kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"molemmat ohi"}) = P(\text{"ohi } \textbf{ja} \text{ ohi"}) = 0{,}40 \cdot 0{,}40 = 0{,}16.$$

b) Tapahtuman ”ainakin yksi kori” vastatapahtuma on ”molemmat ohi”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa a. Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{"ainakin yksi kori"}) &= 1 - P(\text{"molemmat ohi"}) \\ &= 1 - 0{,}16 \\ &= 0{,}84. \end{aligned}$$

c) Tapahtuma ”vain yksi kori” voi tarkoittaa kahta mahdollista tilannetta:

- Valtteri heittää ensimmäisen heiton koriin ja toisen heiton ohi (kori **ja** ohi) **tai**
- Valtteri heittää ensimmäisen heiton ohi ja toisen heiton koriin (ohi **ja** kori)

Molempien tilanteiden todennäköisyydet lasketaan kertolaskusäännön mukaan. Kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
&P(\text{"vain yksi kori"}) \\
&= P(\text{"kori } \textbf{ja} \text{ ohi"}) + P(\text{"ohi } \textbf{ja} \text{ kori"}) \\
&= 0{,}60 \cdot\ 0{,}40 + 0{,}40 \cdot 0{,}60 \\
&= 0{,}48.
\end{aligned}$$

178.

Pussissa on yhteensä $8+6=14$ karkkia.

a) Pussissa on kahdeksan liitulakua, joten

$$P(\text{"1. karkki on liitulaku"}) = \frac{8}{14}.$$

Nostettua karkkia ei palauteta takaisin pussiin, joten pussissa on ensimmäisen noston jälkeen $14-1=13$ karkkia. Koska ensimmäinen nostettu karkki oli liitulaku, pussissa on jäljellä $8-1=7$ liitulakua.

Todennäköisyys, että myös toinen karkki on liitulaku, on

$$P(\text{"2. karkki on liitulaku"}) = \frac{7}{13}.$$

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"molemmat ovat liitulakuja"})$$
$$= P(\text{"1. karkki on liitulaku } \textbf{ja} \text{ 2. karkki on liitulaku"})$$
$$= \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{4}{13}.$$

b) Lasketaan todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin toinen on merirosvoraha” vastatapahtuma on ”molemmat ovat liitulakuja”. Vastatapahtuman todennäköisyys laskettiin kohdassa a.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ainakin toinen on merkkari"})$$
$$= 1 - P(\text{"molemmat ovat liitulakuja"})$$
$$= 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}.$$

c) Tapahtuma ”vain toinen on liitulaku” voi tarkoittaa kahta mahdollista tilannetta:

- ensimmäiseksi nostettu karkki on liitulaku ja toiseksi nostettu karkki on merkkari (liitulaku **ja** merkkari) **tai**
- ensimmäiseksi nostettu karkki on merkkari ja toiseksi nostettu karkki on liitulaku (merkkari **ja** liitulaku)

Molempien tilanteiden todennäköisyydet lasketaan kertolaskusäännön mukaan. Kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"vain yksi liitulaku"})$$
$$= P(\text{"liitulaku } \textbf{ja} \text{ merkkari"}) + P(\text{"merkkari } \textbf{ja} \text{ liitulaku"})$$
$$= \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{13}$$
$$= \frac{48}{91}.$$

179.

Voiton todennäköisyys on $P(\text{"voitto"}) = 0{,}20$, joten häviön todennäköisyys on $P(\text{"ei voittoa"}) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$.

a) Todennäköisyys, että kumpikaan arpa ei voita on kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{"kumpikaan ei voita"}) &= P(\text{"ei voittoa } \textbf{ja} \text{ ei voittoa"}) \\ &= 0{,}80 \cdot 0{,}80 = 0{,}64. \end{aligned}$$

b) Tapahtuma ”vain yksi voitto” voi tarkoittaa kahta mahdollista tilannetta:

- ensimmäinen arpa voittaa ja toinen arpa ei voita (voitto **ja** ei voitto) **tai**
- ensimmäinen arpa ei voita ja toinen arpa voittaa (ei voitto **ja** voitto)

Molempien tilanteiden todennäköisyydet lasketaan kertolaskusäännön mukaan. Kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"vain yksi voitto"})$$

$$= P(\text{"voitto } \textbf{ja} \text{ ei voitto"}) + P(\text{"ei voitto } \textbf{ja} \text{ voitto"})$$

$$= 0{,}20 \cdot\ 0{,}80 + 0{,}80 \cdot 0{,}20$$

$$= 0{,}32.$$

180.

Ominaisuus A periytyy todennäköisyydellä $P(A) = 0{,}15$, joten se ei periydy todennäköisyydellä $P(\text{ei } A) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

Ominaisuus B periytyy todennäköisyydellä $P(B) = 0{,}65$, joten se ei periydy todennäköisyydellä $P(\text{ei } B) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.

a) Todennäköisyys, että A periytyy mutta B ei periydy on kertolaskusäännön mukaan

$$P(A \textbf{ ja } \text{ei } B) = 0{,}15 \cdot 0{,}35 = 0{,}0525 \approx 0{,}053.$$

b) Tapahtuma ”vain toinen periytyy” voi tarkoittaa kahta mahdollista tilannetta:

- ominaisuus A periytyy ja ominaisuus B ei periydy tai
- ominaisuus A ei periydy ja ominaisuus B periytyy.

Molempien tilanteiden todennäköisyys lasketaan kertolaskusäännön mukaan. Kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"vain yksi ominaisuus"})$$

$$= P(A \textbf{ ja } \text{ei } B) + P(\text{ei } A \textbf{ ja } B)$$

$$= 0{,}15 \cdot 0{,}35 + 0{,}85 \cdot 0{,}65$$

$$= 0{,}605 \approx 0{,}61.$$

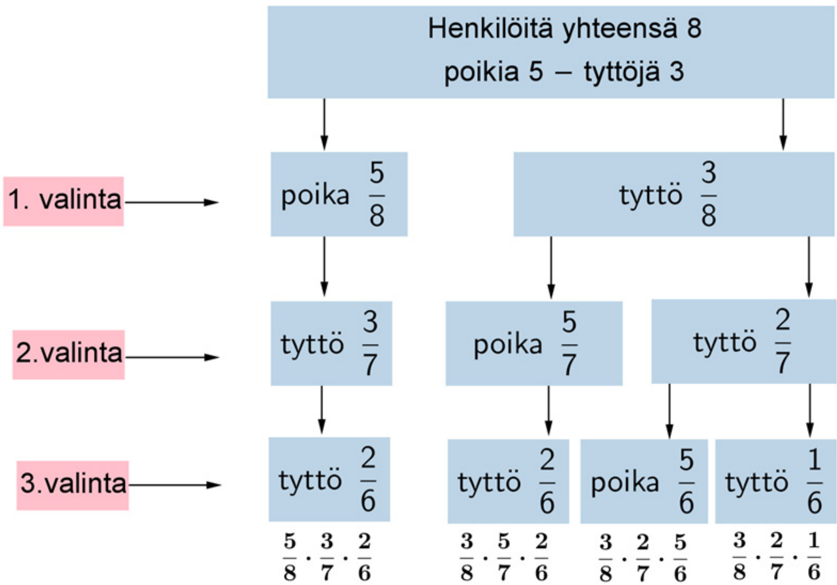
181.

