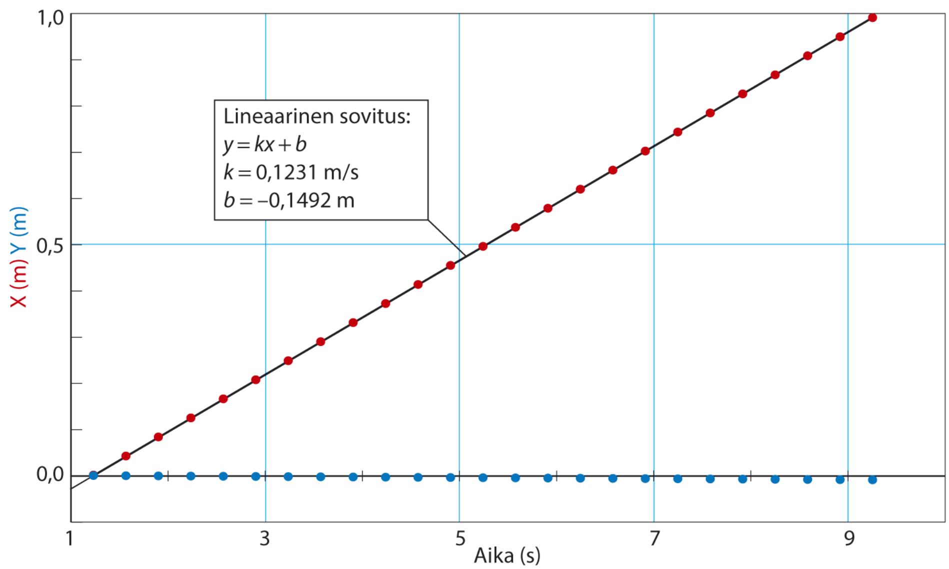
KERTAUSTEHTÄVIEN RATKAISUT

1. Mittausohjelman mukaan veturin nopeus on 12 cm/s.



2. **c)** Kiihtyvyys on $a = \dfrac{v - v_0}{t} = \dfrac{\dfrac{18}{3{,}6}\dfrac{\text{m}}{\text{s}} - \dfrac{72}{3{,}6}\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{15\,\text{s}} = -1{,}0\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Kolmessa sekunnissa kuljettu matka on

$$s_3 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{72}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3{,}0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}0\,\text{m/s}^2) \cdot (3{,}0\,\text{s})^2 = 55{,}5\,\text{m}.$$

Kahdessa sekunnissa kuljettu matka saadaan vastaavalla tavalla,

$$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{72}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2{,}0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot (2{,}0\,\text{s})^2 = 38\,\text{m}.$$

Kolmannen sekunnin aikana kuljettu matka on

$$s = s_3 - s_2 = 55{,}5\text{ m} - 38\text{ m} = 17{,}5\text{ m} \approx 18\text{ m}.$$

3. **a)** Kuljettu matka saadaan fysikaalisena pinta-alana:

aikaväli 0,0...4,0 s: s_1 = ½ · 2,0 m/s · 4,0 s = 4,0 m ja
aikaväli 4,0...6,0 s: s_2 = ½ · |−2,0 m/s| · 2,0 s = 2,0 m.

Kokonaismatka on $s = s_1 + s_2$ = 4,0 m + 2,0 m = 6,0 m.

b) Etäisyys lähtöpaikasta on 4,0 m − 2,0 m = 2,0 m.

c) Keskinopeus on $v_k = \frac{s}{t} = \frac{6{,}0\ \text{m}}{7{,}0\ \text{s}} \approx 0{,}86\ \text{m/s}.$

4. **a)** Auton loppunopeus 8,0 sekunnin kuluttua on
$v = at$ = 3,0 m/s² · 8,0 s = 24 m/s.

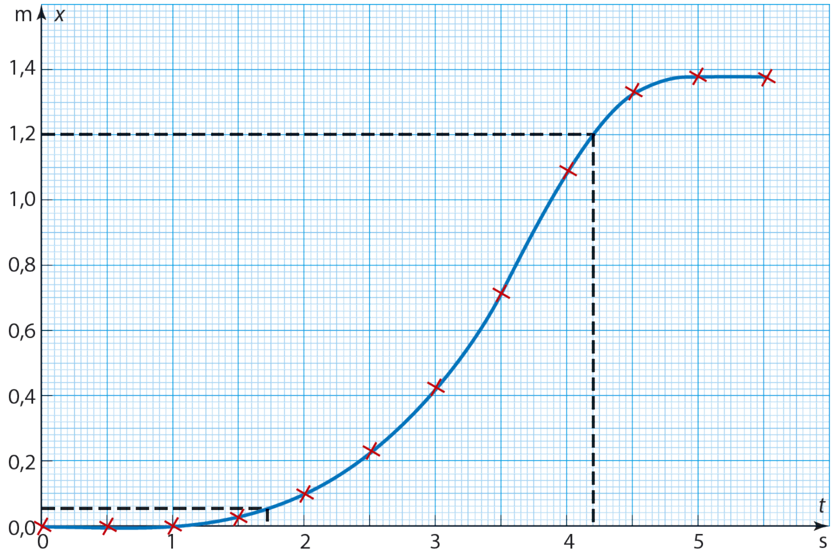
b) Keskinopeus on $v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{0\,\text{m/s} + 24\,\text{m/s}}{2} = 12\ \text{m/s}.$

c) Auton kahdeksassa sekunnissa kulkema matka on

$s = v_k \cdot t$ = 12 m/s · 8,0 s = 96 m.

(Toinen tapa: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}0\ \text{m/s}^2 \cdot (8{,}0\ \text{s})^2 = 96\ \text{m.}$)

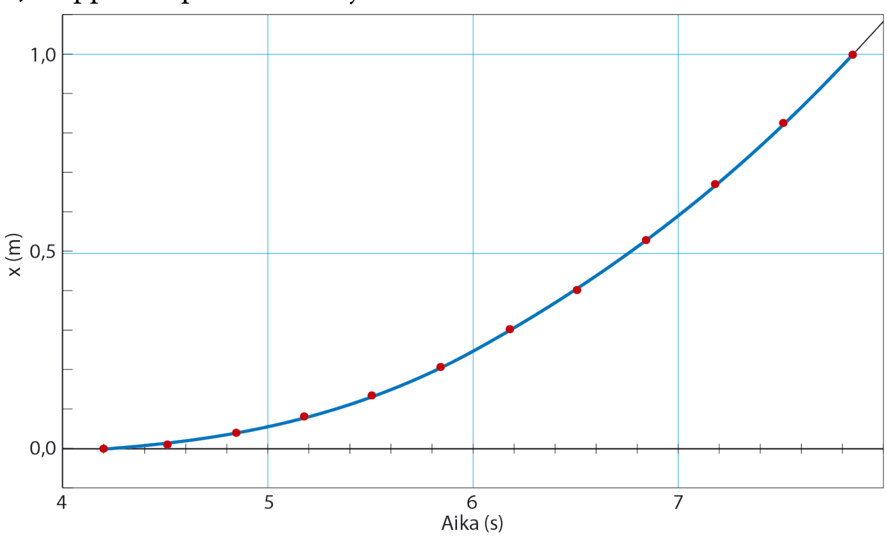
5. **a)** Auton paikka x ajan t funktiona:



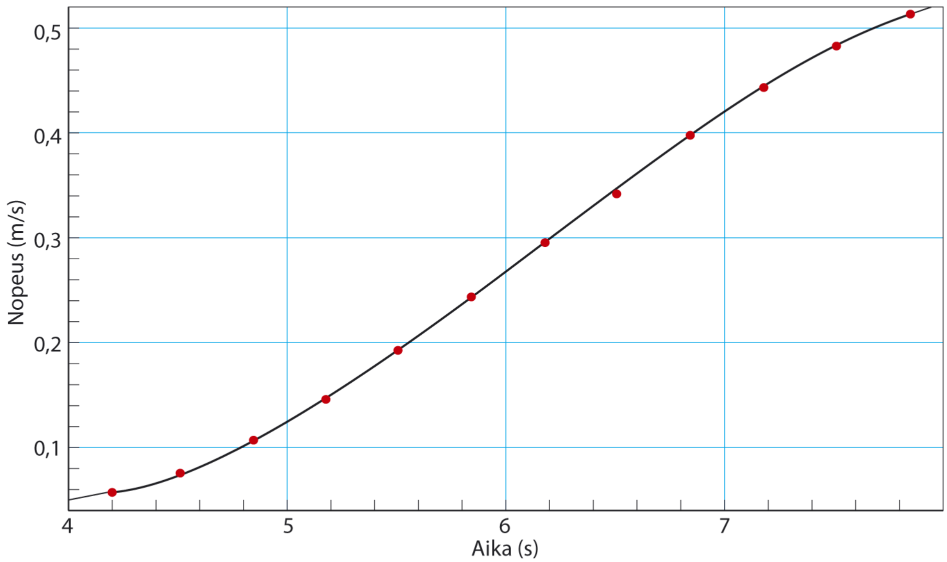
b) Luetaan kuvaajasta auton paikka hetkillä 1,7 s ja 4,2 s. Keskinopeus kysytyllä aikavälillä on $v_\mathrm{k} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{1{,}2\ \mathrm{m} - 0{,}05\ \mathrm{m}}{4{,}2\ \mathrm{s} - 1{,}7\ \mathrm{s}} \approx 0{,}46\ \mathrm{m/s}.$

c) Kuvaajasta nähdään, että auto lähtee liikkeelle, kun t = 1,00 s ja pysähtyy, kun t = 4,85 s. Auto liikkuu siis 4,85 s – 1,00 s ≈ 3,9 s ajan.

6. **a)** Kappaleen paikan kuvaaja.



b) Kappaleen nopeuden kuvaaja.



c) Kappaleen kiihtyvyys on likimain tasaista oheisen kuvaajan aikavälillä 5,5…6,9 s.

7. Matka, jonka ilmatyynyn on joustettava, saadaan yhtälöstä $s = \frac{1}{2}at^2$, jossa *a* on nuken maksimikiihtyvyys. Sijoitetaan aika $t = \frac{v}{a}$ yhtälöön $s = \frac{1}{2}at^2$:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(\frac{82}{3,6}\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 250\ \text{m/s}^2} \approx 1{,}03765\ \text{m}\,.$$

Kun auton etuosa lyhenee törmäyksessä 65 cm, ilmatyynyn on joustettava vähintään 1,03765 m – 0,65 m ≈ 39 cm.

8. **a)** Auton liike on esitetty *t*,*x*-koordinaatistossa.

Koska kuvaaja aikavälillä 0…25 s on suora, auton nopeus on vakio ja liike tasaista.

Välillä

25…35 s auton nopeus kasvaa

35…45 s auton nopeus pienenee

45…60 s auto on paikallaan

60…70 s auton nopeus kasvaa

70…90 s auton nopeus on vakio.

b) Auton keskinopeus on $v_{\mathrm{k}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{900\ \mathrm{m} - 200\ \mathrm{m}}{80\ \mathrm{s} - 20\ \mathrm{s}} \approx 12\ \mathrm{m/s}.$

c) Koska kuvaaja on jyrkin ajanhetkellä $t = 35$ s, auton suurin nopeus saadaan tähän kohtaan piirretyn tangentin fysikaalisena kulmakertoimena. Auton suurin nopeus on $v_{\max} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{330\ \mathrm{m}}{11\ \mathrm{s}} = 30\ \mathrm{m/s}.$

Auto on paikallaan aikavälillä 45…60 s; tällöin auton nopeus on pienin eli 0 m/s.

9. **a**) Kivellä ei ole alkunopeutta (pystysuunnassa) ja kivi on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä alas. Yhtälöstä $y = \dfrac{1}{2}gt^2$ saadaan kiven putoamisajaksi $t = \sqrt{\dfrac{2y}{g}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 15\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}} \approx 1{,}74874\ \mathrm{s}.$

Vaakasuunnassa nopeus on vakio eli $v = 19$ m/s. Etäisyydeksi tornin juuresta maahan osumiskohtaan saadaan

$x = vt = 19\,\mathrm{m/s} \cdot 1{,}74874\ \mathrm{s} \approx 33\,\mathrm{m}.$

b) Pystysuunnassa kiven liike on tasaisesti kiihtyvää, joten kiven osuessa maahan nopeuden pystykomponentti on $v_y = v_{0y} - gt$. Koska kivi heitetään vaakasuoraan, kiven alkunopeus y-suunnassa eli v_{0y} on nolla. Nopeus y-suunnassa on $v_y = -gt = -9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}74874\,\mathrm{s} \approx -17{,}1552\,\mathrm{m/s}.$

Kiven osuessa maahan nopeuden vaakakomponentti on $v_x = 19\,\text{m/s}$.

Nopeuden suuruus kiven osuessa maahan on

$$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{(19\,\text{m/s})^2 + (-17{,}1552\,\text{m/s})^2} \approx 26\,\text{m/s}.$$

10. **a)** Kappaleen alkunopeus on 7,0 m/s.

b) Kappaleen 0,70 sekunnin aikana kulkema matka saadaan fysikaalisena pinta-alana:

$$s = \frac{0{,}70\ \text{s} \cdot 7{,}0\ \text{m/s}}{2} \approx 2{,}5\ \text{m}.$$

c) Kappaleen nopeuden suunta vaihtuu vastakkaiseksi.

d) Kuvaaja liittyy pystysuoraan heittoliikkeeseen.

11. **a)** Kirjan ja pöydän välillä on kosketusvuorovaikutus.

Tuolin jalan ja lattian välillä on kosketusvuorovaikutus.

