9. **Ratkaisu** Nettokorko on 100 % – 29 % = 71 % nimelliskorosta eli
$0{,}71 \cdot 1{,}50\ \% = 1{,}065\ \%$.

a) Talletuksen arvo tulee vuodessa 1,01065-kertaiseksi ja 10 vuodessa $1{,}01065^{10}$-kertaiseksi.
Siis talletuksen arvo 10 vuoden kuluttua on
$1{,}01065^{10} \cdot 1\,000\ € \approx 1\,111{,}75\ €$.

b) Merkitään talletusaikaa vuosina x.
Talletuksen arvo on kaksinkertainen, kun

$$1{,}01065^{x} \cdot 1\,000 = 2000 \qquad |:1000$$
$$1{,}01065^{x} = 2$$
$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}01065} \approx 65{,}4$$

Siis talletus on vähintään kaksinkertainen 66 vuoden kuluttua.

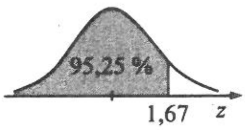
Vastaus **a)** 1 111,75 € **b)** 66 vuoden kuluttua

B2-osa

10. **Ratkaisu** Rajaa 175 (cm) vastaava normitettu arvo on

$$z = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{175-165}{6} = \frac{10}{6} \approx 1{,}67.$$

Taulukon mukaan normitetun rajan $z = 1{,}67$ alapuolella on jakaumasta 95,25 %.



Siis:
P(tyttö korkeintaan 175 cm) $\approx 0{,}9525 \approx 0{,}95$

Kertolaskusäännön mukaan
P(kaikki alle 175 cm pitkiä)
= P(3 tyttöä alle 175 cm) = $0{,}9525^3 \approx 0{,}86$.

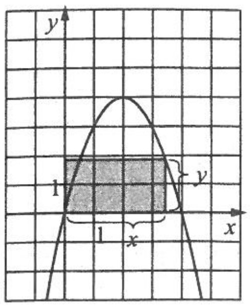
Tapahtuman ”Ainakin yksi yli 175 cm”
vastatapahtuma on ”Kaikki korkeintaan 175 cm”.
Siis:
P(ainakin yksi yli 175 cm) $\approx 1 - 0{,}86 = 0{,}14$.

Vastaus P(tyttö korkeintaan 175 cm) $\approx 0{,}95$,
P(kaikki alle 175 cm) $\approx 0{,}86$,
P(ainakin yksi yli 175 cm) $\approx 0{,}14$

Toinen tapa Todennäköisyyden P(ainakin yksi yli 175 cm) voi (hankalasti) laskea myös suoraan:
P(ainakin yksi) = P(1 tai 2 tai 3) = P(yksi) + P(kaksi) + P(kolme)

$$\begin{aligned}
&= 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 \cdot 0{,}9525 + 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 + 0{,}9525 \cdot 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 && \text{(yksi)}\\
&+ 0{,}0475 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 + 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 + 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}0475 && \text{(kaksi)}\\
&+ 0{,}0475 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}0475 && \text{(kolme)}\\
&= 3 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}9525^2 + 3 \cdot 0{,}0475^2 \cdot 0{,}9525 + 0{,}0475^3 \approx 0{,}136
\end{aligned}$$

11. **Ratkaisu** Suorakulmion kanta on x ja korkeus $y = 4x - x^2$.



Suorakulmion pinta-ala on
$xy = x(4x - x^2) = 4x^2 - x^3$.
Siis pinta-alan lauseke on
$A(x) = 4x^2 - x^3, \quad 0 \le x \le 4$.

Määritetään funktion $A(x) = 4x^2 - x^3$ suurin arvo välillä $0 \le x \le 4$.

Derivoidaan: $A'(x) = 4 \cdot 2x - 3x^2 = -3x^2 + 8x$

9. **Ratkaisu** Nettokorko on $100\,\% - 29\,\% = 71\,\%$ nimelliskorosta eli $0{,}71 \cdot 1{,}50\,\% = 1{,}065\,\%$.

a) Talletuksen arvo tulee vuodessa 1,01065-kertaiseksi ja 10 vuodessa $1{,}01065^{10}$-kertaiseksi.
Siis talletuksen arvo 10 vuoden kuluttua on

$1{,}01065^{10} \cdot 1\,000\,€ \approx 1\,111{,}75\,€$.

b) Merkitään talletusaikaa vuosina x.
Talletuksen arvo on kaksinkertainen, kun

$$1{,}01065^{x} \cdot 1\,000 = 2000 \qquad |:1000$$
$$1{,}01065^{x} = 2$$
$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}01065} \approx 65{,}4$$

Siis talletus on vähintään kaksinkertainen 66 vuoden kuluttua.