Hissiin odottavia henkilöitä on yhteensä $5 + 3 = 8$.

Tapahtuma ”kolmesta ainakin kaksi on tyttöjä” voi tarkoittaa seuraavia tilanteita:

- kolmesta kaksi on tyttöjä ja yksi on poika: PTT, TPT, TTP
- kaikki kolme ovat tyttöjä: TTT.

Havainnollistetaan näitä neljää eri tilannetta ja niiden todennäköisyyksiä puukaavion avulla.



Jokaisen tilanteen todennäköisyys lasketaan kertolaskusäännön mukaan. Kolmen ensimmäisen tilanteen (PTT, TPT, TTP) todennäköisyydet ovat samat, koska niissä kaikissa on täsmälleen kaksi tyttöä ja yksi poika.

Kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla. Kysytty todennäköisyys on

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"ainakin kaksi tyttöä"}) \\
&= 3 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{2}{7}.
\end{aligned}
$$

182.

Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu yksi mies on punavihersokea, on

$$P(\text{"on punavihersokea"}) = 8{,}0\ \% = 0{,}08.$$

Todennäköisyys, että mies ei ole punavihersokea, on

$$P(\text{"ei ole punavihersokea"}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92.$$

Tapahtuma ”kolmesta valitusta ainakin kaksi on punavihersokeita” voi tarkoittaa seuraavia tilanteita:

- kolmesta kaksi on punavihersokea (O) ja yksi ei (E): OOE, OEO, EOO
- kaikki kolme ovat punavihersokeita: OOO

Eri tilanteiden todennäköisyydet lasketaan kertolaskusäännön mukaan. Kolmen ensimmäisen tilanteen (OOE, OEO, EOO) todennäköisyydet ovat samat, koska niissä kaikissa on täsmälleen kaksi punavihersokeaa ja yksi ei-punavihersokea.

Kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla. Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
&P(\text{"ainakin kaksi punavihersokeaa"})\\
&= P(\text{”OOE”}) + P(\text{”OEO}) + P(\text{”EOO”}) + P(\text{”OOO”})\\
&= 3 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92 + 0{,}08 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}08\\
&= 0{,}018176\\
&\approx 0{,}018 = 1{,}8\ \%.
\end{aligned}$$

183.

Todennäköisyys, että uudempi kello soi oikeaan aikaan on $P(\text{"uusi soi"}) = 0{,}98$, joten $P(\text{"uusi ei soi"}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$.

Todennäköisyys, että vanhempi kello soi oikeaan aikaan on $P(\text{"vanha soi"}) = 0{,}85$, joten $P(\text{"vanha ei soi"}) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

a) Todennäköisyys, että molemmat kello soivat oikeaan aikaan on kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"molemmat soivat"}) = 0{,}98 \cdot 0{,}85 = 0{,}833.$$

b) Tapahtuma ”vain toinen” voi tarkoittaa kahta mahdollista tilannetta:

- uusi kello soi oikeaan aikaan ja vanha kello ei soi **tai**
- uusi kello ei soi oikeaan aikaan ja vanha kello soi.

Molempien tilanteiden todennäköisyydet lasketaan kertolaskusäännön mukaan. Kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"vain toinen soi"})$$
$$= P(\text{"uusi soi } \textbf{ja} \text{ vanha ei soi"}) + P(\text{"uusi ei soi } \textbf{ja} \text{ vanha soi"})$$
$$= 0{,}98 \cdot\ 0{,}15 + 0{,}02 \cdot 0{,}85$$
$$= 0{,}164.$$

c) Todennäköisyys, että kumpikaan kello ei soi oikeaan aikaan on kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"kumpikaan ei soi"}) = 0{,}02 \cdot 0{,}15 = 0{,}003.$$

184.

a) Todennäköisyys, että yksittäisellä nopanheitolla saadaan silmäluku kuusi on

$$P(\text{"heitolla kuutonen"}) = \frac{1}{6}.$$

Todennäköisyys, että ei saada kuutosta, on

$$P(\text{"heitolla ei kuutosta"}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Tapahtuma ”kolmella heitolla korkeintaan kerran kuutonen” pitää sisällään tilanteet ”tasan yksi on kuutonen ja kaksi muuta eivät” sekä ”ei yhtään kuutosta”.

Eri tilanteiden todennäköisyydet lasketaan kertolaskusäännön mukaan. Kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"korkeintaan kerran kuutonen"})$$

$$= P(\text{”tasan kerran kuutonen”}) + P(\text{”ei yhtään kuutosta”})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}_{\text{1.heitolla kuutonen}} + \underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}_{\text{2.heitolla kuutonen}} + \underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}}_{\text{3.heitolla kuutonen}}$$

$$+ \underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}_{\text{ei yhtään kuutosta}}$$

$$= 3\cdot \underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}_{\text{tasan yksi kuutonen}} + \underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}_{\text{ei yhtään kuutosta}}$$

$$= \frac{25}{27}.$$

Huomaa, että silmäluku kuusi voi esiintyä kolmen heiton sarjassa kolmessa eri kohdassa (ensimmäisenä, toisena tai kolmantena). Tapaus ”yksi kuutonen” sisältää siis kolme tilannetta, joiden todennäköisyydet ovat keskenään yhtä suuret, koska niissä on täsmälleen yksi kuutonen ja kaksi muuta silmälukua.

b) Tapahtumalle ”ykkönen tai kakkonen” suotuisia alkeistapauksia on kaksi. Todennäköisyys, että yksittäisellä nopanheitolla saadaan ykkönen tai kakkonen, on

$$P(\text{"silmäluku 1 tai 2"}) = {}^{(2}\frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}.$$

Todennäköisyys, että ei saada ykköstä tai kakkosta, eli saadaan silmäluku 3–6, on

$$P(\text{"silmäluku 3 - 6"}) = 1 - \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}}.$$

Kysytty todennäköisyys on

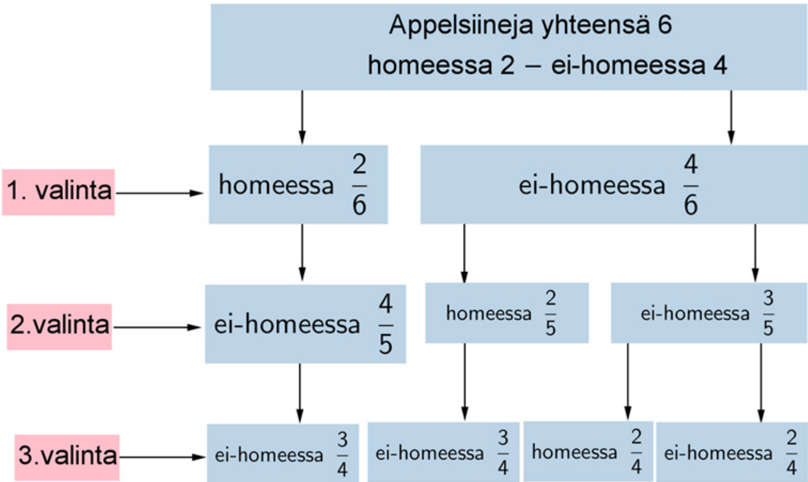
$$\begin{aligned}
&P(\text{"ainakin kaksi kertaa 1 tai 2"}) \\
&= P(\text{"tasan kaksi kertaa 1 tai 2"}) + P(\text{"kolme kertaa 1 tai 2"}) \\
&= \mathbf{3} \cdot \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{\frac{2}{3}} + \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{7}{27}.
\end{aligned}$$

185.