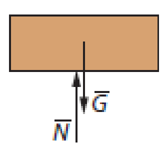
Veneen ja veden välillä on kosketusvuorovaikutus.

b) Maa ja Kuun välillä oleva gravitaatiovuorovaikutus on etävuorovaikutus.

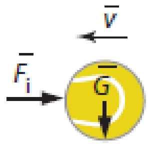
Ilmassa lentävän jalkapallon ja Maan välillä olevan gravitaatiovuorovaikutus on etävuorovaikutus.

Magneettien välillä on magneettisesta vuorovaikutuksesta johtuva etävuorovaikutus.

c) Pöydällä olevan kirjan voimakuvio.



Ilmassa lentävän pallon voimakuvio.



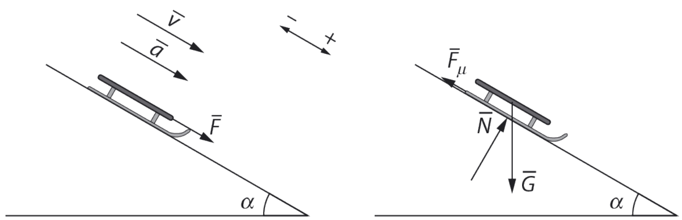
d) Kirjaan kohdistuu paino $\overline{G}$. Tämän voiman vastavoima on $\overline{F}_{\text{kirja Maahan}}$.

Kirjaan kohdistuu pöydän aiheuttama tukivoima $\overline{N}$. Tämän voiman vastavoima on kirjan pöytään kohdistama voima $\overline{F}_{\text{kirja pöytään}}$.

Ilmassa olevaan jalkapalloon kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\text{i}}$. Painon vastavoima on $\overline{F}_{\text{pallo Maahan}}$. Ilmanvastuksen vastavoima on $\overline{F}_{\text{pallo ilmaan}}$.

12. Ilmanvastus on kummassakin kohdassa pieni.

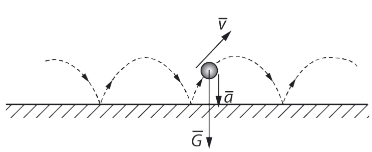
a) Kuvassa on esitetty jyrkässä mäessä olevan kelkan nopeus- ja kiihtyvyysvektorit:



Kelkkaan vaikuttava kokonaisvoima on painon, rinteen tukivoiman ja kitkavoiman summa eli

$$\Sigma\overline{F} = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_{\mu}.$$

b) Ilmanvastusta ei oteta huomioon. Pallon nopeus on käyrän (paraabelin) tangentin suuntainen. Palloon kohdistuu paino, joka aiheuttaa pallolle kiihtyvyyden. Kiihtyvyyden suunta on alaspäin. Kokonaisvoima on $\Sigma\overline{F} = \overline{G}$.

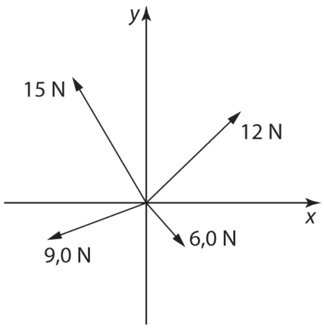


13. Resultantin *x*-suuntaisen komponentin suuruus on

$$F_x = 12\text{ N}\cdot\cos45° - 15\text{ N}\cdot\cos60° - 9{,}0\text{ N}\cdot\cos20° + 6{,}0\text{ N}\cdot\cos50° \approx -3{,}61523\text{ N}.$$

Resultantin *y*-suuntaisen komponentin suuruus

$$F_y = 12\text{ N}\cdot\sin45° + 15\text{ N}\cdot\sin60° - 9{,}0\text{ N}\cdot\sin20° - 6{,}0\text{ N}\cdot\sin50° \approx 13{,}8012\text{ N}.$$



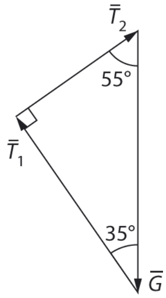
Resultantin suuruus on

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-3{,}61523\,\text{N})^2 + (13{,}8012\,\text{N})^2} \approx 14\,\text{N}$$ ja suunta:

$$\tan\beta = \left|\frac{F_y}{F_x}\right| = \left|\frac{13{,}8012\,\text{N}}{-3{,}6152\,\text{N}}\right|,$$ josta kulma $\beta \approx 75°$.

Resultantin suunta on origosta vasemmalle yläviistoon. Suuntakulma negatiivisen *x*-akselin suhteen on 75°, positiivisen *x*-akselin suhteen 105°.

14. Vektorit $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ ja $\overline{G}$ toteuttavat ehdon $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.



Narun T_1 jännitysvoiman suuruus saadaan yhtälöstä

$\sin 55° = \dfrac{T_1}{G}$, josta

$T_1 = mg \sin 55° = 7{,}3 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 55° \approx 59 \text{ N}.$

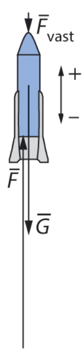
Narun T_2 jännitysvoima saadaan yhtälöstä

$\sin 35° = \dfrac{T_2}{G}$, josta

$T_2 = mg \sin 35° = 7{,}3 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 35° \approx 41 \text{ N}.$

Jännitysvoimat ovat narujen suuntaiset.

15. **a)** Raketin voimakuvio.



b) Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_{\text{vast}} + \overline{G} = m\overline{a}$. Kun raketin liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F - F_{\text{vast}} - G = ma$. Raketin kiihtyvyydeksi saadaan

$$a = \frac{F - F_{\text{vast}} - G}{m} = \frac{6450\,\text{N} - 470\,\text{N} - 450\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{450\,\text{kg}}$$

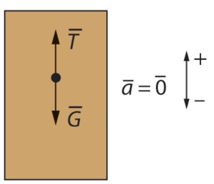
$$= 3{,}47889\,\text{m/s}^2 \approx 3{,}5\,\text{m/s}^2\ .$$

c) Raketin nousumatka on $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}47889\,\text{m/s}^2 \cdot (3{,}0\text{ s})^2 \approx 16\,\text{m}$.

16. Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $T - mg = ma$.

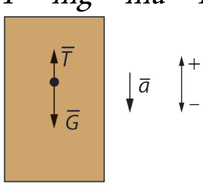
a) Koska punnus liikkuu vakionopeudella, kiihtyvyys on nolla. Yhtälöstä $T - mg = 0$ jousivaa'an lukemaksi saadaan

$T = mg = 1{,}6\text{ m/s}^2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \approx 16\text{ N}$.



b) Kun hissi lähtee alaspäin, skalaariyhtälö on $T - mg = -ma$. Jousivaa'an lukema on

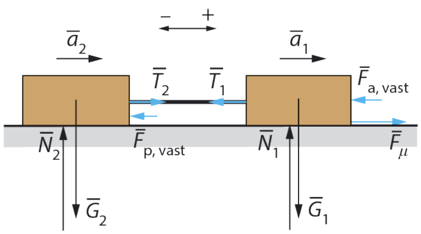
$T = mg - ma = m(g - a) = 1{,}6\text{ m/s}^2 \cdot (9{,}81\text{ m/s}^2 - 1{,}7\text{ m/s}^2) \approx 13\text{ N}$.



c) Kun hissi lähtee ylöspäin, skalaariyhtälö on $T - mg = ma$ ja lukema

$T = mg + ma = m(g + a) = 1{,}6\ \text{m/s}^2 \cdot (9{,}81\ \text{m/s}^2 + 1{,}7\ \text{m/s}^2) \approx 18\ \text{N}$.

17. **a)** Piirretään voimakuvio.



Newtonin II lain mukaan on

autolle $\Sigma\overline{F} = \overline{F}_\mu + \overline{F}_{\text{a,vast}} + \overline{T}_1 + \overline{G}_1 + \overline{N}_1 = m_1\overline{a}_1$ ja

perävaunulle $\Sigma\overline{F} = \overline{T}_2 + F_{\text{p,vast}} + \overline{N}_2 + \overline{G}_2 = m_2\overline{a}_2$.

Koska vetokoukku on yhtä kappaletta, vetokoukkuun kohdistuvat voimat ovat yhtä suuret eli $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T$. Koska auto ja perävaunu liikkuvat yhdessä, kummankin kiihtyvyyden suuruus on yhtä suuri eli $|\overline{a}_1| = |\overline{a}_2| = a$. Kappaleita voidaan tarkastella erillisinä systeemeinä.

Koska liike tapahtuu vaakasuunnassa ja pystysuunnassa voimat kumoavat toisensa, pystysuuntaa ei tarvitse tarkastella.

Kun suunta oikealle on positiivinen, auton skalaariyhtälö on

$F_\mu - F_{\text{a,vast}} - T = m_1 a$, josta $T = F_\mu - F_{\text{a,vast}} - m_1 a$.

Perävaunun skalaariyhtälö on $T - F_{\text{p,vast}} = m_2 a$.

Sijoitetaan auton skalaariyhtälö $T = F_\mu - F_{\text{a,vast}} - m_1 a$ perävaunun skalaariyhtälöön $T - F_{\text{p,vast}} = m_2 a$, jolloin saadaan

$F_\mu - F_{\text{a,vast}} - m_1 a - F_{\text{p,vast}} = m_2 a$.

Perävaunuun kohdistuvan liikevastusvoiman suuruus on

$F_{\text{p,vast}} = F_\mu - F_{\text{a,vast}} - m_1 a - m_2 a =$

$= 5{,}7\ \text{kN} - 1{,}7\ \text{kN} - 1450\ \text{kg} \cdot 1{,}7\ \text{m/s}^2 - 370\ \text{kg} \cdot 1{,}7\ \text{m/s}^2$

$= 906\ \text{N} \approx 910\ \text{N}.$

b) Vetokoukkuun kohdistuvan voiman suuruus

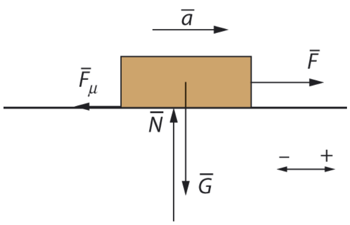
$T = F_{\text{p,vast}} + m_2 a = 906\ \text{N} + 370\ \text{kg} \cdot 1{,}7\ \text{m/s}^2 \approx 1{,}5\ \text{kN}.$

18. **a)** Liikettä ylläpitävä pienin voima on yhtä suuri kuin kitka eli

$F = \mu N = \mu mg = 0{,}30 \cdot 5{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 14{,}714\ \text{N} \approx 15\ \text{N}.$

Kappale liikkuu, jos siihen kohdistuva voima on vähintään 15 N.

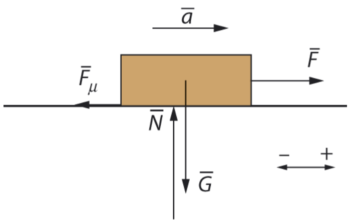
b) Newtonin II lain mukaan vaakasuunnassa on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$. Valitaan suunta oikealle positiiviseksi.



Kappale on kiihtyvässä liikkeessä, koska pinnan suuntainen voima (24 N) on suurempi kuin kitka (15 N). Skalaariyhtälöstä $F - F_\mu = ma$ kappaleen kiihtyvyys on

$$a = \frac{F - F_\mu}{m} = \frac{24\ \text{N} - 14{,}715\ \text{N}}{5{,}0\ \text{kg}} \approx 1{,}9\ \text{m/s}^2.$$

19. **a)** Newtonin II lain mukaan vaakasuunnassa on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$.

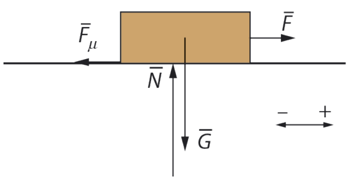


Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F - F_\mu = ma$ eli $F - \mu mg = ma$. Kitkakerroin on

$$\mu = \frac{F - ma}{mg} = \frac{4{,}0\,\mathrm{N} - 1{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m/s^2}}{1{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}203874 \approx 0{,}20\,.$$

b) Kun liike on tasaista, vetävän voiman $\overline{F}$ ja liikevastusten, tässä tapauksessa kitkan $\overline{F}_\mu$, summa on nolla eli $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.



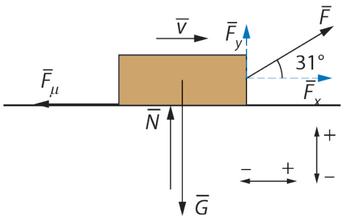
Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan $F - F_\mu = 0$.

Vetävän voiman suuruus on

$F = F_\mu = \mu mg = 0{,}203874 \cdot 1{,}0\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \approx 2{,}0\ \mathrm{N}$.

Vetävä voima tekee työtä samalla teholla kuin liikevastukset muuntavat mekaanista työtä muihin energiamuotoihin esimerkiksi lämmöksi ja ääneksi. Myös pintojen kuluminen eli pintojen rakenteen muuttuminen vaatii energiaa.

20. Koska reki liikkuu vakionopeudella, on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$.



Valitsemalla suunta oikealle positiiviseksi saadaan $\overline{F}_x - \overline{F}_\mu$ eli

$F\cos\alpha - \mu N = 0$. Kitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{F\cos\alpha}{N}.$$

Kitkakertoimen laskemiseksi tarvitaan suureyhtälö tukivoimalle N. Pystysuorassa suunnassa voimien summa on nolla $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli
$\overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_y = \overline{0}$.

Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

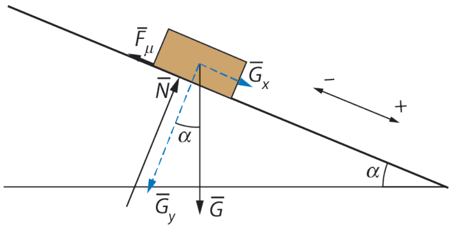
$-G + N + F_y = 0$, josta tukivoimalle saadaan yhtälö
$N = G - F_y = mg - F\sin\alpha$.