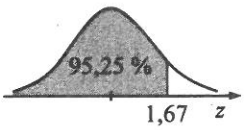
Vastaus **a)** 1 111,75 € **b)** 66 vuoden kuluttua

B2-osa

10. **Ratkaisu** Rajaa 175 (cm) vastaava normitettu arvo on

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{175 - 165}{6} = \frac{10}{6} \approx 1{,}67.$$

Taulukon mukaan normitetun rajan $z = 1{,}67$ alapuolella on jakaumasta 95,25 %.



Siis:
P(tyttö korkeintaan 175 cm) $\approx 0{,}9525 \approx 0{,}95$

Kertolaskusäännön mukaan
P(kaikki alle 175 cm pitkiä)
= P(3 tyttöä alle 175 cm) $= 0{,}9525^3 \approx 0{,}86$.

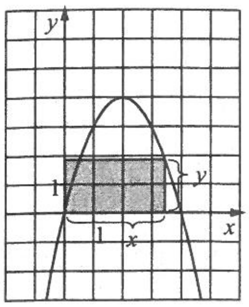
Tapahtuman "Ainakin yksi yli 175 cm" vastatapahtuma on "Kaikki korkeintaan 175 cm".
Siis:
P(ainakin yksi yli 175 cm) $\approx 1 - 0{,}86 = 0{,}14$.

Vastaus P(tyttö korkeintaan 175 cm) $\approx 0{,}95$,
P(kaikki alle 175 cm) $\approx 0{,}86$,
P(ainakin yksi yli 175 cm) $\approx 0{,}14$

Toinen tapa Todennäköisyyden P(ainakin yksi yli 175 cm) voi (hankalasti) laskea myös suoraan:
P(ainakin yksi) = P(1 tai 2 tai 3) = P(yksi) + P(kaksi) + P(kolme)

$= 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 \cdot 0{,}9525 + 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 + 0{,}9525 \cdot 0{,}9525 \cdot 0{,}0475$ (yksi)
$+ 0{,}0475 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 + 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 + 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}0475$ (kaksi)
$+ 0{,}0475 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}0475$ (kolme)
$= 3 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}9525^2 + 3 \cdot 0{,}0475^2 \cdot 0{,}9525 + 0{,}0475^3 \approx 0{,}136$

11. **Ratkaisu** Suorakulmion kanta on x ja korkeus $y = 4x - x^2$.



Suorakulmion pinta-ala on

$xy = x(4x - x^2) = 4x^2 - x^3$.

Siis pinta-alan lauseke on

$A(x) = 4x^2 - x^3, \quad 0 \le x \le 4$.

Määritetään funktion $A(x) = 4x^2 - x^3$ suurin arvo välillä $0 \le x \le 4$.

Derivoidaan: $A'(x) = 4 \cdot 2x - 3x^2 = -3x^2 + 8x$

9. **Ratkaisu** Nettokorko on $100\,\% - 29\,\% = 71\,\%$ nimelliskorosta eli $0{,}71 \cdot 1{,}50\,\% = 1{,}065\,\%$.

a) Talletuksen arvo tulee vuodessa 1,01065-kertaiseksi ja 10 vuodessa $1{,}01065^{10}$-kertaiseksi.
Siis talletuksen arvo 10 vuoden kuluttua on
$1{,}01065^{10} \cdot 1\,000\,€ \approx 1\,111{,}75\,€$.

b) Merkitään talletusaikaa vuosina x.
Talletuksen arvo on kaksinkertainen, kun

$$1{,}01065^{x} \cdot 1\,000 = 2000 \qquad | : 1000$$
$$1{,}01065^{x} = 2$$
$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}01065} \approx 65{,}4$$

Siis talletus on vähintään kaksinkertainen 66 vuoden kuluttua.