Tapahtuma ”kolmesta korkeintaan yksi on homeessa” pitää sisällään tilanteet

- ei yhtään homeista
- tasan yksi on homeessa.

Havainnollistetaan eri tilanteita puukaaviolla. Koska appelsiineja ei noston jälkeen palauteta rasiaan, appelsiinien kokonaismäärä vähenee yhdellä joka nostolla.



$\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}$ $\quad \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ $\quad \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$ $\quad \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$

Eri tilanteita on yhteensä **neljä**. Jokaisen tilanteen todennäköisyys on laskettu kertolaskusäännöllä. Huomataan, että eri tilanteiden todennäköisyydet ovat keskenään yhtä suuret.

Kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä:

$$P(\text{"korkeintaan yksi homeessa"})$$

$$= \mathbf{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{4}{5}.$$

186.

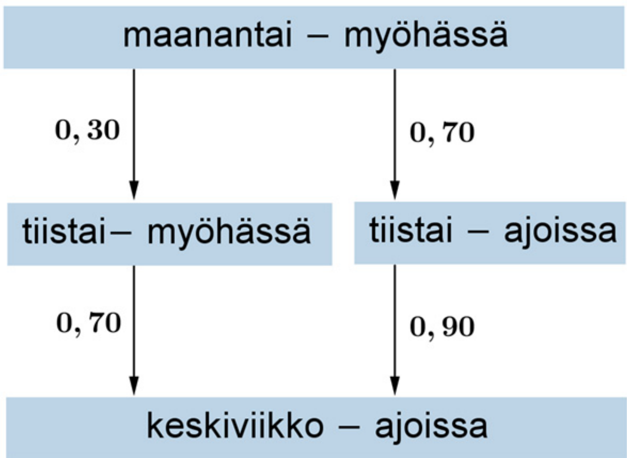
Jos oppilas jonain päivänä myöhästyy koulusta, niin hän

- myöhästyy seuraavanakin päivänä todennäköisyydellä 0,30
- on ajoissa seuraavana päivänä todennäköisyydellä $1 - 0{,}30 = 0{,}70$

Jos oppilas jonain päivänä tulee ajoissa koulussa, niin hän

- myöhästyy seuraavana päivänä todennäköisyydellä 0,10
- on ajoissa seuraavanakin päivänä todennäköisyydellä $1 - 0{,}10 = 0{,}90$

Maanantaina oppilas myöhästyy. Piirretään puukaavio havainnollistamaan eri tilanteita ja niiden todennäköisyyksiä.



Molempien haarojen todennäköisyydet lasketaan kertolaskusäännön avulla ja kysytty kokonaistodennäköisyys lasketaan yhteenlaskusäännön avulla.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"keskiviikkona ajoissa"})\\
&= 0{,}30 \cdot 0{,}70 + 0{,}70 \cdot 0{,}90
\end{aligned}
$$

187.

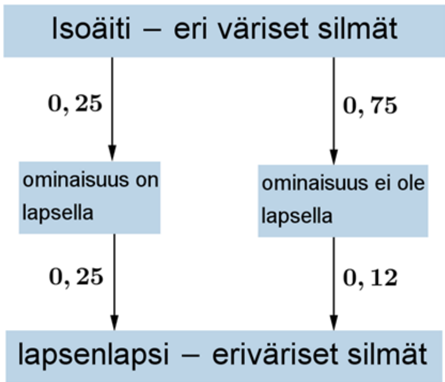
Isoäidillä on silmien erivärisyyttä aiheuttava ominaisuus (heterokromia). Hän

- on periyttänyt ominaisuuden omalle lapselleen todennäköisyydellä 0,25
- ei ole periyttänyt ominaisuutta omalle lapselleen todennäköisyydellä $1 - 0{,}25 = 0{,}75$

Tämän lisäksi

- jos ominaisuus on lapsella, niin se periytyy lapsenlapselle todennäköisyydellä 0,25
- jos ominaisuutta ei ole lapsella, niin se voi olla lapsenlapsella todennäköisyydellä 0,12.

Piirretään puukaavio havainnollistamaan tilannetta.



Kummankin haaran todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä. Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{"lapsenlapsella on heterokromia"}) &= 0{,}25 \cdot 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}12 \\ &= 0{,}1525 \approx 0{,}15. \end{aligned}$$

188.

Voittotodennäköisyydet ovat seuraavat:

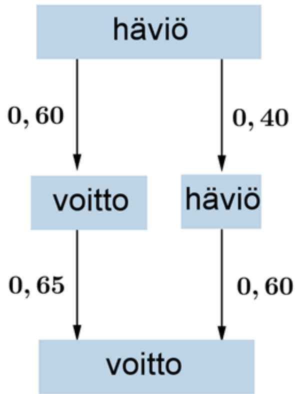
- jos pelaaja on **voittanut** edellisen taistelun, niin seuraavassa taistelussa hän
  - voittaa todennäköisyydellä 0,65
  - häviää todennäköisyydellä $1 - 0{,}65 = 0{,}35$.

- jos pelaaja on **hävinnyt** edellisen taistelun, niin seuraavassa taistelussa hän
  - voittaa todennäköisyydellä 0,60
  - häviää todennäköisyydellä $1 - 0{,}60 = 0{,}40$.

a) Pelaaja hävisi ensimmäisen taistelun, joten hän voittaa toisen taistelun todennäköisyydellä 0,60, minkä jälkeen häviää kolmannen todennäköisyydellä 0,35. Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{voittaa 2. taistelun ja häviää 3. taistelun}) &= 0{,}60 \cdot 0{,}35 \\ &= 0{,}21. \end{aligned}$$

b) Toinen taistelu on johtanut joko voittoon tai häviöön. Havainnollistetaan tilannetta puukaaviolla.



Kummankin haaran todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä. Kysytty kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä:

$P(\text{voittaa 3. taistelun}) = 0{,}60 \cdot 0{,}65 + 0{,}40 \cdot 0{,}60 = 0{,}63.$

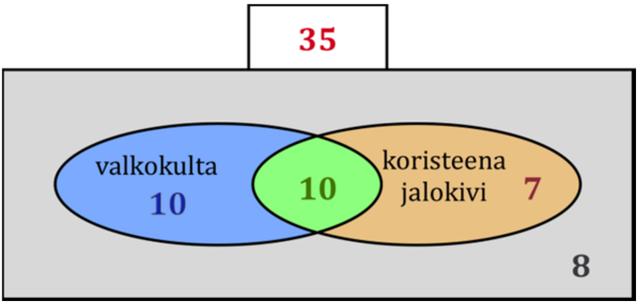
189.