Kun tukivoiman yhtälö $N = mg - F\sin\alpha$ sijoitetaan kitkakertoimen yhtälöön $\mu = \dfrac{F\cos\alpha}{N}$, kitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{F\cos\alpha}{N} = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha} = \frac{85\ \text{N} \cdot \cos 31°}{78\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 85\ \text{N} \cdot \sin 31°} \approx 0{,}10.$$

21. **a)** Newtonin II lain mukaan rinteen suunnassa on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli

$\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$.



Valitaan suunta rinnettä alaspäin positiiviseksi. Saadaan skalaariyhtälö

$G_x - F_\mu = ma$.

Ratkaistaan yhtälöstä hiihtäjän kiihtyvyyden suuruus:

$$\begin{aligned} a &= \frac{G_x - F_\mu}{m} = \frac{G_x - \mu N}{m} = \frac{G_x - \mu G_y}{m} \\ &= \frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m} = \frac{m(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)}{m} \\ &= g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha \\ &= 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\sin 25° - 0{,}12\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\cos 25° = 3{,}07898\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \approx 3{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}. \end{aligned}$$

b) Yhtälöstä $s = \frac{1}{2}at^2$ saadaan ajaksi $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 25\,\mathrm{m}}{3{,}07898\,\mathrm{m/s^2}}} \approx 4{,}0$ s.

c) Tätä mallia käytettäessä massalla ei ole merkitystä, koska massa supistuu laskuista pois.

22. Vedessä alumiinipalaan kohdistuva noste on suuruudeltaan

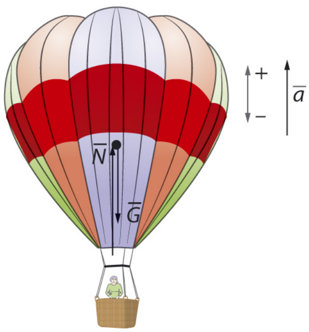
N = 1,02 N – 0,63 N = 0,39 N.

Alumiinipalan tilavuus on $V = \frac{m}{\rho} = \frac{\frac{0{,}39\ \mathrm{N}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}}{1000\ \mathrm{kg/m^3}} \approx 3{,}97554\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3}$.

Nosteen suuruus bensiinissä on 1,02 N – 0,75 N = 0,27 N.

Bensiinin tiheys on $\rho = \frac{m_2}{V} = \frac{\frac{0{,}27\ \text{N}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}}{3{,}97554 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3} \approx 690\ \text{kg/m}^3$.

23. Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = M\overline{a}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = M\overline{a}$, jossa M on kokonaismassa ja $\overline{N}$ noste.



Kun suunta ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$N - G = Ma$ eli $N - Mg = Ma$.

Kun pallo laskeutuu, on $N = Mg - Ma_{\text{alas}}$.

Jotta pallo nousisi ylöspäin, massaa on kevennettävä määrällä m. Saadaan yhtälö

$(M - m)\ a_{\text{alas}} = N - (M - m)g$ eli

$Ma_{\text{ylös}} - ma_{\text{ylös}} = M(g - a_{\text{alas}}) - Mg + mg.$

Massaksi m saadaan

$$m = \frac{Ma_{\text{ylös}} + Ma_{\text{alas}}}{g + a_{\text{ylös}}} = \frac{1210\ \text{kg} \cdot (0{,}03\ \text{m/s}^2 + 0{,}2\ \text{m/s}^2)}{9{,}81\ \text{m/s}^2 + 0{,}03\ \text{m/s}^2} \approx 30\ \text{kg}.$$

24. Koska jokaiseen esineeseen kohdistuvan painon suuruus $G = mg$ ilmassa tiedetään, voidaan laskea jokaisen esineen massa yhtälöstä $m = \frac{G}{g}$.

esine	1	2	3	4	5	6
m (g)	12,2	26,5	39,8	54,0	70,3	80,5

Koska esineet punnittiin sekä ilmassa että vedessä, saadaan nosteen suuruus erotuksesta $N = G_{\text{ilma}} - G_{\text{vesi}}$.

Noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän väliainemäärän paino. Syrjäytyneen veden paino G on

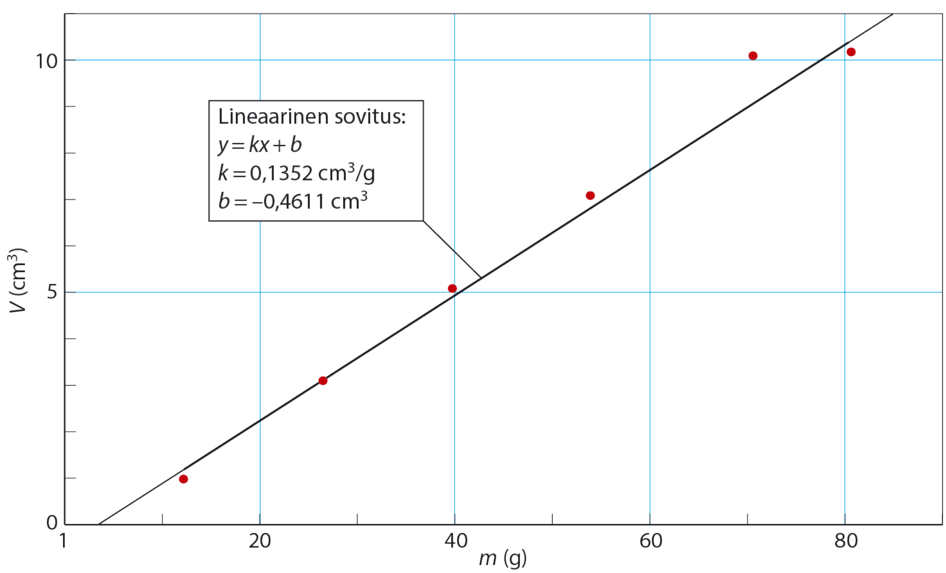
$G = N = m_{\text{vesi}}g = \rho_{\text{vesi}} V_{\text{vesi}}g = \rho_{\text{vesi}} V_{\text{esine}}g$, josta esineen tilavuus on

$$V_{\text{esine}} = \frac{N}{\rho_{\text{vesi}}g}.$$

Lasketaan nosteen ja tilavuuden arvot ja kirjoitetaan ne taulukkoon.

Esine	1	2	3	4	5	6
noste (N)	0,01	0,03	0,05	0,07	0,10	0,10
tilavuus (cm^3)	1,0	3,1	5,1	7,1	10,2	10,2

Esitetään mittaustulokset m, V-koordinaatistossa:



Kuvaajaksi saadun suoran fysikaalinen kulmakerroin on 0,1352 cm^3/g.

Tiheyden yhtälöstä $\rho = \frac{m}{V}$ saadaan tilavuudelle yhtälö $V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot m$.

Vastaavan *m, V*-koordinaatistossa kulkevan suoran kulmakerroin on

$k = \frac{1}{\rho}$. Tiheydeksi saadaan $\rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{0{,}1352\,\mathrm{cm^3/g}} \approx 7{,}4\ \mathrm{g/cm^3}$.

25. **a)** Kuvan mukaan voima kohdistetaan avaajan varteen kohtisuorasti, joten avaamiseen tarvittava voiman momentti on $M = Fr$. Avaamiseen tarvittavan voiman suuruus on

$$F = \frac{M}{r} = \frac{110\ \mathrm{Nm}}{0{,}45\ \mathrm{m}} = 244{,}444\ \mathrm{N} \approx 240\ \mathrm{N}.$$

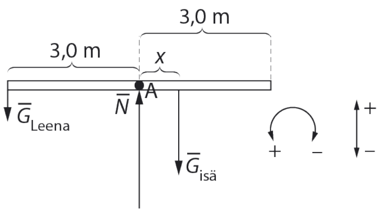
b) Henkilön painon suuruus on $G = mg = 66\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \approx 650\ \mathrm{N}$.

Henkilö voi kohdistaa avaimen varteen enintään noin painonsa suuruisen voiman ylhäältä alas.

Henkilöön kohdistuva paino 650 N on selvästi suurempi kuin pulttien avaamiseen tarvittava voima 240 N. Näin ollen pulttien avaaminen onnistuu.

c) Pultteja avataan melko harvoin. Pultit voivat juuttua kiinni erimerkiksi likaantuminen tai ruostumisen takia, jolloin pulttien avaamiseen tarvittava momentti on suurempi kuin se, jolla pultit kiristettiin kiinni.

26.



Koska keinulauta on tuettu keskipisteestään, laudan painolla ei ole vääntövaikutusta keskipisteen suhteen eli laudan painon momentti keskipisteen suhteen on 0.

Leenan ja isän tulee asettua eri puolille tukipistettä eli laudan keskikohtaa A. Olkoon isän etäisyys tukipisteestä x. Jotta lauta pysyy tasapainossa, on momenttien summan oltava nolla minkä tahansa laudan akselin suhteen eli $\Sigma M = 0$. Kun suunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa laudan keskipisteen suhteen on $\sum M_{\text{A}} = -M_{\text{isä}} + M_{\text{Leena}} = 0$ eli $-G_{\text{isä}} \cdot x + G_{\text{Leena}} \cdot 3{,}0\,\text{m} = 0$.

Isän etäisyys tukipisteestä on

$$x = \frac{G_{\text{Leena}} \cdot 3{,}0\,\text{m}}{G_{\text{isä}}} = \frac{m_{\text{Leena}} g \cdot 3{,}0\,\text{m}}{m_{\text{isä}} g} = \frac{m_{\text{Leena}} \cdot 3{,}0\,\text{m}}{m_{\text{isä}}}$$

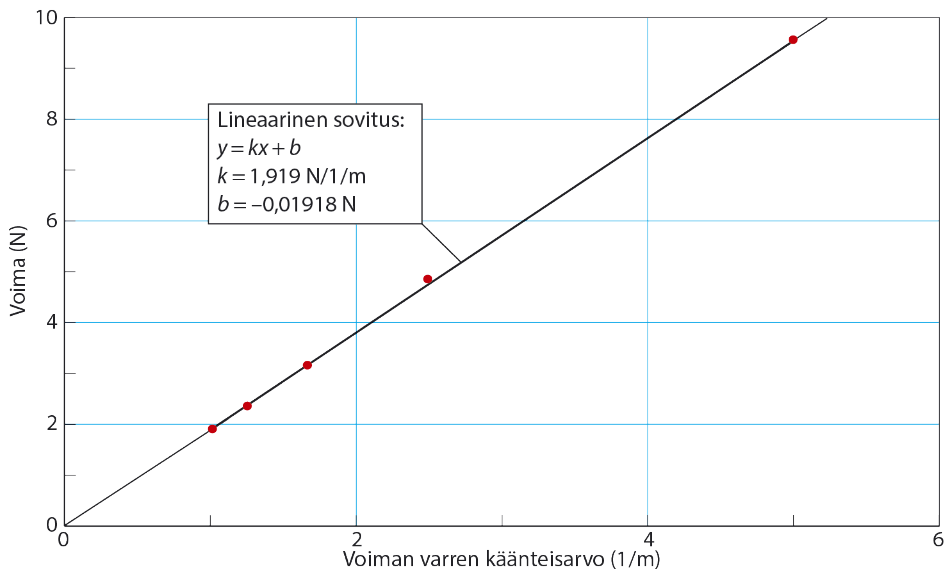
$$= \frac{30\,\text{kg} \cdot 3{,}0\,\text{m}}{80\,\text{kg}} = 1{,}125\,\text{m}.$$

Isän etäisyys Leenasta on silloin 1,125 m + 3,0 m ≈ 4,1 m.

27. Taulukoidaan mittaustulokset eli voiman vaikutussuoran etäisyys r kiertoakselista ja ripustuslangan viivaimeen kohdistaman voiman suuruus. Lasketaan taulukkoon myös r:n käänteisarvot $1/r$. Kiertoakseli on viivaimen kohdassa 0,00 m.

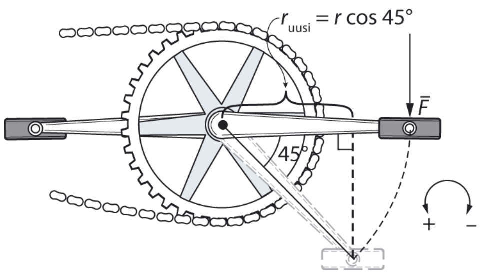
r (m)	$1/r$ (1/m)	F (N)
0,20	5,00	9,56
0,40	2,50	4,83
0,60	1,66667	3,16
0,80	1,25	2,35
1,00	1,00	1,91

Viedään arvot mittausohjelmaan ja esitetään ne $1/r,F$-koordinaatistossa.



Voiman momentti on $1/r,F$-koordinaatistossa esitetyn suoran $F = M \cdot \dfrac{1}{r}$ kulmakerroin. Mittausohjelman mukaan voiman momentti on 1,919 N/1/m ≈ 1,9 Nm. Tasapainottavan voiman momentti on 1,9 Nm vastapäivään.