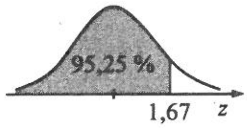
Vastaus a) 1 111,75 € **b)** 66 vuoden kuluttua

B2-osa

10. **Ratkaisu** Rajaa 175 (cm) vastaava normitettu arvo on

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{175 - 165}{6} = \frac{10}{6} \approx 1{,}67.$$

Taulukon mukaan normitetun rajan $z = 1{,}67$ alapuolella on jakaumasta 95,25 %.
Siis:
P(tyttö korkeintaan 175 cm) $\approx 0{,}9525 \approx 0{,}95$



Kertolaskusäännön mukaan
P(kaikki alle 175 cm pitkiä)
= P(3 tyttöä alle 175 cm) = $0{,}9525^3 \approx 0{,}86$.

Tapahtuman "Ainakin yksi yli 175 cm" vastatapahtuma on "Kaikki korkeintaan 175 cm".
Siis:
P(ainakin yksi yli 175 cm) $\approx 1 - 0{,}86 = 0{,}14$.

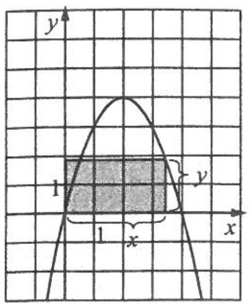
Vastaus P(tyttö korkeintaan 175 cm) $\approx 0{,}95$,
P(kaikki alle 175 cm) $\approx 0{,}86$,
P(ainakin yksi yli 175 cm) $\approx 0{,}14$

Toinen tapa Todennäköisyyden P(ainakin yksi yli 175 cm) voi (hankalasti) laskea myös suoraan:
P(ainakin yksi) = P(1 tai 2 tai 3) = P(yksi) + P(kaksi) + P(kolme)

$$= 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 \cdot 0{,}9525 + 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 + 0{,}9525 \cdot 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 \quad \text{(yksi)}$$
$$+ 0{,}0475 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 + 0{,}0475 \cdot 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 + 0{,}9525 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}0475 \quad \text{(kaksi)}$$
$$+ 0{,}0475 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}0475 \quad \text{(kolme)}$$
$$= 3 \cdot 0{,}0475 \cdot 0{,}9525^2 + 3 \cdot 0{,}0475^2 \cdot 0{,}9525 + 0{,}0475^3 \approx 0{,}136$$

11. **Ratkaisu** Suorakulmion kanta on x ja korkeus $y = 4x - x^2$.

Suorakulmion pinta-ala on
$xy = x(4x - x^2) = 4x^2 - x^3$.
Siis pinta-alan lauseke on
$A(x) = 4x^2 - x^3, \quad 0 \le x \le 4$.



Määritetään funktion $A(x) = 4x^2 - x^3$ suurin arvo välillä $0 \le x \le 4$.

Derivoidaan: $A'(x) = 4 \cdot 2x - 3x^2 = -3x^2 + 8x$

Derivaatan nollakohdat:

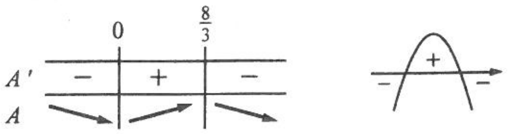
$-3x^2 + 8x = 0 \qquad | \cdot (-1)$

$3x^2 - 8x = 0$

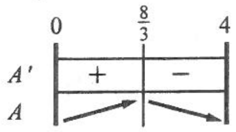
$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{8 \pm 8}{6}$$

$$x = \frac{8+8}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \text{ tai } x = \frac{8-8}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

Kulkukaavio:



Rajataan kulkukaavio välille $0 \le x \le 4$:



Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurin, kun $x = \frac{8}{3}$.

Suurin pinta-ala on $A(\frac{8}{3}) = 4 \cdot (\frac{8}{3})^2 - (\frac{8}{3})^3 = \frac{256}{27} = 9\frac{13}{27} \approx 9{,}5$.

Vastaus lauseke $A(x) = 4x^2 - x^3$, suurin arvo $9\frac{13}{27} \approx 9{,}5$

12. **Ratkaisu** Aluetta rajaavat koordinaattiakselit ja suorat $2x + 3y = 24$ ja $5x + 3y = 30$.