Myynnissä on yhteensä $15 + 20 = \mathbf{35}$ erilaista sormusta.

a) Jalokivellä koristeltuja sormuksia on yhteensä $7 + 10 = 17$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"sormus on koristeltu jalokivellä"}) = \frac{17}{35}.$$

b) Piirretään ratkaisun avuksi Venn-diagrammi. Tapahtumat ”sormus on valkokultaa” ja ”sormuksessa on jalokivi koristeena” eivät ole erilliset koska **10** valkokultaisista sormuksista on koristeltu jalokivellä.

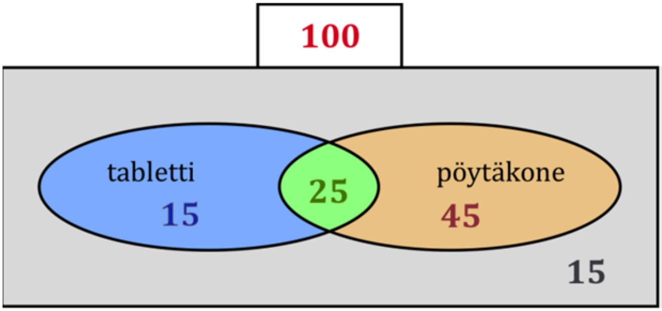


Tapahtumalle ”sormus on valkokultaa tai siinä on jalokivi koristeena” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä $\mathbf{10} + \mathbf{10} + \mathbf{7} = 27$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"sormus on valkokultaa tai koristeltu jalokivellä"}) = \frac{27}{35}.$$

190.

Piirretään ratkaisun avuksi Venn-diagrammi. Yrityksessä on työntekijöitä prosentteina yhteensä 100 %. Tapahtumat ”henkilö käyttää tablettia” ja ”henkilö käyttää pöytäkonetta” eivät ole erilliset koska 25 % työntekijöistä käyttää molempia laitteita.



Tapahtumalle ”henkilö käyttää tablettia tai pöytäkonetta” suotuisien alkeistapausten osuus on yhteensä 15 % + 25 % + 45 % = 85 % työntekijöistä.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"henkilö käyttää tablettia tai tietokonetta"}) = 85\ \% = 0{,}85.$$

Satunnaisesti valittu työntekijä käyttää työssään tablettia tai pöytäkonetta todennäköisyydellä 0,85.

191.

Korttipakassa on yhteensä 52 korttia.

a) Ristejä on yhteensä 13. Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{"1. kortti on risti } \textbf{ja} \text{ 2. kortti on risti"}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}.$$

b) Lasketaan todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin toinen korteista on pata” vastatapahtuma on ”kumpikaan korteista ei ole pata”. Patoja on yhteensä 13, joten muita kortteja kuin patoja on yhteensä $52 - 13 = 39$.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
&P(\text{"ainakin toinen korteista on pata"}) \\
&= 1 - P(\text{"kumpikaan korteista ei ole pata"}) \\
&= 1 - P(\text{"1. kortti ei ole pata } \textbf{ja} \text{ 2. kortti ei ole pata"}) \\
&= 1 - \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} = 1 - \frac{19}{34} \\
&= \frac{15}{34}.
\end{aligned}$$

c) Tapahtuma ”vain toinen korteista on hertta” pitää sisällään kaksi tilannetta: ”1. kortti on hertta ja 2. kortti ei ole hertta” sekä ”1. kortti ei ole hertta ja 2. kortti on hertta”.

Yhteenlaskusäännön mukaan

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"vain toinen kortti on hertta"}) \\
&= P(\text{"1. kortti hertta } \textbf{ja} \text{ 2. kortti ei hertta"}) \\
&\qquad\qquad\qquad + P(\text{"1. kortti ei hertta } \textbf{ja} \text{ 2. kortti hertta"}) \\
&= \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} \\
&= \frac{13}{34}.
\end{aligned}
$$

192.

Ensimmäiset liikennevalot ovat vihreällä todennäköisyydellä $\mathbf{0,80}$ ja punaisella todennäköisyydellä $1 - 0{,}80 = \mathbf{0,20}$.

Toiset liikennevalot ovat vihreällä todennäköisyydellä $\mathbf{0,70}$ ja punaisella todennäköisyydellä $1 - 0{,}70 = \mathbf{0,30}$.

Kolmannet liikennevalot ovat vihreällä todennäköisyydellä $\mathbf{0,90}$ ja punaisella todennäköisyydellä $1 - 0{,}90 = \mathbf{0,10}$.

a) Opiskelijan ei tarvitse pysähtyä valoihin kertaakaan, jos kaikki valot ovat vihreällä. Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{1. vihreällä } \textbf{ja} \text{ 2. vihreällä } \textbf{ja} \text{ 3. virheällä}) &= \mathbf{0,80} \cdot \mathbf{0,70} \cdot \mathbf{0,90} \\ &= 0{,}504 \approx 0{,}50. \end{aligned}$$

b) Opiskelija joutuu pysähtymään valoihin vain kerran silloin, kun yksi kolmesta valosta on punaisella ja kaksi muuta virheällä. Yhteenlaskusäännön mukaan

$$P(\text{"vain yksi punaisella ja muut vihreällä"})$$

$$= \mathbf{0,20} \cdot \mathbf{0,70} \cdot \mathbf{0,90} + \mathbf{0,80} \cdot \mathbf{0,30} \cdot \mathbf{0,90} + \mathbf{0,80} \cdot \mathbf{0,70} \cdot \mathbf{0,10}$$

$$= 0{,}398 \approx 0{,}40.$$

193.

Todennäköisyys vastata yksittäisessä tehtävässä arvaamalla oikein on

$$P(\text{"vastaus on oikein"}) = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

ja väärän vastauksen todennäköisyys

$$P(\text{"vastaus on väärin"}) = \mathbf{\frac{3}{4}}.$$

a) Opiskelija arvaa oikein täsmälleen yhden kysymyksen silloin, kun yksi kolmesta vastauksesta on oikein ja kaksi muuta väärin. Yhteenlaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned}
&P(\text{"täsmälleen yksi vastaus on oikein"}) \\
&= \underbrace{\mathbf{\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{\frac{3}{4}} \cdot \mathbf{\frac{3}{4}}}_{\text{1.vastaus oikein}} + \underbrace{\mathbf{\frac{3}{4}} \cdot \mathbf{\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{\frac{3}{4}}}_{\text{2.vastaus oikein}} + \underbrace{\mathbf{\frac{3}{4}} \cdot \mathbf{\frac{3}{4}} \cdot \mathbf{\frac{1}{4}}}_{\text{3.vastaus oikein}} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \\
&= \frac{27}{64} = 0{,}421875 \approx 0{,}42.
\end{aligned}$$

b) Lasketaan todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin kaksi vastausta oikein” vastatapahtuma on ”korkeintaan yksi vastaus oikein”.