28.



a) Kun kiertosuunta myötäpäivään on negatiivinen, momentti on

$M = -Fr = -35\,\text{N} \cdot 0{,}17\,\text{m} \approx -6{,}0\,\text{Nm}$

Voiman momentti on 6,0 Nm myötäpäivään.

b) Voiman vaikutussuoran etäisyys keskiöstä on nyt pienempi kuin a-kohdassa. Vääntövarren pituus on nyt

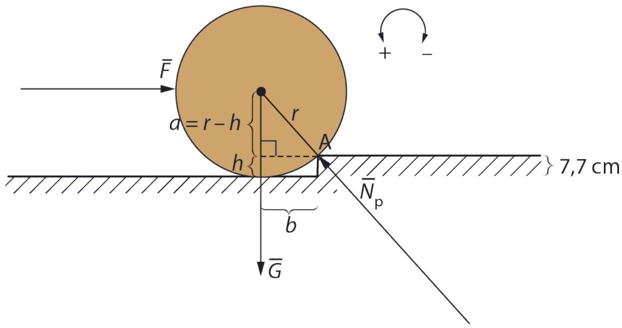
$r_{\text{uusi}} = 0{,}17\,\text{m} \cdot \cos 45° \approx 0{,}120208\,\text{m}.$

Momentti on

$M = -Fr_{\text{uusi}} = -35\,\text{N} \cdot 0{,}120208\,\text{m} \approx -4{,}2\,\text{Nm}.$

Voiman momentti on 4,2 Nm myötäpäivään.

29. Puupölkkyyn vaikuttavat voimat ovat pölkkyyn kohdistuva paino $\overline{G}$, vaakasuoran maanpinnan tukivoima $\overline{N}_{\text{m}}$, portaan reunan tukivoima $\overline{N}_{\text{p}}$ ja työntövoima $\overline{F}$. Tarkastellaan tilannetta, jossa pölkky on juuri irtoamassa maan pinnalta. Tällöin maanpinnan tukivoima $\overline{N}_{\text{m}}$ on nolla. Lasketaan momenttien summa akselin A suhteen, tällöin voiman $\overline{N}_{\text{p}}$ momentti on nolla. Selvitetään ensin pölkkyyn kohdistuvan painon ja työntövoiman varret.



Työntövoiman $\overline{F}$ varsi on

$$a = r - h = \frac{0{,}66 \text{ m}}{2} - h = 0{,}33 \text{ m} - 0{,}077 \text{ m} = 0{,}253 \text{ m}.$$

Painon $\overline{G}$ varsi b saadaan Pythagoraan lauseen avulla: $b^2 + a^2 = r^2$, josta saadaan

$$b = \pm\sqrt{r^2 - a^2} = \pm\sqrt{(0{,}33\text{m})^2 - (0{,}253\text{m})^2} \approx 0{,}211875 \text{ m}.$$

Hyväksytään vain varren positiivinen arvo. Tarkastellaan tilannetta, kun pölkky on juuri irtoamassa maan pinnalta. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa akselin A suhteen on $\Sigma M_\text{A} = -Fa + Gb = 0$.

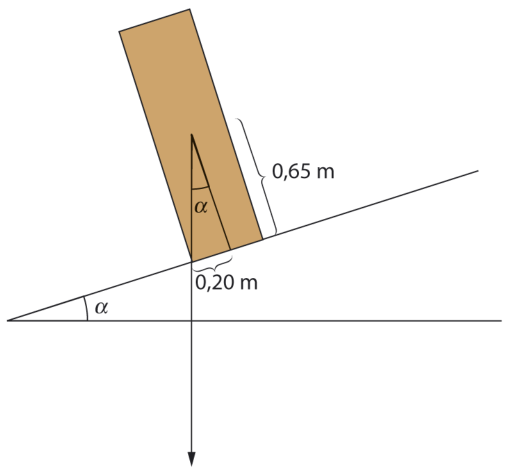
Yhtälöstä saadaan pienimmän työntövoiman suuruudeksi

$$F = \frac{Gb}{a} = \frac{144 \text{kg} \cdot 9{,}81 \text{m/s}^2 \cdot 0{,}211875 \text{m}}{0{,}253 \text{m}} \approx 1200 \text{ N}.$$

30. **a)** Paksumman pään massa on suurempi. Painopiste ei ole keskellä karttakeppiä, vaan lähempänä paksua päätä. Painopisteestä tuettuna karttakeppi pysyy tasapainossa. Silloin kepin päiden momenttien summa on nolla tukipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Lyhyempi eli paksumpi pää on raskaampi, koska tähän osaan kohdistuva paino on suurempi ja vääntövarsi näin ollen pienempi. Pidemmän osan vääntövarsi on suurempi, joten siihen kohdistuva paino on pienempi kuin lyhyemmän osan. Lyhyemmän osan massa on siis suurempi kuin pidemmän osan massa.

b) Ripusta kappale jostakin kohdasta. Kiinnitä luotilanka (lanka, jonka toisessa päässä on paino) ripustuspisteeseen ja piirrä luotilankaa käyttäen tästä pisteestä lähtien kappaleen pintaan suora viiva alas (luotisuora). Ripusta sitten kappale muistakin kohdista esimerkiksi kolme kertaa ja piirrä luotisuorat. Suorat leikkaavat kappaleen painopisteen kohdalla.

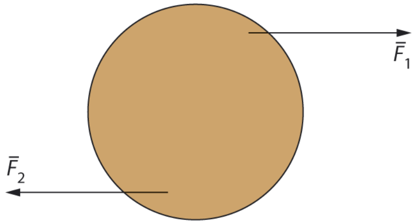
31.



Säiliö pysyy pystyssä, jos sen painopisteen kautta kulkeva luotisuora kulkee tukipinnan kautta. Rajatapauksessa saadaan yhtälö

$\tan\alpha = \dfrac{0{,}20\,\text{m}}{0{,}65\,\text{m}}$, josta kaltevuuskulma on $\alpha \approx 17°$.

32. **a)** Väite on väärin. Kappale on tasapainossa etenemisen suhteen, jos kokonaisvoima on nolla, ja pyörimisen suhteen, jos kappaleeseen kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla. Esimerkiksi kuvan tilanteessa kokonaisvoima on nolla, mutta silti voimat aiheuttavat kappaleeseen sitä kääntämään pyrkivän momentin.

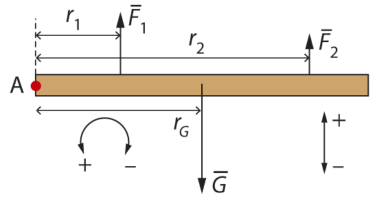


b) Väite on väärin. Jos kappaleeseen vaikuttavien momenttien summa on nolla, kappale ei pyöri tai se pyörii tasaisesti. Tällöin pyörimissuunnassa voiman momentti on yhtä suuri kuin vastusvoimien aiheuttama momentti. Jos esimerkiksi auton, polkupyörän tai junan pyörät pyörivät vakiona pysyvällä kulmanopeudella, pyörään kohdistuvien momenttien summa on nolla. Tällöin pyörimistä vastustavien voimien (laakereiden kitka ja vierimisvastus) momentti on yhtä suuri, mutta vaikuttaa vastakkaiseen kiertosuuntaan kuin pyörimistä ylläpitävien voimien momentit. Kun kappale vierii alas kaltevaa pintaa tasaisella nopeudella, pyörimistä ylläpitävä voima on pinnasta pyörään kohdistuva kitka.

33. Taulukossa on videolta poimittujen voimien suuruudet ja niiden vaikutussuorien etäisyydet tangon vasemmasta päästä, johon asetetaan kiertoakseli A. Tankoon kohdistuva paino on suuruudeltaan $G = mg = 0{,}657\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 6{,}44519\ \text{N}$.

Merkitään taulukkoon mittaustulokset: G on tankoon kohdistuvan painon suuruus, F_1 ja F_2 ovat ripustuslankojen tankoon kohdistamien voimien suuruudet ja r_G, r_1 ja r_2 voimien vaikutussuorien etäisyydet kiertoakselista A.

	F_1 (N)	r_1 (m)	F_2 (N)	r_2 (m)	G (N)	r_G (m)
Mittaus 1	0,57	0,100	5,81	0,400	6,44519	0,375
Mittaus 2	2,91	0,100	3,49	0,600	6,44519	0,375
Mittaus 3	4,24	0,200	2,26	0,700	6,44519	0,375
Mittaus 4	4,75	0,250	1,76	0,700	6,44519	0,375



Tutkitaan onko tankoon kohdistuvien voimien summa $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli onko $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G} = \overline{0}$.

Valitaan suunta ylös positiiviseksi, jolloin skalaariyhtälö on

$F_1 + F_2 - G = 0$.

Mittaus 1: $F_1 + F_2 - G = 0{,}57\text{ N} + 5{,}81\text{ N} - 6{,}44519\text{ N} = -0{,}06519\text{ N}$.

Mittaus 2: $F_1 + F_2 - G = 2{,}91\text{ N} + 3{,}49\text{ N} - 6{,}44519\text{ N} = -0{,}04519\text{ N}$.

Mittaus 3: $F_1 + F_2 - G = 4{,}24\text{ N} + 2{,}26\text{ N} - 6{,}44519\text{ N} = 0{,}05481\text{ N}$.

Mittaus 4: $F_1 + F_2 - G = 4{,}75\text{ N} + 1{,}76\text{ N} - 6{,}44519\text{ N} = 0{,}06481\text{ N}$.

Tankoon kohdistuvien voimien summa on mittaustarkkuuden rajoissa nolla.

Tutkitaan, onko voimien momenttien summa kiertoakselin A suhteen nolla eli onko $\sum M_\text{A} = 0$.

Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi, jolloin momenttiehto on $F_1r_1 - Gr_G + F_2r_2 = 0$.

Mittaus1:

$F_1r_1 - Gr_G + F_2r_2 = 0{,}57\text{ N} \cdot 0{,}100\text{ m} - 6{,}44519\text{ N} \cdot 0{,}375\text{ m} + 5{,}81\text{ N} \cdot 0{,}400\text{ m} = -0{,}0359463\text{ Nm}$.

Mittaus 2:

$F_1r_1 - Gr_G + F_2r_2 = 2{,}91\text{ N} \cdot 0{,}100\text{ m} - 6{,}44519\text{ N} \cdot 0{,}375\text{ m} + 3{,}49\text{ N} \cdot 0{,}600\text{ m} = -0{,}0319463\text{ Nm}$.

Mittaus 3:

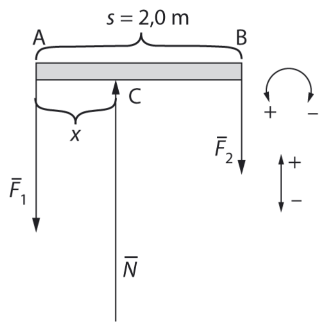
$F_1r_1 - Gr_G + F_2r_2 = 4{,}24\text{ N} \cdot 0{,}200\text{ m} - 6{,}44519\text{ N} \cdot 0{,}375\text{ m} + 2{,}26\text{ N} \cdot 0{,}700\text{ m} = 0{,}0130538\text{ Nm}$.

Mittaus 4:

$F_1r_1 - Gr_G + F_2r_2 = 4{,}75\ \mathrm{N} \cdot 0{,}250\ \mathrm{m} - 6{,}44519\ \mathrm{N} \cdot 0{,}375\ \mathrm{m} + 1{,}76\ \mathrm{N} \cdot 0{,}700\ \mathrm{m} = 0{,}00255375\ \mathrm{Nm}.$

Voimien momenttien summa on mittaustarkkuuden rajoissa nolla. Näin ollen jäykän kappaleen tasapainoehdot ovat voimassa.

34.



a) Voimien $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ momentti akselin A suhteen on

$$M_\mathrm{A} = F_1 \cdot 0 - F_2 \cdot s = -35\,\mathrm{N} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} = -70\,\mathrm{Nm}.$$

Vastaavasti momentti akselin B suhteen on

$$M_\mathrm{B} = F_1 \cdot s + F_2 \cdot 0 = 55\,\mathrm{N} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} = 110\,\mathrm{Nm}.$$

Voimien momentti akselin A suhteen on 70 Nm myötäpäivään ja akselin B suhteen 110 Nm vastapäivään.

b) Tasapainoehto pystysuunnassa on Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{N} = \overline{0}$. Kun suunta ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $-F_1 - F_2 + N = 0$. Tukipisteessä C sauvaan kohdistuvan tukivoiman suuruus on

$N = F_1 + F_2 = 55\ \mathrm{N} + 35\ \mathrm{N} = 90\ \mathrm{N}$ ja sen suunta on ylös.

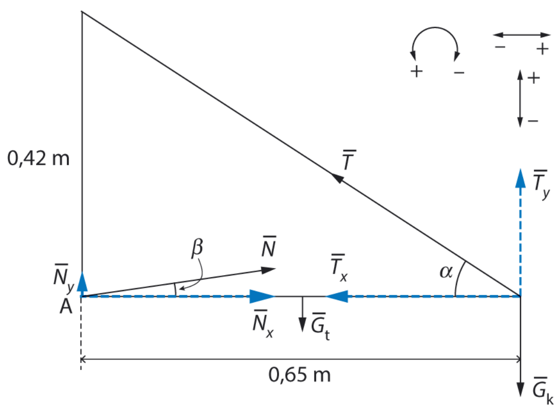
c) Sauva on tasapainossa, joten voimien momenttien vääntövaikutus on nolla minkä tahansa akselin suhteen.

Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, voimien momenttien summa akselin A suhteen on

$\sum M_{A} = Nx - F_2 s + F_1 \cdot 0 = 0.$

Voiman $\overline{N}$ vaikutussuoran paikka eli sauvan tuen paikka akselista A lukien on $x = \dfrac{F_2 s}{N} = \dfrac{35\,\text{N} \cdot 2{,}0\,\text{m}}{90\,\text{N}} \approx 0{,}78\,\text{m}.$

35.



$\tan\alpha = \dfrac{0{,}42\text{ m}}{0{,}65\text{ m}}$, josta kulma alfa on $\alpha = 32{,}8687°$.