Suorien yhtälöiden ratkaistut muodot:

$2x + 3y = 24$

$3y = -2x + 24 \qquad | : 3$

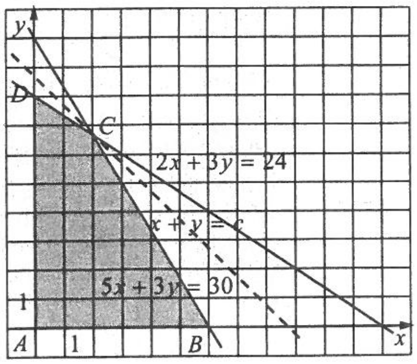
$y = -\frac{2}{3}x + 8$

$5x + 3y = 30$

$3y = -5x + 30 \qquad | : 3$

$y = -\frac{5}{3}x + 10$

Pisteen $(1, 1)$ koordinaatit toteuttavat vaaditut ehdot, joten ehtojen määräämä alue on kuvion varjostettu alue.



Alueen kärkipisteet:

A on origo $(0, 0)$.

B on suoran $y = -\frac{5}{3}x + 10$ ja x-akselin leikkauspiste $(6, 0)$.

$-\frac{5}{3}x + 10 = 0 \qquad | \cdot 3$

$-5x + 30 = 0$

$x = 6$

C on suorien $2x + 3y = 24$ ja $5x + 3y = 30$ leikkauspiste $(2, 6\frac{2}{3})$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 24 & | \cdot (-1) \\ 5x + 3y = 30 \end{cases}$$

$3x \quad = 6 \qquad | : 3$

$x = 2$

$2 \cdot 2 + 3y = 24$

$3y = 20 \qquad | : 3$

$y = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

D on suoran $y = -\frac{2}{3}x + 8$ ja y-akselin leikkauspiste $(0, 8)$.

Kuvion perusteella ylin alueeseen sattuva muotoa $x + y = c$ oleva suora kulkee pisteen C kautta, joten lauseke $x + y$ saa suurimman arvonsa pisteessä C. Suurin arvo on $2 + 6\frac{2}{3} = 8\frac{2}{3}$.

Vastaus suurin arvo $8\frac{2}{3}$, kärkipisteet $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(2, 6\frac{2}{3})$ ja $(0, 8)$

Toinen tapa Suurimman arvon voi määrittää myös laskemalla lausekkeen $x + y$ arvon alueen kaikissa kärkipisteissä. Suurin arvo on näistä arvoista suurin.

Derivaatan nollakohdat:

$$-3x^2 + 8x = 0 \qquad | \cdot (-1)$$

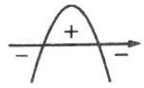
$$3x^2 - 8x = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{8 \pm 8}{6}$$

$$x = \frac{8+8}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \text{ tai } x = \frac{8-8}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

Kulkukaavio:

		0		$\frac{8}{3}$	
A'	$-$		$+$		$-$
A	↘		↗		↘



Rajataan kulkukaavio välille $0 \le x \le 4$:

	0		$\frac{8}{3}$		4
A'		$+$		$-$	
A		↗		↘	

Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurin, kun $x = \frac{8}{3}$.

Suurin pinta-ala on $A(\frac{8}{3}) = 4 \cdot (\frac{8}{3})^2 - (\frac{8}{3})^3 = \frac{256}{27} = 9\frac{13}{27} \approx 9{,}5$.

Vastaus lauseke $A(x) = 4x^2 - x^3$, suurin arvo $9\frac{13}{27} \approx 9{,}5$

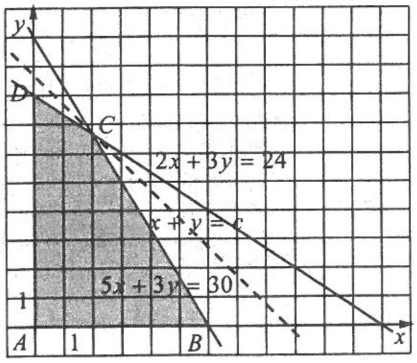
12. Ratkaisu Aluetta rajaavat koordinaattiakselit ja suorat $2x + 3y = 24$ ja $5x + 3y = 30$.