Vastatapahtuman todennäköisyys on

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"korkeintaan yksi vastaus oikein"})\\
&= P(\text{"täsmälleen yksi vastaus on oikein"})\\
&\qquad\qquad + P(\text{"kaikki vastaukset väärin"})\\
&= \frac{27}{64} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\\
&= \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{54}{64}\\
&= \frac{27}{32}.
\end{aligned}
$$

Kysytty todennäköisyys on silloin

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"ainakin kaksi vastausta oikein"})\\
&= 1 - P(\text{"korkeintaan yksi vastaus oikein"})\\
&= 1 - \frac{27}{32}\\
&= \frac{5}{32} = 0{,}15625 \approx 0{,}16.
\end{aligned}
$$

194.

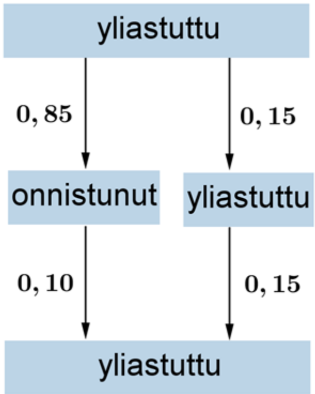
Todennäköisyydet ovat seuraavat:

- jos pelaaja on **astunut hyppynsä yli**, niin seuraavassa hypyssä hän
  - astuu yli todennäköisyydellä 0,15
  - onnistuu todennäköisyydellä $1 - 0{,}15 = 0{,}85$.
- jos pelaaja on **onnistunut** edellisessä hypyssään, niin seuraavassa hypyssä hän
  - astuu yli todennäköisyydellä 0,10
  - onnistuu todennäköisyydellä $1 - 0{,}10 = 0{,}90$.

a) Pelaaja astui ensimmäisen hyppynsä yli. Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{astuu 2. hypyn yli ja astuu 3. hypyn yli}) &= 0{,}15 \cdot 0{,}15 \\ &= 0{,}0225 \approx 0{,}023. \end{aligned}$$

b) Ensimmäinen hyppy on yliastuttu. Toinen hyppy on voinut olla onnistunut tai yliastuttu. Havainnollistetaan tilannetta puukaaviolla.



Kummankin haaran todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä. Kysytty kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä:

$$\begin{aligned} P(\text{astuu yli 3. hypyn}) &= 0{,}85 \cdot 0{,}10 + 0{,}15 \cdot 0{,}15 \\ &= 0{,}1075 \approx 0{,}11. \end{aligned}$$

2.5 Tuloperiaate ja kombinaatiot

195.

Asukokonaisuuden valitseminen koostuu kolmesta peräkkäisestä vaiheesta: valitaan housut, valitaan paita ja valitaan kengät. Kussakin vaiheessa on tietty määrä vaihtoehtoja: neljät housut, viisi paitaa, kolmet kengät.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia asukokonaisuuksia on yhteensä

$$4 \cdot 5 \cdot 3 = 60.$$

196.

Tanssiparien muodostaminen koostuu kahdesta peräkkäisestä vaiheesta: valitaan parin naispuolinen jäsen ja valitaan parin miespuolinen jäsen. Molemmissa vaiheissa on tietty määrä vaihtoehtoja: kuusi tyttöä ja kuusi poikaa.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia tyttö-poika-pareja on yhteensä

$$6 \cdot 6 = 36.$$

197.

Rekisterikilven muodostaminen koostuu kuudesta peräkkäisestä vaiheesta: ensin valitaan kolme kirjainta ja sitten kolme numeroa. Kussakin vaiheessa on tietty määrä vaihtoehtoja: kirjainvaihtoehtoja on yhteensä 29 ja numerovaihtoehtoja yhteensä 10.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia rekisterikilpiä on yhteensä

$$\underbrace{29 \cdot 29 \cdot 29}_{\text{3 kirjainta}} \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{3 numeroa}} = 24\,389\,000.$$

198.

Henkilötunnuksen loppuosan muodostaminen koostuu neljästä peräkkäisestä vaiheesta: ensin valitaan kolme numeroa ja sitten tarkistusmerkki. Kussakin vaiheessa on tietty määrä vaihtoehtoja:

- Numero on luku välillä 0–9, joten numerovaihtoehtoja on yhteensä 10.
- Tarkistusmerkki voi olla numero, joita on yhteensä 10, tai kirjain, joita on käytettävissä 21. Tarkistusmerkkivaihtoehtoja on yhteensä $10 + 21 = 31$.

a) Niitä tunnuksia, joissa tarkistusmerkki on kirjain, on tuloperiaatteen mukaan yhteensä

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{3 numeroa}} \cdot \underbrace{21}_{\text{kirjain}} = 21\,000.$$

b) Erilaisia tunnuksia on tuloperiaatteen mukaan yhteensä

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 31 = 31\,000.$$

c) Alkeistapauksia, eli erilaisia tunnuksia, on yhteensä 31 000. Yksilönumerolle 621N suotuisia alkeistapauksia on ainoastaan yksi. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"tunnus on 612N"}) = \frac{1}{31\,000} = 0{,}0000322\ldots \approx 3{,}2 \cdot 10^{-5}.$$

199.

a) Asukokonaisuuden valitseminen koostuu kolmesta peräkkäisestä vaiheesta: valitaan pusero, valitaan farkut ja valitaan kengät. Kussakin vaiheessa on tietty määrä vaihtoehtoja: neljä paitaa, kolmet farkut, kahdet kengät.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia asukokonaisuuksia on yhteensä

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

b) Jos mustat farkut jätetään valintamahdollisuuksista pois, niin farkkuvaihtoehtoja on $4 - 1 = 3$. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia asukokonaisuuksia on tällöin yhteensä

$$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

c) Alkeistapauksia, eli erilaisia asukokonaisuuksia, on yhteensä 24. Tapahtumalle ”ei mustia farkkuja” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 16. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"ei mustia farkkuja"}) = \frac{16^{(8}}{24} = \frac{2}{3}.$$

200.

a) Kurssikoodin muodostaminen koostuu viidestä peräkkäisestä vaiheesta: tuloperiaatteen mukaan mahdollisia koodeja on yhteensä

$$\underbrace{21 \cdot 21}_{\substack{\text{kaksi}\\ \text{kirjainta}}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{\substack{\text{kaksi}\\ \text{erikoismerkkiä}}} \cdot \underbrace{10}_{\text{numero}} = 110\,250.$$

b) Jos sama merkki ei voi esiintyä koodissa kahdesti, niin vaihtoehtojen lukumäärä pienenee yhdellä toisessa ja neljännessä vaiheessa. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia tunnuksia on tällöin yhteensä

$$\underbrace{21 \cdot 20}_{\substack{\text{kaksi eri}\\ \text{kirjainta}}} \cdot \underbrace{5 \cdot 4}_{\substack{\text{kaksi eri}\\ \text{erikoismerkkiä}}} \cdot \underbrace{10}_{\text{numero}} = 84\,000.$$

201.

a) Salasanassa jokainen neljästä numerosta on numero välillä 0–9, joten jokaisen numeron valinnassa on yhteensä 10 vaihtoehtoa. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia salasanoja on yhteensä

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000.$$

b) Ensimmäisen numeron valinnassa on vain yksi vaihtoehto (numero 3). Kolmen viimeisen numeron valinnassa vaihtoehtoja on kymmenen kussakin. Tuloperiaatteen mukaan tunnuksia on yhteensä

$$1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000.$$

c) Lasketaan niiden salasanojen lukumäärä, joista Tuomas valitsee. Tuomas tietää, että ensimmäinen numero on 3 (yksi vaihtoehto). Toinen ja kolmas numero ovat parittomia, eli Tuomas valitsee ne numeroiden 1, 3, 5, 7 ja 9 joukosta (viisi vaihtoehtoa). Viimeinen neljäs numero voi olla mikä hyvänsä luvuista 0–9 (kymmenen vaihtoehtoa).