Tukitanko on tasapainossa, joten siihen kohdistuvien voimien summa on nolla eli $\Sigma \overline{F} = \overline{0}$ ja momenttien summa on nolla eli $\Sigma M = 0$. Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi, jolloin momenttiyhtälö kiertoakselin A suhteen on $\Sigma M_A = l \cdot T_y - \dfrac{l}{2} \cdot G_t - l \cdot G_k = 0,$ joka jakamalla pituudella l yksinkertaistuu muotoon $T_y - \dfrac{G_t}{2} - G_k = 0.$ Koska $T_y = T \sin\alpha$, vaijerin jännitysvoiman suuruus on

$$T = \frac{\frac{G_\mathrm{t}}{2} + G_\mathrm{k}}{\sin\alpha} = \frac{\left(\frac{m_\mathrm{t}}{2} + m_\mathrm{k}\right)g}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\left(\frac{1{,}2\ \mathrm{kg}}{2} + 5{,}2\ \mathrm{kg}\right)\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\sin 32{,}8687°} = 104{,}839\ \mathrm{N} \approx 100\ \mathrm{N}$$

vaijerin suuntaan.

Valitaan suunta oikealle positiiviseksi. Koska vaakasuunnassa on voimassa ehto $\sum \overline{F}_x = \overline{0}$, saadaan yhtälö $N_x - T_x = 0$, josta

$$N_x = T_x = T\cos\alpha = 104{,}839\ \mathrm{N}\cdot\cos 32{,}8687° \approx 88{,}0560\ \mathrm{N}.$$

Valitaan suunta ylös positiiviseksi. Koska pystysuunnassa on voimassa ehto $\sum \overline{F}_y = \overline{0}$, saadaan yhtälö $N_y - G_\mathrm{t} - G_\mathrm{k} + T_y = 0$, josta

$$N_y = G_\mathrm{t} + G_\mathrm{k} - T_y = \left(m_\mathrm{t} + m_\mathrm{k}\right)g - T\sin\alpha$$

$$= (1{,}2\ \mathrm{kg} + 5{,}2\ \mathrm{kg})\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 104{,}839\ \mathrm{N}\cdot\sin 32{,}8687° = 5{,}88623\ \mathrm{N}.$$

Seinän tankoon kohdistaman kokonaisvoiman suuruus on

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{(88{,}0560\ \mathrm{N})^2 + (5{,}88623\ \mathrm{N})^2} \approx 88\ \mathrm{N}.$$

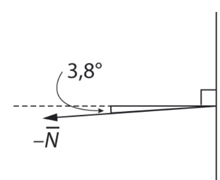
Voiman suunnan määrittävä kulma saadaan yhtälöstä

$\tan\beta = \frac{N_y}{N_x} = \frac{5{,}88623\ \mathrm{N}}{88{,}0560\ \mathrm{N}}$, josta saadaan kulmaksi $\beta \approx 3{,}8°$.

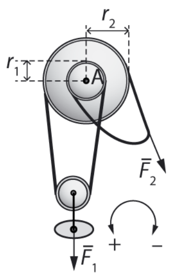
Kysytty tukitangon seinään kohdistama voima on voiman $\overline{N}$ vastavoima ja siten Newtonin III lain mukaan yhtä suuri, mutta suunnaltaan vastakkainen.

Vaijeriin BC kohdistuva jännitysvoiman suuruus on 100 N.

Tukitangon AB seinään kohdistaman voiman suuruus on 88 N ja suuntakulma seinän normaalin suhteen 3,8° (kuvio).



36. **a)**



Alemmasta pyörästä lähtevät ketjut kohdistavat ylempiin pyöriin voimat, joiden suuruus on $F_1/2$.

Tasapainotilanteessa ylempiin pyöriin kohdistuvien voimien momenttien summa pyörien keskipisteen suhteen on nolla $\Sigma M_A = 0$.

Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi, jolloin momenttiehto on $\frac{F_1}{2}r_2 - \frac{F_1}{2}r_1 - F_2 r_2 = 0.$ Ratkaistaan yhtälöstä F_2:

$$F_2 r_2 = \frac{F_1}{2}r_2 - \frac{F_1}{2}r_1 = 0 \; \| \cdot 2$$

$$F_2 = \frac{\frac{F_1}{2}(r_2 - r_1)}{r_2}$$

$$F_2 = \frac{r_2 - r_1}{2r_2}F_1$$

b) Tasapainoehdosta $F_2 = \frac{r_2 - r_1}{2r_2}F_1$ saadaan kuormaksi

$$F_1 = \frac{F_2}{\frac{r_2 - r_1}{2r_2}} = \frac{850\,\text{N}}{\frac{22\,\text{cm} - 15\,\text{cm}}{2 \cdot 22\,\text{cm}}} \approx 5,3\,\text{kN}.$$

Kuorman paino voi olla korkeintaan 5,3 kN.

37. **a)** Newtonin II lain mukaan $F = ma = 11\ \text{kg} \cdot 2{,}0\ \text{m/s}^2 = 22\ \text{N}$.

b) Voiman tekemä työ on $W = Fs = 22\ \text{N} \cdot 5{,}0\ \text{m} = 110\ \text{J}$.

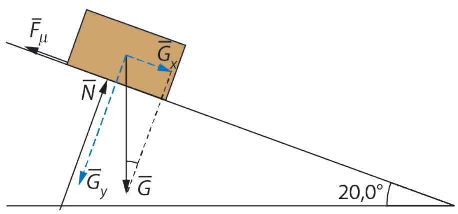
38. **a)** Gravitaatiovoiman (painon) $\overline{G}$ komponentti liikkeen suunnassa on
$G_x = G\sin 20{,}0° = mg\sin 20{,}0° = 13\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 20{,}0° = 43{,}6178\ \text{N}$.

Gravitaatiovoiman tekemä työ on

$$W_g = G_x s = 43{,}6178\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} = 87{,}2356\ \text{J} \approx 87\ \text{J}.$$

b) Kitkan suuruus on $F = \mu N$ ja suunta tasoa ylöspäin. Tukivoiman suuruus N on sama kuin gravitaatiovoiman pintaa vastaan kohtisuora komponentti eli $N = G_y = mg\cos 20{,}0° = 13\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 20{,}0° = 119{,}839\ \text{N}$. Koska kitka vaikuttaa vastakkaiseen suuntaan kuin mihin laatikko liikkuu, sen tekemä työ on negatiivinen. Kitkan tekemä työ on
$W_\mu = -F_\mu s = -\mu N s = -0{,}22 \cdot 119{,}839\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} = -52{,}7292\ \text{J} \approx -53\ \text{J}$.

Kokonaisvoiman tekemän työ on
$W = W_g + W_\mu = 87{,}2356\ \text{J} - 52{,}7292\ \text{J} \approx 35\ \text{J}$.



39. **a)** Työ saadaan kuvasta graafisella integroinnilla eli kuvaajan ja x-akselin välissä olevan alueen fysikaalisena pinta-alana. Kun kappale liikkuu kohdasta $x = 0$ m kohtaan $x = 3{,}0$ m, voima tekee työn

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0\ \text{m} \cdot 4{,}0\ \text{N} + 2\ \text{m} \cdot 4{,}0\ \text{N} = 10\ \text{J}.$$

b) Kun kappale liikkuu kohdasta $x = 3{,}0$ m kohtaan $x = 6{,}0$ m, voima tekee työn

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0\ \text{m} \cdot 4{,}0\ \text{N} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}0\ \text{m} \cdot (-4{,}0\ \text{N}) + 1{,}0\ \text{m} \cdot (-4{,}0\ \text{N}) = -4{,}0\ \text{J}.$$

c) Mekaniikan työ-energiaperiaatteen mukaan kappaleen liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman tekemä työ. Koska kappaleen nopeus on alussa nolla, saadaan yhtälö

$$W = \Delta E_{\text{k}} = E_{\text{k,l}} - E_{\text{k,a}} = \frac{1}{2} m v_1^{\,2} - 0 = \frac{1}{2} m v_1^{\,2},$$

josta ratkaistaan nopeus lopussa:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

Kun kappale siirtyy kohdasta $x = 0$ m kohtaan $x = 3{,}0$ m, voima tekee tehtävän a-kohdan työn 10 J, joten kappaleen liike-energia pisteessä $x = 3{,}0$ m on 10 J ja nopeus

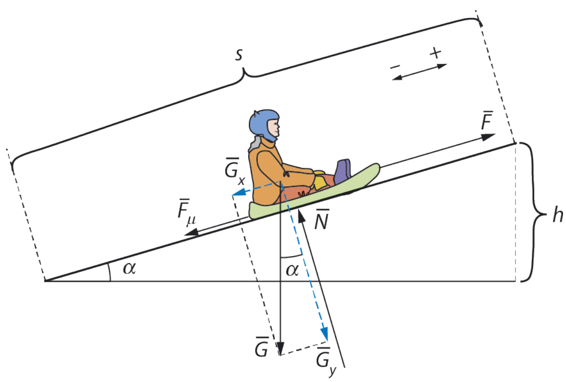
$$v_1 = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ \text{J}}{4{,}0\ \text{kg}}} = 2{,}2\ \text{m/s}.$$

d) Kun kappale siirtyy kohdasta $x = 0$ m kohtaan $x = 6{,}0$ m, voima tekee tehtävän a- ja b-kohtien mukaan työn 10 J – 4,0 J = 6,0 J, joten kappaleen liike-energia pisteessä $x = 6{,}0$ m on 6,0 J ja nopeus

$$v_1 = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}0\ \text{J}}{4{,}0\ \text{kg}}} \approx 1{,}7\ \text{m/s}.$$

40. **a)** Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan $E_{\text{p,a}} + W = E_{\text{p,l}}$, jossa $E_{\text{p,a}}$ on potentiaalienergia alussa, $E_{\text{p,l}}$ on potentiaalienergia lopussa ja W on ei-konservatiivisten voimien – tässä tapauksessa kitkan – tekemä työ. Liike-energian voimme olettaa olleen alussa ja lopussa yhtä suuret. Kuvan suorakulmaisesta kolmiosta saadaan $\sin\alpha = \frac{h}{s}$ eli kelkan kulkema matka on $s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Kun koira vetää kelkkaa ja lasta, kelkkaan kohdistuva voima tekee työtä, joka on yhtä suuri kuin kelkan ja lapsen potentiaalienergian muutos ja kitkan kelkkaan tekemä työ eli

$$W_{\text{koira}} = \left(E_{\text{p,l}} - E_{\text{p,a}}\right) + W \;= mgh + F_\mu s = mgh + \mu Ns$$
$$= mgh + \mu mg\cos\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = mgh(1 + \mu\cos\alpha \cdot \frac{1}{\sin\alpha})$$
$$= 18\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 8{,}0\,\text{m} \cdot (1 + 0{,}20 \cdot \frac{\cos 19°}{\sin 19°}) \approx 2{,}2\,\text{kJ}.$$



b) Reitistä riippumatta potentiaalienergian muutos on sama. Kitkan voittamiseksi tehty työ kasvaa loivempia reittejä valittaessa, koska matka pitenee.

41. Liike-energia saadaan yhtälöstä $E_\text{k} = \dfrac{1}{2}mv^2$. Koska kappaleiden nopeudet ovat samat ja raskaamman kappaleen massa on kolme kertaa niin suuri kuin kevyemmän kappaleen massa, on raskaamman kappaleen liike-energia kolminkertainen kevyemmän kappaleen liike-energiaan verrattuna eli 12 J. Oikea vastaus on a.

42. Mekaniikan työ-energiaperiaatteen mukaan liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kappaleeseen vaikuttavan kokonaisvoiman tekemä työ. Koska kappale oli aluksi levossa eli liike-energia oli alussa nolla, saadaan yhtälö $\frac{1}{2}mv^2 = W$, josta saadaan kappaleen massaksi

$$m = \frac{2W}{v^2} = \frac{2 \cdot 23\ \mathrm{J}}{(3{,}4\ \mathrm{m/s})^2} = 3{,}97924\ \mathrm{kg}.$$

Kun työ on $W = 46$ J, saadaan työ-energiaperiaatteesta $\frac{1}{2}mv^2 = W$ kappaleen saamaksi nopeudeksi

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 46\ \mathrm{J}}{3{,}97924\ \mathrm{kg}}} \approx 4{,}8\ \mathrm{m/s}.$$

43. Liike-energia on $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$, joten liike-energioiden suhde on

$$\frac{E_\mathrm{k,juoksu}}{E_\mathrm{k,kävely}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2{}_\mathrm{juoksu}}{\frac{1}{2}mv^2{}_\mathrm{kävely}} = \left(\frac{v_\mathrm{juoksu}}{v_\mathrm{kävely}}\right)^2 = \left(\frac{6{,}0\ \mathrm{m/s}}{2{,}0\ \mathrm{m/s}}\right)^2 = 9{,}0.$$

Juoksevan ihmisen liike-energia on yhdeksänkertainen kävelevän ihmisen liike-energiaan verrattuna.

44. Liike-energian yhtälöstä $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ saadaan gepardin huippunopeudeksi

$$v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 42 \cdot 10^3\ \mathrm{J}}{65\ \mathrm{kg}}} = 35{,}9487\ \mathrm{m/s}.$$

Jos gepardi juoksee 100 m maksiminopeudellaan, kuluu siihen aikaa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{100\ \mathrm{m}}{35{,}9487\ \mathrm{m/s}} \approx 2{,}8\ \mathrm{s}.$$

45. Työ-energiaperiaatteen mukaan vastusvoimien tekemä työ on yhtä suuri kuin pulkan liike-energian muutos, $W=\frac{1}{2}mv_1^{\ 2}-\frac{1}{2}mv_a^{\ 2}$. Vastusvoimien $\overline{F}$ tekemä työ on $W=-Fs$, jossa s on pulkan ennen pysähtymistään kulkema matka. Huomaa, että työ on negatiivinen, koska voima vaikuttaa päinvastaiseen suuntaan kuin mihin pulkka liikkuu. Nopeus alussa on v_a = 3,0 m/s ja lopussa v_l = 0 m/s. Pulkan kulkema matka on silloin

$$s=\frac{W}{F}=\frac{\frac{1}{2}mv_1^{\ 2}-\frac{1}{2}mv_a^{\ 2}}{F}=\frac{0-\frac{1}{2}\cdot 48\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\ \text{m/s}\right)^2}{-32\ \text{N}}\approx 6{,}8\ \text{m}.$$

Oikea vaihtoehto on b.