Suorien yhtälöiden ratkaistut muodot:

$$2x + 3y = 24$$
$$3y = -2x + 24 \qquad | : 3$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 8$$

$$5x + 3y = 30$$
$$3y = -5x + 30 \qquad | : 3$$
$$y = -\frac{5}{3}x + 10$$

Pisteen $(1, 1)$ koordinaatit toteuttavat vaaditut ehdot, joten ehtojen määräämä alue on kuvion varjostettu alue.



Alueen kärkipisteet:

A on origo $(0, 0)$.

B on suoran $y = -\frac{5}{3}x + 10$ ja x-akselin leikkauspiste $(6, 0)$.

$$-\frac{5}{3}x + 10 = 0 \qquad | \cdot 3$$
$$-5x + 30 = 0$$
$$x = 6$$

C on suorien $2x + 3y = 24$ ja $5x + 3y = 30$ leikkauspiste $(2, 6\frac{2}{3})$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 24 & | \cdot (-1) \\ 5x + 3y = 30 \end{cases}$$
$$3x \quad = 6 \qquad | : 3$$
$$x = 2$$

$$2 \cdot 2 + 3y = 24$$
$$3y = 20 \qquad | : 3$$
$$y = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

D on suoran $y = -\frac{2}{3}x + 8$ ja y-akselin leikkauspiste $(0, 8)$.

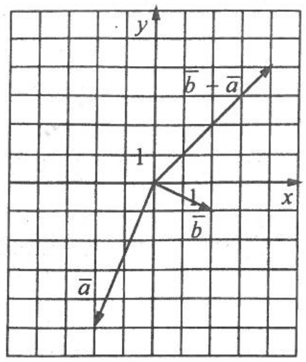
Kuvion perusteella ylin alueeseen sattuva muotoa $x + y = c$ oleva suora kulkee pisteen C kautta, joten lauseke $x + y$ saa suurimman arvonsa pisteessä C.
Suurin arvo on $2 + 6\frac{2}{3} = 8\frac{2}{3}$.

Vastaus suurin arvo $8\frac{2}{3}$, kärkipisteet $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(2, 6\frac{2}{3})$ ja $(0, 8)$

Toinen tapa Suurimman arvon voi määrittää myös laskemalla lausekkeen $x + y$ arvon alueen kaikissa kärkipisteissä. Suurin arvo on näistä arvoista suurin.

13. **Ratkaisu a)** $\bar{b} - \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} - (-2\bar{i} - 5\bar{j}) = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{i} + 5\bar{j} = 4\bar{i} + 4\bar{j}$

b)



c) Vektorien välinen kulma saadaan kaavalla $\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$.

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{-2 \cdot 2 + (-5) \cdot (-1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{-4 + 5}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{5}} = 0{,}083045...$$

$\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = 85{,}236...^\circ \approx 85{,}2^\circ$

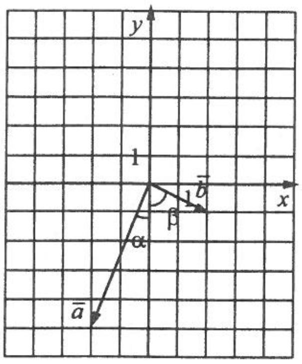
Vastaus a) $4\bar{i} + 4\bar{j}$ **c)** $85{,}2^\circ$

Toinen tapa c-kohdan kulman voi laskea myös geometrisesti:

$\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha + \beta$, missä $\tan \alpha = \dfrac{2}{5}$ ja $\tan \beta = 2$.

Tällöin $\alpha \approx 21{,}801^\circ$ ja $\beta \approx 63{,}435^\circ$, joten

$\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) \approx 21{,}801^\circ + 63{,}435^\circ \approx 85{,}2^\circ$.



A-osa

1. a) -1 b) 4,78 € c) 40

2. a) E b) E c) E d) E e) T f) T

3. i) 1 ja 2 ii) -1 iii) 0 iv) 2 v) x = 1 vi) -1

4. a) Hasse 10 € / 40€ = 0,25 = 25 % Anette 9€ / 30€ = 0,3 = 30 %

b) x <2/3