Tuloperiaatteen mukaan Tuomaksella on yhteensä

$$1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 = 250$$

valintamahdollisuutta. Näistä ainoastaan yksi on tapahtumalle ”valittu salasana on Kaisan salasana” suotuisa. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"Tuomas arvaa oikein"}) = \frac{1}{250} = 0{,}0040.$$

202.

Järjestetään lapset jonoon. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja eli järjestyksiä on yhteensä

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040.$$

Oikeita järjestyksiä (vanhimmasta nuorimpaan tai nuorimmasta vanhimpaan) on kaksi. Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{"oikea järjestys"}) &= \frac{2}{5040}\ ^{(2} \\ &= \frac{1}{2520} \\ &= 0{,}000396\ldots \approx 0{,}00040. \end{aligned}$$

203.

a) Erilaisia jonoja eli järjestyksiä on tuloperiaatteen mukaan

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$$

b) Oikeita järjestyksiä (pisimmästä lyhyimpään tai lyhyimmästä pisimpään) on kaksi.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"oikea järjestys"}) = \frac{2}{720} = \frac{1}{360} = 0{,}00277\ldots \approx 0{,}0028.$$

204.

Erilaisia viiden valtion järjestyksiä on tuloperiaatteen mukaan

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120.$$

a) Oikeita järjestyksiä pinta-alaltaan pienimmästä suurimpaan on ainoastaan yksi. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"oikea pinta-alajärjestys"}) = \frac{1}{120} = 0{,}00833\ldots \approx 0{,}0083.$$

b) Oikeita aakkosjärjestyksiäkin on ainoastaan yksi. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"oikea aakkosjärjestys"}) = \frac{1}{120} \approx 0{,}0083.$$

205.

Urheilijoiden jonossa on yhteensä $3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 9$ urheilijaa.

a) Koripalloilija voi olla jonon ensimmäisenä ainoastaan yhdellä tavalla. Tämän jälkeen loput $9 - 1 = 8$ urheilijaa voidaan valita jonon muille paikoille 8! eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia järjestyksiä on

$$1 \cdot 8! = 40\,320.$$

b) Kolme muodostelmaluistelijaa voi asettua jonon alkuun 3! eri tavalla. Tämän jälkeen loput $9 - 3 = 6$ urheilijaa voidaan valita jonon muille paikoille 6! eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia järjestyksiä on

$$3! \cdot 6! = 4320.$$

c) Muodostelmaluistelijat voivat asettua jonon alkuun 3! eri tavalla. Kaksi purjehtijaa voivat asettua jonon loppuun 2! eri tavalla. Tämän jälkeen loput neljä urheilijaa voidaan valita jonon keskipaikoille 4! eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia järjestyksiä on

$$3! \cdot 4! \cdot 2! = 288.$$

206.

a) Hyppykilpailuun osallistuu yhteensä 11 kilpailijaa. Erilaisia hyppyjärjestyksiä on tuloperiaatteen mukaan yhteensä

$$11! = 39\,916\,800.$$

b) Neljä kaverusta Juha, Elias, Valtteri ja Eetu voivat asettua jonon alkuun $4!$ eri tavalla. Tämän jälkeen loput $11 - 4 = 7$ kilpailijaa voivat hypätä $7!$ eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan kysyttyjä järjestyksiä on yhteensä

$$4! \cdot 7! = 120\,960.$$

207.

a) Seurueessa on yhteensä $5 + 5 = 10$ henkilöä. Erilaisia 10 henkilön jonoja on tuloperiaatteen mukaan yhteensä 10! = 3 628 800.

b) Viisi naista voi asettua jonon alkuun 5! = 120 eri tavalla. Tämän jälkeen viisi miestä voi asettua jonon loppuun 5! = 120 eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja on yhteensä
$120 \cdot 120 = 14\,400$.

c) Jonon muodostaminen koostuu 10 peräkkäisestä vaiheesta: valitaan nainen (N) jonon ensimmäiselle paikalle, valitaan mies (M) jonon toiselle paikalle, valitaan nainen jonon kolmannelle paikalle, ja jatketaan näin. Kussakin vaiheessa on tietty määrä vaihtoehtoja: jokaisen valinnan jälkeen joko nais- tai miesvaihtoehtojen määrä vähenee yhdellä.

Tuloperiaatteen mukaan sellaisia järjestyksiä, joissa ensimmäinen henkilö on nainen ja sitten mies ja nainen vuorottelevat, on yhteensä

$$\overbrace{5}^{\text{N}} \cdot \overbrace{5}^{\text{M}} \cdot \overbrace{4}^{\text{N}} \cdot \overbrace{4}^{\text{M}} \cdot \overbrace{3}^{\text{N}} \cdot \overbrace{3}^{\text{M}} \cdot \overbrace{2}^{\text{N}} \cdot \overbrace{2}^{\text{M}} \cdot \overbrace{1}^{\text{N}} \cdot \overbrace{1}^{\text{M}} = 14\,400.$$

208.

a) Heittäjiä on yhteensä kuusi. Erilaisia heittojärjestyksiä on tuloperiaatteen mukaan 6! = 720.

b) Heittäjistä neljä on tyttöjä (Bettina sekä kolme serkkua). Poikia on serkuksista $5 - 3 = 2$.

Neljä tyttöä voivat asettua heittojärjestyksessä ensimmäiseksi 4! eri tavalla. Tämän jälkeen kaksi poikaa voivat asettua heittojärjestyksen viimeiseksi 2! eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia heittojärjestyksiä on yhteensä

$$4! \cdot 2! = 48.$$

Alkeistapauksia, eli heittojärjestyksiä on yhteensä 720. Tapahtumalle ”tytöt heittävät ensin, sitten pojat” suotuisia alkeistapauksia on yhteensä 48. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"tytöt heittävät ensin, sitten pojat"}) = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}.$$

209.

a)

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

b)

$$\binom{13}{6} = \frac{13!}{6! \cdot (13-6)!} = \frac{13!}{6! \cdot 7!} = 1716$$

210.

a) Valitaan 28 oppilaasta kolme:

$$\binom{28}{3} = \frac{28!}{3! \cdot (28-3)!} = \frac{28!}{3! \cdot 25!} = 3276.$$

b) Valitaan 28 oppilaasta viisi:

$$\binom{28}{5} = \frac{28!}{5! \cdot (28-5)!} = \frac{28!}{5! \cdot 23!} = 98\,280.$$

Kombinaatiot voidaan laskea myös ilman kertomaa useimmista laskimista löytyvän nCr-näppäimen avulla.