46. **a)** Voiman suuruus voidaan ratkaista Newtonin II laista $a=\frac{F}{m}$ ja tasaisesti kiihtyvää liikettä kuvaavista yhtälöistä

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2,$$
$$v=v_0+at.$$

Väli 0…150 m:

$x_0=0,\ v_0=0.$ Tällöin jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $t=\frac{v}{a}$. Sijoitetaan tämä ensimmäiseen yhtälöön:

$$x=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2=\frac{v^2}{2a},$$

josta saadaan kiihtyvyydeksi

$$a=\frac{v^2}{2x}=\frac{\left(\frac{40}{3{,}6}\ \text{m/s}\right)^2}{2\cdot 150\ \text{m}}=0{,}411523\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Autoon vaikuttava kokonaisvoima on Newtonin II lain perusteella

$F=ma=1150\ \text{kg}\cdot 0{,}411523\ \text{m/s}^2=473{,}251\ \text{N}\approx 470\ \text{N}$ liikkeen suuntaan.

Väli 150…350 m:

Auton nopeus on vakio, joten kokonaisvoima on nolla, $F = 0$ N.

Väli 350…450 m:

Nyt $v = 20\ \text{km/h},\ \ v_0 = 40\ \text{km/h}, x - x_0 = 100\ \text{m}.$ Matkaan kuluva aika on $t = \dfrac{v - v_0}{a}$. Sijoitetaan se yhtälöön $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$, jolloin

$$\begin{aligned}
x - x_0 &= v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 \\
&= \frac{v_0 v - v_0^{\ 2}}{a} + \frac{v^2 - 2v_0 v + v_0^{\ 2}}{2a} \\
&= \frac{1}{2a}\left(2v_0 v - 2v_0^{\ 2} + v^2 - 2v_0 v + v_0^{\ 2}\right) \\
&= \frac{1}{2a}\left(v^2 - v_0^{\ 2}\right),
\end{aligned}$$

josta saadaan kiihtyvyydeksi

$$a = \frac{v^2 - v_0^{\ 2}}{2\left(x - x_0\right)} = \frac{\left(\dfrac{20}{3,6}\ \text{m/s}\right)^2 - \left(\dfrac{40}{3,6}\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot \left(450\ \text{m} - 350\ \text{m}\right)} = -0,462963\ \text{m/s}^2.$$

Kokonaisvoima on silloin

$F = ma = 1150\ \text{kg} \cdot \left(-0,462963\ \text{m/s}^2\right) = -532,407\ \text{N} \approx -530\ \text{N}.$

Voiman suunta on liikkeen suuntaa vastaan.

b) Tapa 1: Kokonaisvoiman tekemä työ voidaan laskea työn yhtälöstä

$W = Fs$ eli tässä $W = Fx$:

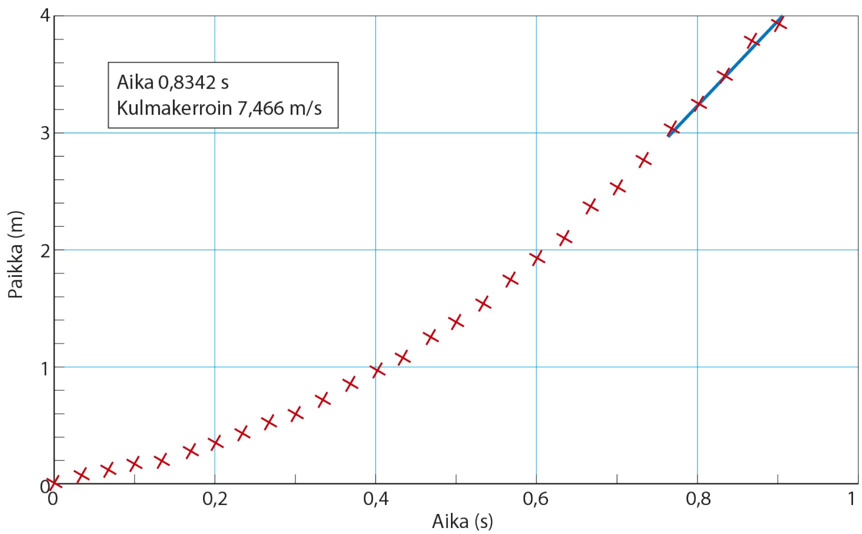
$W = Fx = 473,251\ \text{N} \cdot 150\ \text{m} + 0\ \text{N} \cdot 200\ \text{m} + \left(-532,407\ \text{N}\right) \cdot 100\ \text{m} \approx 18\ \text{kJ}.$

Tapa 2: Työ-energiaperiaatteen mukaan $W = \Delta E_\text{k}$, joten

$$W = E_{k,l} - E_{k,a} = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2} \cdot 1150 \text{ kg} \cdot \left(\frac{20}{3,6} \text{ m/s}\right)^2 - 0 \approx 18 \text{ kJ}.$$

47. **a)** Mekaaninen energia ei säily, sillä pallo ei palaa lähtökorkeuteensa lattiasta pompattuaan.

b) Pallon paikan kuvaajasta tangentin avulla määritetty pallon nopeus sen osuessa maahan on 7,5 m/s.



c) Pallon liike-energia sen osuessa lattiaan on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,12 \text{ kg} \cdot (7,466 \text{ m/s})^2 = 3,34447 \text{ J}.$$

Koska pallon pudotuskorkeus 4,0 m, pallon potentiaalienergia terassin lattian suhteen on alussa

$E_p = mgh = 0,12 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 4,0 \text{ m} = 4,7088 \text{ J}.$

Alussa liike-energia on nolla ja lopussa potentiaalienergia on nolla. Mekaniikan energiaperiaatteesta $E_{k,a} + E_{p,a} + W = E_{k,l} + E_{p,l}$ saadaan silloin yhtälö $0 + E_{p,a} + W = E_{k,l} + 0$, josta saadaan ilmanvastuksen tekemäksi työksi $W = E_{k,l} - E_{p,a} = 3,34447 \text{ J} - 4,7088 \text{ J} \approx -1,4 \text{ J}.$

48. **a)** Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$, jossa $W = Fs$ on liikevastusten tekemä työ. Valitaan auton painopisteen asema pystysuunnassa potentiaalienergian nollatasoksi. Auto pysähtyy lopuksi, joten mekaniikan energiaperiaate on $0 + E_{k,a} + Fs = 0 + 0$, kun s on jarrutusmatka. Liikevastusvoimat jarrutuksen aikana ovat

$$F = -\frac{E_{k,a}}{s} = -\frac{\frac{1}{2}mv^2}{s} = -\frac{\frac{1}{2}\cdot 1200\ \text{kg}\cdot\left(\frac{79}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{96\ \text{m}} = -3009{,}74\ \text{N} \approx -3{,}0\ \text{kN}.$$

Voiman suunta on liikesuuntaa vastaan.

b) Mekaniikan energiaperiaate $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$ kirjoitetaan a-kohdan perusteella nopeammalle autolle: $0 + E_{k,a} + Fs = E_{k,l}$ eli $\frac{1}{2}mv_a^2 + Fs = \frac{1}{2}mv_l^2$. Yhtälö sievenee muotoon $mv_l^2 = mv_a^2 + 2Fs$.
Auton nopeus törmäyshetkellä on

$$v_l = \sqrt{\frac{mv_a^2 + 2Fs}{m}} = \sqrt{\frac{1200\ \text{kg}\cdot\left(\frac{104}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2\cdot(-3009{,}74\ \text{N})\cdot 96\ \text{m}}{1200\ \text{kg}}}$$

$$= 18{,}79\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 68\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

49. Molemmissa tapauksissa loppunopeus on nolla. Jarruttavan voiman $\overline{F}$ tekemä työ on liike-energian muutos eli $W = 0 - \frac{1}{2}mv^{\ 2} = -\frac{1}{2}mv^{\ 2}$.

Toisaalta voiman tekemä työ on $W = -F\Delta x$, jossa etumerkki johtuu siitä, että voiman suunta on vastakkainen siirtymän suuntaan nähden. Saadaan yhtälö $-F\Delta x = -\frac{1}{2}mv^{\ 2}$ eli $\Delta x = \frac{m}{2F}v^{\ 2}$.

Koska auton massa m ja jarruttava voima F ovat molemmissa tapauksissa samat, havaitaan että jarrutusmatka on verrannollinen nopeuden toiseen potenssiin. Silloin

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{{v_2}^2}{{v_1}^2} = \frac{\left(120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{\left(60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2} = 4 \text{ eli } \Delta x_2 = 4\Delta x_1 = 4 \cdot 20\text{ m} = 80\text{ m}.$$

Jarrutusmatka on 80 m.

50. Kun ilmanvastus voidaan jättää pienenä huomiotta, saadaan mekaniikan energiaperiaatteesta $E_{\text{k,a}} + E_{\text{p,a}} + W = E_{\text{k,l}} + E_{\text{p,l}}$ yhtälö $E_{\text{k,a}} + E_{\text{p,a}} = E_{\text{k,l}} + E_{\text{p,l}}$. Valitaan maanpinta potentiaalienergian nollatasoksi, jolloin $E_{\text{p,l}} = 0$ ja $E_{\text{p,a}} = mgh$, jossa $h = 150$ m.

a) Koska $v_{\text{a}} = 0$, yhtälö $E_{\text{k,a}} + E_{\text{p,a}} = E_{\text{k,l}} + E_{\text{p,l}}$ tulee muotoon $0 + mgh = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + 0$, josta saadaan jakoavaimen vauhdiksi sen osuessa maahan

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 75\text{ m}} \approx 38\text{ m/s}.$$

b) Nyt jakoavaimella on alkuvauhti, joten yhtälö $E_{\text{k,a}} + E_{\text{p,a}} = E_{\text{k,l}} + E_{\text{p,l}}$ tulee muotoon $\frac{1}{2}m{v_{\text{a}}}^2 + mgh = \frac{1}{2}m{v_l}^2 + 0$. Tästä saadaan jakoavaimen vauhdiksi sen osuessa maahan

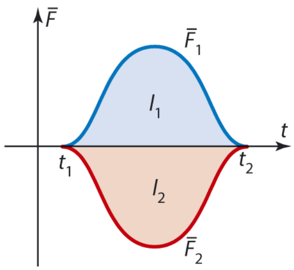
$$v_1 = \sqrt{{v_{\text{a}}}^2 + 2gh} = \sqrt{(2{,}4\text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 75\text{ m}} \approx 38\text{ m/s}.$$

c) Nyt $v_{\text{a}} = 5{,}6$ m/s, joten jakoavaimella on maahan osuessaan vauhti

$$v_1 = \sqrt{{v_{\text{a}}}^2 + 2gh} = \sqrt{(5{,}6\text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 75\text{ m}} \approx 39\text{ m/s}.$$

51. **a)** Newtonin III lain eli voiman ja vastavoiman lain mukaan kahden kappaleen 1 ja 2 vuorovaikutuksessa kumpikin kappale kohdistaa toiseen kappaleeseen yhtä suuren voiman. Voimat ovat vastakkaissuuntaisia.

b)



c) Voiman ja vastavoiman lain mukaan voimat ovat joka hetki yhtä suuria ja vuorovaikutuksen kestoaika on kummallekin kappaleelle sama eli $t_2 - t_1$. Näin ollen kumpaankin vaunuun kohdistuvan voiman impulssi on yhtä suuri.

d) Liikemäärä säilyy törmäyksessä, joten liikemäärän muutos on nolla.

52. Aluksen ja luotaimen yhteenlaskettu massa on m ja pelkän luotaimen massa 0,15 m.

Alus ja luotain muodostavat eristetyn systeemin. Irtoamistapahtumassa kokonaisliikemäärä säilyy eli $m\bar{v}_0 = 0{,}15m\bar{v}_{\text{luotain}} + 0{,}85m\bar{v}_{\text{alus}}$.