211.

a) Valitaan kahdeksasta pizzatäytteestä neljä:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70.$$

b) Valitaan kahdeksasta pizzatäytteestä viisi:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$$

Kombinaatiot voidaan laskea myös ilman kertomaa useimmista laskimista löytyvän nCr-näppäimen avulla.

212.

a) Valitaan 52 kortista viisi:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot (52-5)!} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2\,598\,960.$$

b) Herttoja on korttipakassa yhteensä 13. Valitaan 13 hertasta viisi:

$$\binom{13}{5} = \frac{13!}{5! \cdot (13-5)!} = \frac{13!}{5! \cdot 8!} = 1287.$$

Kombinaatiot voidaan laskea myös ilman kertomaa useimmista laskimista löytyvän nCr-näppäimen avulla.

213.

a) Valitaan 52 kortista seitsemän:

$$\binom{52}{7} = \frac{52!}{7! \cdot (52-7)!} = \frac{52!}{7! \cdot 45!} = 133\,784\,560.$$

b) Patoja on korttipakassa yhteensä 13. Valitaan 13 padasta seitsemän:

$$\binom{13}{7} = \frac{13!}{7! \cdot (13-7)!} = \frac{13!}{7! \cdot 6!} = 1716.$$

c) Viisi ruutua valitaan 13 ruudun joukosta. Tämä valinta voidaan tehdä

$$\binom{13}{5} = \frac{13!}{5! \cdot (13-5)!} = \frac{13!}{5! \cdot 8!} = \color{red}{\mathbf{1287}}$$

eri tavalla.

Tämän jälkeen loput $7 - 5 = 2$ korttia valitaan muiden korttien joukossa. Nämä kortit eivät ole ruutuja, joten vaihtoehtoja on jäljellä $52 - 13 = 39$ kappaletta. Loput kortit voidaan valita

$$\binom{39}{2} = \frac{39!}{2! \cdot (39-2)!} = \frac{39!}{2! \cdot 37!} = \color{blue}{\mathbf{741}}$$

eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia seitsemän kortin käsiä, joissa on tasan viisi ruutua, on yhteensä

$$\overbrace{\binom{13}{5}}^{\text{5 ruutua}} \cdot \overbrace{\binom{39}{2}}^{\text{2 muuta}} = \color{red}{\mathbf{1287}} \cdot \color{blue}{\mathbf{741}} = 953\,667.$$

214.

Syntymäpäiville osallistuu yhteensä $19 + 41 = 60$ henkilöä.

a) Valitaan 60 vieraasta kuusi:

$$\binom{60}{6} = 50\,063\,860.$$

Kombinaatio voidaan laskea useimmista laskimista löytyvän nCr-näppäimen avulla.

b) Valitaan 19 lapsesta kuusi:

$$\binom{19}{6} = 27\,132.$$

c) Valitaan kaksi lasta valitaan 19 lapsen joukosta:

$$\binom{19}{2} = \mathbf{171}$$

Tämän jälkeen loput $6 - 2 = 4$ henkilöä valitaan pöytäseurueeseen aikuisten joukosta. Valitaan 41 aikuisesta neljä:

$$\binom{41}{4} = \mathbf{101\,270}.$$

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia kuuden henkilön pöytäseurueita, joissa on tasan kaksi lasta, on yhteensä

$$\overbrace{\binom{19}{2}}^{\text{2 lasta}} \cdot \overbrace{\binom{41}{4}}^{\text{4 aikuista}} = \mathbf{171} \cdot \mathbf{101\,270} = 17\,317\,170.$$

215.

a) Valitaan 18 linnusta kahdeksan:

$$\binom{18}{8} = 43\,758.$$

b) Anni tunnistaa 18 lintua. Luontokurssilla tunnistettiin yhteensä 52 lintua, joten Anni ei tunnista $52 - 18 = 34$ lintua.

Valitaan ryhmään ensin yksi lintu, jota Anni ei tunnista. Tämä voidaan tehdä 34 tavalla. Loput $8 - 1 = 7$ lintua valitaan niistä 18 linnuista, jotka Anni tunnistaa.

Tuloperiaatteen mukaan niitä kahdeksan linnun ryhmiä, joissa on mukana tasan yksi lintu, jota Anni ei tunnista, on yhteensä

$$34 \cdot \binom{18}{7} = 34 \cdot 31\,824 = 1\,082\,016.$$

216.

a) Valitaan 29 värisävystä seitsemän:

$$\binom{29}{7} = 1\,560\,780.$$

b) Valitaan kuudesta punaisen sävystä kolme:

$$\binom{6}{3} = 20.$$

c) Kolme punaisen sävyä voidaan valita **20** eri tavalla. Tämän jälkeen valitaan loput neljä koruun tulevaa värisävyä. Värejä on yhteensä 29 ja niistä punaisen sävyjä on kuusi, joten valinta tehdään $29 - 6 = 23$ sävyn joukosta. Valitaan 23 värisävystä neljä:

$$\binom{23}{4} = \mathbf{8\,855}.$$

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia väriyhdistelmiä, joissa on kolme punaisen sävyä ja neljä muuta sävyä, on yhteensä

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{23}{4} = \mathbf{20} \cdot \mathbf{8\,855} = 177\,100.$$

217.

Ryhmässä on yhteensä $15 + 16 = 31$ henkilöä.

a) Valitaan 31 henkilöstä neljä:

$$\binom{31}{4} = 31\,465.$$

b) Niitä ryhmiä, joissa ovat neljä kaverusta Pekka, Patrik, Tessa ja Julia on ainoastaan yksi. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"Pekka, Patrik, Tessa ja Julia"}) = \frac{1}{31\,465}$$

$$= 0{,}0000317 \ldots \approx 3{,}2 \cdot 10^{-5}.$$

c) Ensin valitaan kaksi poikaa 15 pojan joukosta. Poikien valinta voidaan tehdä

$$\binom{15}{2} = 105$$

eri tavalla.

Tämän jälkeen valitaan kaksi tyttöä 16 tytön joukosta. Tyttöjen valinta voidaan tehdä

$$\binom{16}{2} = 120$$

eri tavalla.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"kaksi poikaa } \textbf{ja} \text{ kaksi tyttöä"})$$

$$= \frac{\overbrace{\binom{15}{2}}^{\text{2 poikaa}} \cdot \overbrace{\binom{16}{2}}^{\text{2 tyttöä}}}{\binom{31}{4}}$$

$$= \frac{105 \cdot 120}{31\,465} = \frac{12600}{31\,465}$$

$$= \frac{360}{899} = 0{,}400\ldots \approx 0{,}40.$$

218.