Molempien kappaleiden liikesuunta säilyy alkuperäisenä. Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, joten saadaan skalaariyhtälö $mv_0 = 0{,}15mv_{\text{luotain}} + 0{,}85mv_{\text{alus}}$. Massa supistuu yhtälöstä, jolloin

yhtälö saadaan muotoon $0{,}85v_{\text{alus}} = v_0 - 0{,}15v_{\text{luotain}}$. Aluksen ja luotaimen alkunopeus on v_0 = 2100 km/h ja luotaimen nopeus irtoamisen jälkeen

$v_{\text{luotain}} = v_{\text{alus}} - 500\ \text{km/h}$. Ratkaistaan aluksen nopeus irtoamisen jälkeen:

$$0{,}85v_{\text{alus}} = 2100\text{ km/h} - 0{,}15\left(v_{\text{alus}} - 500\text{ km/h}\right)$$
$$0{,}85v_{\text{alus}} = 2100\text{ km/h} - 0{,}15v_{\text{alus}} + 0{,}15\cdot 500\text{ km/h}$$
$$0{,}85v_{\text{alus}} + 0{,}15v_{\text{alus}} = 2100\text{ km/h} + 0{,}15\cdot 500\text{ km/h}.$$

Aluksen nopeus irtoamisen jälkeen on

$$v_{\text{alus}} = 2100\,\text{km/h} + 0{,}15\cdot 500\,\text{km/h} \approx 2200\,\text{km/h}.$$

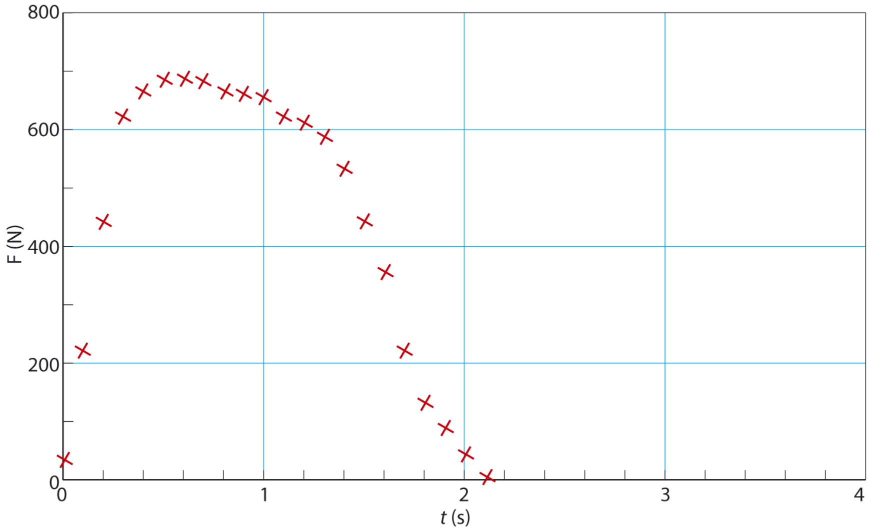
53. Aluksen nopeuden muutos saadaan impulssiperiaatteesta $I = F\Delta t = m\Delta v$, josta

$$\Delta v = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{1{,}0\,\text{kN}\cdot 60{,}0\,\text{s}}{10000\,\text{kg}} = 6{,}0\ \text{m/s}\,.$$

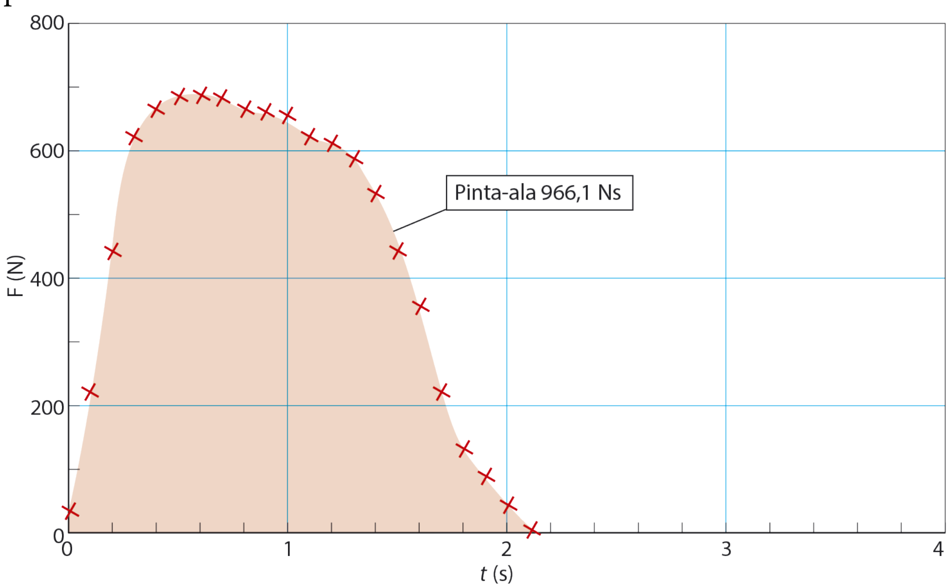
54. **a)** Mittaustulokset taulukoituna ovat

Aika (s)	Voima (N)
0,009	35
0,1	222
0,2	445
0,3	623
0,4	667
0,5	689
0,6	689
0,7	685
0,8	667
0,9	663
1,0	658
1,1	623
1,2	614
1,3	587
1,4	534
1,5	445
1,6	356
1,7	222
1,8	133
1,9	89
2,0	44
2,1	0

Nämä viedään mittausohjelmaan, joka esittää tulokset *t*,*F*-koordinaatistossa:



Voiman impulssi on mittausarvojen ja *t*-akselin väliin jäävän alueen fysikaalinen pinta-ala. Käytetään mittausohjelman integrointitoimintoa pinta-alan määrittämiseksi:



Impulssiksi saadaan $I = 966{,}1\ \text{Ns} \approx 970\ \text{Ns}$.

b) Impulssiperiaatteen mukaan $\overline{I} = \Delta\overline{p} = m\Delta\overline{v}$. Oletetaan, että liikkeen suunta ei muutu, jolloin saadaan skalaariyhtälö $\Delta v = \frac{I}{m} = \frac{966{,}1\text{ Ns}}{3{,}4\text{ kg}} \approx 280\text{ m/s}$. Rakettimoottori antaa alussa levossa olevalle raketille nopeuden 280 m/s.

55. Törmäyksessä liikemäärä säilyy: $m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = (m_1 + m_2)\overline{u}$, jossa $\overline{u}$ on puukappaleen ja luodin yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen. Kun luodin suunta on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$m_1 v_1 + m_2 \cdot 0\text{ m/s} = (m_1 + m_2)u$, josta seuraa yhtälö

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)u}{m_1}.$$

Työ-energiaperiaatteen mukaan kappaleen liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kitkan tekemä työ eli $\Delta E_k = W_\mu$, jossa $W_\mu = -F_\mu s = -\mu Ns$ $= -\mu(m_1 + m_2)gs$. Liike-energia lopussa eli puukappaleen pysähtyessä on nolla, joten saadaan yhtälö $-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = -\mu(m_1 + m_2)gs$. Tästä saadaan puukappaleen ja luodin törmäyksen jälkeiseksi nopeudeksi

$u = \sqrt{\frac{2\mu(m_1 + m_2)gs}{m_1 + m_2}} = \sqrt{2\mu gs}$. Sijoitetaan tämä luodin nopeuden

$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)u}{m_1}$ yhtälöön, jolloin saadaan

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)u}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)\sqrt{2\mu gs}}{m_1}$$

$$= \frac{(0{,}0020\,\text{kg} + 0{,}250\,\text{kg}) \cdot \sqrt{2 \cdot 0{,}16 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}020\,\text{m}}}{0{,}0020\,\text{kg}} \approx 32\,\text{m/s}.$$

56. **a)** Koska kajakin ja siinä olevien henkilöiden ja repun muodostamaan systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia, systeemin kokonaisliikemäärä säilyy. Alussa liikemäärä on nolla, joten se täytyy olla nolla myös silloin kun reppu lentää ilmassa.

Kajakin, Matin ja Maijan yhteisen liikemäärän pitää kumota repun liikemäärä eli sen on oltava yhtä suuri ja vastakkaismerkkinen kuin repun liikemäärä. Kajakin nopeus ei siis voi olla nolla ja siksi kajakki lähtee liikkeelle.

b) Valitaan repun liikkeen suunta positiiviseksi. Liikemäärän säilyminen vastaa silloin skalaariyhtälöä

$$m_{\text{reppu}}v_{\text{reppu}} + \left(m_{\text{Matti}} + m_{\text{Maija}} + m_{\text{kajakki}}\right)v = 0,$$

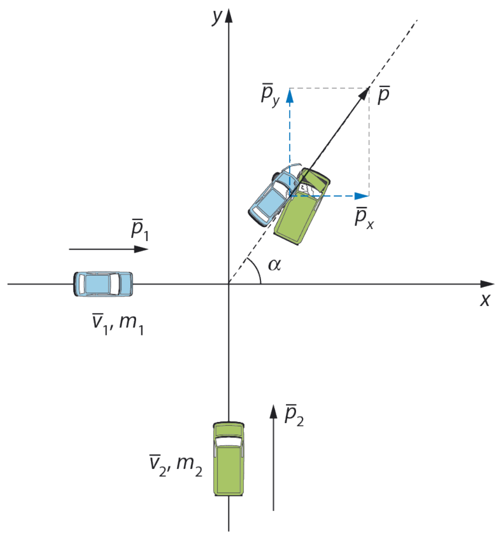
jossa v on kajakin nopeus. Ratkaistaan tästä kajakin, Matin ja Maijan yhteinen nopeus v:

$$v = -\frac{m_{\text{reppu}}v_{\text{reppu}}}{m_{\text{Matti}} + m_{\text{Maija}} + m_{\text{kajakki}}} = -\frac{14\text{ kg} \cdot 3{,}1\text{ m/s}}{68\text{ kg} + 51\text{ kg} + 28\text{ kg}} \approx -0{,}30\text{ m/s}.$$

Kajakki siis kulkee vauhdilla –0,30 m/s päinvastaiseen suuntaan kuin mihin reppu lentää.

c) Koska systeemin kokonaisliikemäärä säilyy, pitää kokonaisliikemäärän olla lopussa sama kuin alussa eli nolla. Koska kajakissa olevat Matti, Maija ja reppu eivät lopussa liiku kajakin suhteen, on niillä ja kajakilla sama nopeus. Tämän nopeuden pitää olla nolla, jotta kokonaisliikemäärä olisi nolla.

57.



Oletetaan, että auto 1 liikkuu pitkin x-akselia ja auto 2 pitkin y-akselia, kumpikin positiiviseen suuntaan, ja että autot törmäävät origossa. Autot tarttuvat törmäyksessä yhteen, joten törmäys on kimmoton.
Kokonaisliikemäärä säilyy eli $m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = (m_1 + m_2)\overline{u}$. Liikemäärä säilyy myös x- ja y-suunnissa komponenteittain:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)u_x \quad \text{ja} \quad m_2v_2 = (m_1 + m_2)u_y.$$

Ratkaistaan nopeuden u komponentit:

$$u_x = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1700\,\text{kg} \cdot 33\,\text{km/h}}{1700\,\text{kg} + 2500\,\text{kg}} = 13{,}3657\ \text{km/h} \quad \text{ja}$$

$$u_y = \frac{m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2500\,\text{kg} \cdot 54\,\text{km/h}}{1700\,\text{kg} + 2500\,\text{kg}} = 32{,}1429\ \text{m/s}.$$

Autojen yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen on

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(13{,}3657\ \text{km/h})^2 + (32{,}1429\ \text{km/h})^2} \approx 35\ \text{km/h}.$$

Suuntakulma α positiivisen x-akselin suhteen saadaan trigonometrian avulla:

$$\tan\alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{32{,}1429\ \text{km/h}}{13{,}3657\ \text{km/h}}, \text{ josta saadaan kulmalle arvo } \alpha \approx 67°.$$

58. **a)** Matkustajan liikemäärän muutos on $\Delta\overline{p} = m\Delta\overline{v}$. Voiman $\overline{F}$ impulssi matkustajaan on yhtä suuri kuin matkustajan liikemäärän muutos eli

$\overline{F}\Delta t = m\Delta\overline{v}$, joten $\overline{F} = \dfrac{m\Delta\overline{v}}{\Delta t}$ eli voima on suoraan verrannollinen nopeuden muutokseen ja kääntäen verrannollinen voiman vaikutusaikaan. Voiman $\overline{F}$ vaikutusaika Δt matkustajaan on likimain yhtä suuri molemmissa autoissa. Matkustajan nopeuden muutos $\Delta\overline{v}$ kevyessä autossa on suurempi kuin raskaassa autossa, joten kevyemmässä autossa matkustajaan kohdistuu suurempi voima (esim. turvavyön voima), joka aiheuttaa pahempia ruhjeita. Lisäksi raskaat autot ovat rakenteeltaan vahvempia kuin kevyet autot, ja siksi matkustajat ovat niissä paremmin suojattuja.

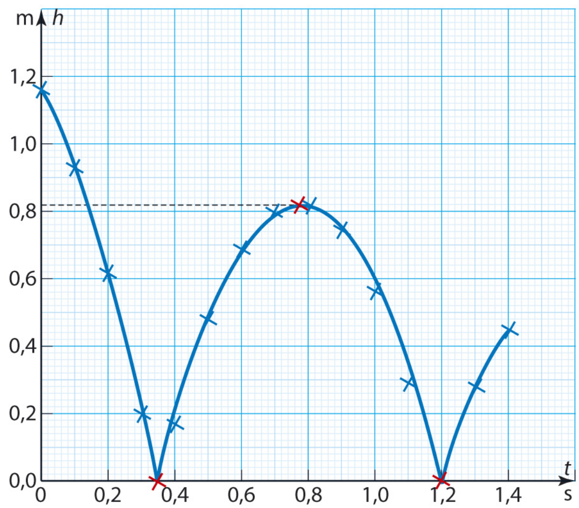
b) Jos turvavyötä ei ole, matkustaja jatkaa jatkavuuden lain mukaan liikettään ja törmää edessään oleviin esteisiin. Tällaisessa törmäyksessä pysäyttävä voima kohdistuu usein pienelle alueelle, jolloin syntyy vammoja. Lisäksi törmäyksen vaikutusaika on pieni, joten pysäyttävä voima on suuri. Turvavyö jakaa voiman $\overline{F}$ vaikutuksen laajemmalle alueelle A, jolloin kehoon voiman vaikutuskohdassa kohdistuva paine

$p = \dfrac{F}{A}$ pienenee. Lisäksi turvavyöt joustavat, mikä pidentää voiman vaikutusaikaa ja siten voima pienenee. Nämä molemmat tekijät vähentävät vammoja. Matkustajan törmätessä turvatyynyyn voima jakautuu laajalle alueelle, jolloin kehoon kohdistuva paine tyynyn kohdalla jää pieneksi. Myös turvatyynyt joustavat. Molemmat seikat vähentävät vammautumisriskiä.