Kukkasipuleita on yhteensä $15 + 12 + 10 = 37$ kukkasipulia.

a) Valitaan 37 sipulista viisi:

$$\binom{37}{5} = 435\,897.$$

b) Valitaan 12 narsissista yksi ja 10 tulppaanista kolme ja 15 krookuksesta yksi. Erilaisia viiden sipulin ryhmiä on tuloperiaatteen mukaan yhteensä.

$$\overbrace{\binom{12}{1}}^{\text{1 narsissi}} \cdot \overbrace{\binom{10}{3}}^{\text{3 tulppaania}} \cdot \overbrace{\binom{15}{1}}^{\text{krookus}} = 12 \cdot 120 \cdot 15 = 21\,600.$$

c) Valitaan kaksi tulppaania ja $5 - 2 = 3$ narsissia. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"kaksi tulppaania } \textbf{ja} \text{ kolme narsissia"})$$

$$= \frac{\overbrace{\binom{10}{2}}^{\text{2 tulppania}} \cdot \overbrace{\binom{12}{3}}^{\text{3 narsissia}}}{\binom{37}{5}}$$

$$= \frac{45 \cdot 220}{435\,897} = \frac{9900}{435\,897}$$

$$= \frac{100}{4403} = 0{,}0227\ldots \approx 0{,}023.$$

219.

a) Valitaan viisi päänumeroa 50 numeron joukosta:

$$\binom{50}{5} = 2\,118\,760$$

Valitaan kaksi tähtinumeroa 10 numeron joukosta:

$$\binom{10}{2} = 45$$

Tuloperiaatteen mukaan viiden päänumeron ja kahden tähtinumeron ruudukkoja on yhteensä

$$\binom{50}{5} \cdot \binom{10}{2} = 2\,118\,760 \cdot 45 = 95\,344\,200.$$

b) Ruudukoita, joissa kaikki seitsemän numeroa ovat oikein, on yksi. Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{"kaikki oikein"}) &= \frac{1}{95\,344\,200} = 1{,}048\ldots \cdot 10^{-8} \\ &\approx 1{,}0 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

c) Viidestä oikeasta päänumerosta voidaan valitaan neljä $\binom{5}{4} = 5$ eri tavalla. Yksi päänumero valitaan väärin. Vaihtoehtoja on $50 - 5 = 45$, joten väärä päänumero voidaan valita $\binom{45}{1} = 45$ eri tavalla.

Kaksi tähtinumeroa valitaan väärin. Vaihtoehtoja on $10 - 2 = 8$, joten tähtinumerot voidaan valita $\binom{8}{2} = 28$ eri tavalla.

Kysytty todennäköisyys on

$$P\left(\begin{matrix}\text{"kaksi päänumeroa oikein } \textbf{ja} \text{ yksi päänumero väärin} \\ \textbf{ja} \text{ kaksi tähtinumeroa väärin"}\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{\overbrace{\binom{5}{4}}^{\text{4 oikein}} \cdot \overbrace{\binom{45}{1}}^{\text{1 väärin}} \cdot \overbrace{\binom{8}{2}}^{\text{2 väärin}}}{\binom{50}{5} \cdot \binom{10}{2}}$$

$$= \frac{5 \cdot 45 \cdot 28}{95\,344\,200} = \frac{6300}{95\,344\,200}$$

$$= \frac{1}{15\,134} = 0{,}0000660\,... \approx 6{,}6 \cdot 10^{-5}.$$

220.

a) Jokaisessa 10 kohdassa on neljä vaihtoehtoa. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia vastausrivejä on

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4}_{10 \text{ kpl}} = 4^{10} = 1\,048\,576.$$

b) Alkeistapauksia, eli erilaisia vastausrivejä, on yhteensä 1 048 576. Tapahtumalle ”kaikki oikein” suotuisia alkeistapauksia on ainoastaan yksi. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"kaikki oikein"}) = \frac{1}{1\,048\,576} = 0{,}000000953\ldots$$
$$\approx 9{,}5 \cdot 10^{-7}.$$

c) Jokaisessa kohdassa neljästä vaihtoehdosta kolme on väärin ja yksi oikein. Vastausrivejä, joissa kaksi ensimmäistä kohtaa ovat väärin ja loput $10 - 2 = 8$ kohtaa oikein on tuloperiaatteen mukaan yhteensä

$$\overbrace{3 \cdot 3}^{\text{väärin}} \cdot \overbrace{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{8 \text{ kpl}}}^{\text{oikein}} = 9.$$

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"kaksi ensimmäistä väärin ja loput oikein"})$$
$$= \frac{9}{1\,048\,576}$$
$$= 0{,}00000858\ldots \approx 8{,}6 \cdot 10^{-6}.$$

221.

a) Kutsuille osallistuu yhteensä $5 + 7 = 12$ henkilöä. Erilaisia jonoja on tuloperiaatteen mukaan yhteensä

$$12! = 479\,001\,600.$$

b) Seitsemän miestä voivat asettua jonon alkuun 7! eri tavalla. Tämän jälkeen viisi naista voivat asettua jonon loppuun 5! eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja on yhteensä

$$7! \cdot 5! = 604\,800.$$

222.

a) Ryhmiä on yhteensä kahdeksan. Erilaisia järjestyksiä on tuloperiaatteen mukaan

$$8! = 40\,320.$$

b) Oikeita paremmuusjärjestyksiä on ainoastaan yksi. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"oikea järjestys"}) = \frac{1}{40\,320} = 0{,}0000248\ldots \approx 2{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

223.

Juureksia on yhteensä $8 + 2 + 10 = 20$ juuresta.

a) Valitaan 20 juureksesta neljä:

$$\binom{20}{4} = 4845.$$

b) Valitaan 8 perunan joukosta viisi:

$$\binom{8}{5} = 56.$$

c) Valitaan kahdeksasta perunasta viisi, 10 porkkanasta kolme ja kahdesta sipulista yksi. Juuresjoukko voidaan tuloperiaatteen mukaan muodostaa

$$\overbrace{\binom{8}{5}}^{\text{5 perunaa}} \cdot \overbrace{\binom{10}{3}}^{\text{3 porkkanaa}} \cdot \overbrace{\binom{2}{1}}^{\text{1 sipuli}} = 56 \cdot 120 \cdot 2 = 13\,440.$$

eri tavalla.

224.

Tomaatteja on yhteensä $17 + 5 = 22$.

a) Valitaan 22 tomaatista viisi:

$$\binom{22}{5} = 26\,334.$$

b) Valitaan 17 tuoreesta tomaatista kolme ja viidestä pilaantuneesta tomaatista kaksi. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"3 tuoretta } \textbf{ja} \text{ 2 pilaantunutta"})$$

$$= \frac{\overbrace{\binom{17}{3}}^{\text{3 tuoretta}} \cdot \overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{2 pilaantunutta}}}{\binom{22}{5}} = \frac{680 \cdot 10}{26\,334} = \frac{6800}{26\,334}$$

$$= 0{,}258\ldots \approx 0{,}26.$$

c) Valitaan 17 tuoreesta tomaatista neljä ja viidestä pilaantuneesta tomaatista yksi. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"4 tuoretta } \textbf{ja} \text{ 1 pilaantunut"})$$

$$= \frac{\overbrace{\binom{17}{4}}^{\text{4 tuoretta}} \cdot \overbrace{\binom{5}{1}}^{\text{1 pilaantunut}}}{\binom{22}{5}} = \frac{2380 \cdot 5}{26\,334} = \frac{11\,900}{26\,334}$$

$$= 0{,}451\ldots \approx 0{,}45.$$