VANHOJA YLIOPPILASTEHTÄVIÄ

S2016/2

a) Pallon etäisyys lattiasta ajan funktiona:



b) Jos oletetaan, että pallo pomppii pystysuorassa suunnassa, sen nopeus on nolla ensimmäisen pompun lakipisteessä ja kohdissa, joissa se osuu lattiaan. Nämä kohdat on merkitty kuvaajaan punaisilla rasteilla. Jos pallo liikkuu pomppiessaan myös vaakasuorassa suunnassa, sen nopeus ei ole missään kohdassa nolla.

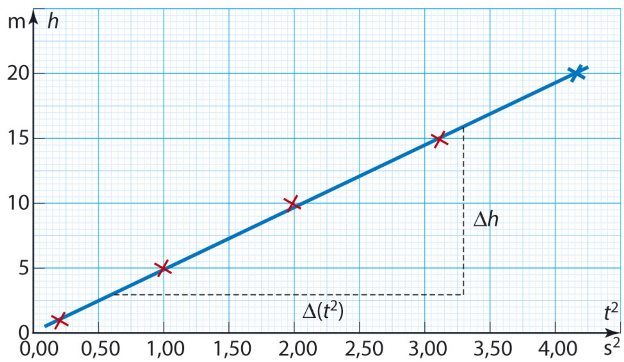
c) Kuvan perusteella pallo nousee 0,82 m:n korkeudelle.

K2016/2

a) Lasketaan t^2-arvot.

h (m)	1,00	5,00	10,0	15,0	20,0
t (s)	0,47	1,00	1,41	1,76	2,04
t^2 (s)	0,2209	1,0000	1,9881	3,0976	4,1616

Sijoitetaan lasketut arvot t^2,h-koordinaatistoon.



b) Kuula on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin putoamismatka on $h = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.
Kuula lähtee levosta eli $v_0 = 0$, joten sen kiihtyvyys on $a = \frac{2h}{t^2}$.

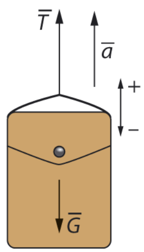
Kuulan kiihtyvyys saadaan a-kohdan kuvaajaan sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta:

$$a = 2 \cdot \frac{\Delta h}{\Delta\left(t^2\right)} = 2 \cdot \frac{16{,}0\ \text{m} - 3{,}0\ \text{m}}{3{,}30\ \text{s}^2 - 0{,}60\ \text{s}^2} \approx \underline{\underline{9{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}.$$

S2014/5

$m = 5{,}03$ kg, $m_v = 5{,}31$ kg, $t = 11$ s

a)



$\overline{G}$ on paino ja $\overline{T}$ tukivoima.

b) Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G} + \overline{T} = m\overline{a}$, jossa $\overline{T}$ on mitattu voima, m repun massa ja $\overline{a}$ hissin ja repun kiihtyvyys. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaarimuodossa $T - G = ma$, jossa mitatun voiman suuruus on $T = m_v g$ ja m_v on vaa'an näyttämä massa. Kiihtyvyys on suuruudeltaan $a = \dfrac{T-G}{m}$. Koska hissin liike on tasaisesti kiihtyvää ja hissi lähtee levosta, loppunopeus saadaan yhtälöstä

$v = at$ eli

$$v = \frac{T-G}{m}t = \frac{m_v g - mg}{m}t = \left(\frac{m_v}{m} - 1\right)gt$$
$$= \left(\frac{5{,}31\,\text{kg}}{5{,}03\,\text{kg}} - 1\right)\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 11\,\text{s} = 6{,}00692\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx \underline{\underline{6{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

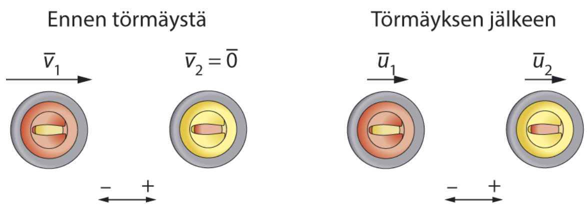
c) Hissin ja repun liikkuessa tasaisella nopeudella ylöspäin, reppuun kohdistuva kokonaisvoima $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = \overline{0}$, josta $T - G = 0$ eli $T = G$.

Vastaus: Vaaka näyttää samaa lukemaa 5,03 kg kuin silloin, kun reppu ja vaaka ovat paikallaan.

K2016/5 (osa)

$m = 20$ kg, $v_1 = 2{,}1$ m/s²

a)



Osumahetkellä kiviin ei vaikuta merkittäviä ulkoisia voimia, joten kivien muodostamaa systeemiä voidaan pitää eristettynä. Törmäyksessä liikemäärä säilyy:

$$m\overline{v}_1 + m\overline{v}_2 = m\overline{u}_1 + m\overline{u}_2.$$

Sovitaan suunta oikealle positiiviseksi, ja koska $\overline{v}_2 = \overline{0}$, saadaan skalaariyhtälö $v_1 = u_1 + u_2$.

Kimmoisassa törmäyksessä kivien liike-energia säilyy:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2,$$

josta saadaan

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Sijoitetaan tähän liikemäärän säilymisestä saatu nopeus v_1:

$$\begin{aligned}(u_1+u_2)^2 &= u_1^2+u_2^2\\ u_1^2+u_2^2+2u_1u_2 &= u_1^2+u_2^2\\ 2u_1u_2 &= 0.\end{aligned}$$

Yhtälö on tosi vain, jos $u_1 = 0$ tai $u_2 = 0$. Myös liikemäärän säilyminen toteutuu, kun nopeudet törmäyksen jälkeen ovat $\overline{u}_1 = \overline{0}$ ja $\overline{u}_2 = \overline{v}_1$. Punainen kivi pysähtyy törmäyksessä ja keltainen kivi lähtee nopeudella 2,1 m/s samaan suuntaan kuin punainen kivi liikkui ennen törmäystä.

S2015/10 (osa)

$m = 5{,}5$ kg, $m_L = 0{,}0102$ kg, $v = 235$ m/s, $l_1 = 0{,}62$ m, $l_2 = 0{,}31$ m,

$l_L = 0{,}0167$ m

a) Luodin osuessa levyyn sen nopeus hidastuu tasaisesti nollaan luodin pituuden matkalla:

$$l_L = \frac{1}{2}vt,$$

josta saadaan pysähtymiseen kuluvaksi ajaksi

$$t = \frac{2l_L}{v}.$$

Impulssiperiaatteen mukaan

$$Ft = \Delta p = m_L \Delta v = m_L v,$$

joten voima on

$$F = \frac{m_L v}{t} = m_L v \frac{v}{2l_L} = \frac{m_L v^2}{2l_L} = \frac{0{,}0102\text{ kg}\cdot(235\text{ m/s})^2}{2\cdot 0{,}0167\text{ m}} = 16865{,}12\text{ N} \approx \underline{\underline{16900\text{ N}}}.$$

K2011/5

$m = 29$ kg, $v = 5{,}0$ m/s, $s = 1{,}3$ m, $m_p = 21$ kg, $g = 9{,}81$ m/s^2

Kun poika hyppää patjalle, kyseessä on pojan ja patjan välinen törmäys. Pojan ja patjan kokonaisliikemäärä säilyy: $m\overline{v} + m_p\overline{v}_p = (m + m_p)\overline{u}$, jossa $\overline{v}$ on pojan nopeus ja $\overline{v}_p$ patjan nopeus ennen törmäystä ja $\overline{u}$ on pojan ja patjan yhteinen nopeus heti törmäyksen jälkeen. Koska patja on alussa levossa, sen nopeus on $v_p = 0$ m/s. Kun pojan menosuunta valitaan positiiviseksi suunnaksi, voidaan liikemäärän säilyminen esittää skalaariyhtälönä $mv = (m + m_p)u$. Tästä voidaan ratkaista u eli pojan ja patjan nopeus välittömästi törmäyksen jälkeen:

$$u = \frac{mv}{m + m_p} = \frac{29\,\text{kg} \cdot 5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{29\,\text{kg} + 21\,\text{kg}} = 2{,}9\,\text{m/s}.$$

Työperiaatteen mukaan pojan ja patjan liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kitkan F_μ patjaan matkalla s tekemä työ: $\Delta E_k = W$ eli $\Delta E_k = -F_\mu s$. Koska pinta on vaakasuora, Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälöstä $N - G = 0$ saadaan $N = G$.

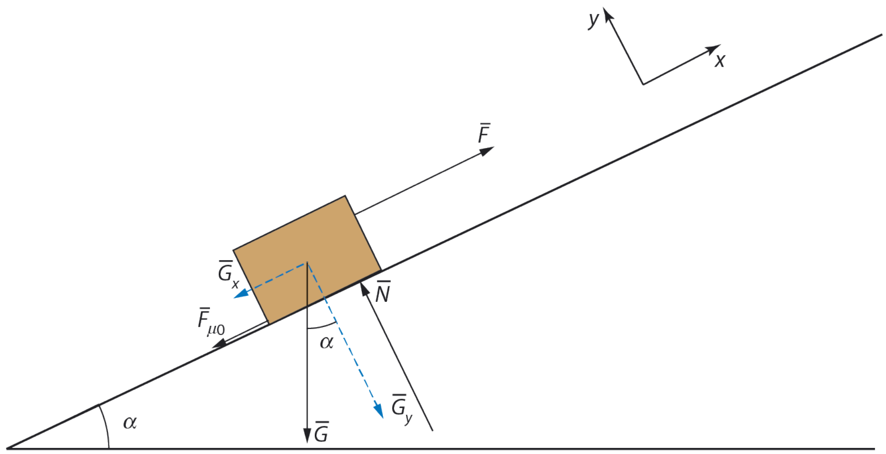
Kitka on $F_\mu = \mu N = \mu G = \mu(m + m_p)g$.

Patja ja poika pysähtyvät kuljettuaan matkan s, joten työ-energiaperiaate $E_{k,l} - E_{k,a} = -F_\mu s$ eli $0 - \frac{1}{2}(m + m_p)u^2 = -F_\mu s$ saadaan muotoon $\frac{1}{2}(m + m_p)u^2 = \mu(m + m_p)gs$. Yhtälöstä $\frac{1}{2}u^2 = \mu gs$ saadaan kitkakertoimeksi $\mu = \frac{u^2}{2gs} = \frac{(2{,}9\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 1{,}3\,\text{m}} \approx 0{,}33.$

K2009/6

$m = 480$ kg, $r_1 = 3{,}6$ cm, $r_2 = 43$ cm, $\mu_0 = 0{,}15$, $\alpha = 15°$, $g = 9{,}81$ m/s^2

Laituriin kohdistuvat voimat ovat paino $\overline{G}$, luiskan tukivoima $\overline{N}$, vaijerin jännitysvoima $\overline{F}$ ja lepokitka $\overline{F}_{\mu 0}$



Jaetaan paino $\overline{G}$ komponentteihin: $G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha$ ja

$G_y = G\cos\alpha = mg\cos\alpha$, kun positiivinen suunta on tason suunnassa vinosti ylös ja tasoa vastaan kohtisuorasti viistosti ylös. Tarkastellaan rajatapausta, jolloin laituri on levossa juuri lähdössä liikkeelle. Tällöin Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö tason suunnassa on

$\sum\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F} + \overline{G}_x + \overline{F}_{\mu 0} = 0$ ja skalaariyhtälönä $F - G_x - F_{\mu 0} = 0$.

Liikeyhtälö tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa on

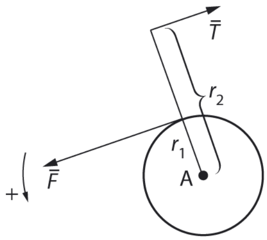
$\sum\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{G}_y = 0$, ja skalaariyhtälönä $N - G_y = 0$.

Alemmasta yhtälöstä saadaan tukivoimaksi $N = G_y = mg\cos\alpha$.
Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä vaijerin aiheuttama jännitysvoima:

$$F = G_x + F_{\mu 0} = mg\sin\alpha + \mu_0 N = mg\sin\alpha + \mu_0 mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha)$$

$$= 480\text{ kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(\sin 15° + 0{,}15\cdot\cos 15°) = 1900{,}98\text{ N.}$$

Kampisysteemiin vaikuttavat voimat ovat vaijerin jännitysvoima $\overline{F}$ ja käden kampea vääntävä voima $\overline{T}$.



Tarkastellaan voimien momentteja rummun keskipisteen A kautta kulkevan akselin suhteen. Rajatapauksessa kampisysteemi on levossa, juuri lähdössä pyörimään, ja sen liikeyhtälö pyörimisen suhteen on $\sum M_{\mathrm{A}} = 0$. Kuvion mukaan voimien varret ovat r_1 ja r_2. Kun pyörimissuunta vastapäivään on positiivinen, liikeyhtälö on $F \cdot r_1 - T \cdot r_2 = 0$. Jotta laituri lähtisi liikkeelle, kampea kääntävän voiman tulee olla suuruudeltaan vähintään

$$T = \frac{F \cdot r_1}{r_2} = \frac{1900{,}98\ \mathrm{N} \cdot 3{,}6\ \mathrm{cm}}{43\ \mathrm{cm}} \approx 160\ \mathrm{N}.$$

Kampeen kohdistuvan voiman on oltava suuruudeltaan vähintään 160 N.