

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 1-1.** Esimerkkejä: Ukonilmalla salamasta näkyy välähdys ennen kuin kuuluu jyrähdys. Ero näiden välillä on sitä suurempi, mitä etäämmällä salamanisku tapahtuu eli mitä vaimeampana jyrinä kuuluu. Tämä osoittaa, että valo etenee nopeammin kuin ääni.

Kun seuraa riittävän etäältä esimerkiksi puiden pilkkomista, havaitsee äänen saapuvan vasta hetken sen jälkeen, kun kirveen näkee iskeytyvän puuhun.

- 1-2.** Aaltoliikkeen perusyhtälöstä  $v = f\lambda$  saadaan aallonpituudelle yhtälö  $\lambda = \frac{v}{f}$ . Nyt aallonnopeus  $v$  on valonnopeus  $c = 299\,792\,458$  m/s. Aallonpituudet ovat:

$$\text{a) } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{2,997\,92 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{450 \cdot 10^{12} \frac{1}{\text{s}}} \approx 670 \text{ nm.}$$

$$\text{b) } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{2,997\,92 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{0,40 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{s}}} \approx 0,75 \text{ m.}$$

$$\text{c) } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{2,997\,92 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{7,5 \cdot 10^{17} \frac{1}{\text{s}}} \approx 0,40 \text{ nm.}$$

$$\text{d) } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{2,997\,92 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{500 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{s}}} \approx 6 \cdot 10^{14} \text{ m.}$$

Näkyvän valon alueella on kohdan a taajuus.

- 1-3. a) Väärin.  
 b) Oikein.  
 c) Väärin  
 d) Oikein.

- 1-4. Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön eli  $E \sim \frac{1}{r^2}$ . Näin ollen valaistusvoimakkuuksien suhde on  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ .

Jotta valaistusvoimakkuus olisi 500 luksia, lamppu pitää asettaa etäisyydelle

$$r_2 = \sqrt{\frac{r_1^2 E_1}{E_2}} = \sqrt{\frac{(1,6 \text{ m})^2 \cdot 120 \text{ lx}}{500 \text{ lx}}} \approx 0,78 \text{ m pöydän pinnasta.}$$

- 1-5. Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön eli  $E \sim \frac{1}{r^2}$ . Näin ollen valaistusvoimakkuuksien suhde on  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ .

Valaistusvoimakkuudeksi etäisyydellä 10 m saadaan

$$E_1 = \frac{r_2^2}{r_1^2} E_2 = \frac{(30 \text{ m})^2}{(10 \text{ m})^2} 5 \text{ lx} \approx 50 \text{ lx.}$$

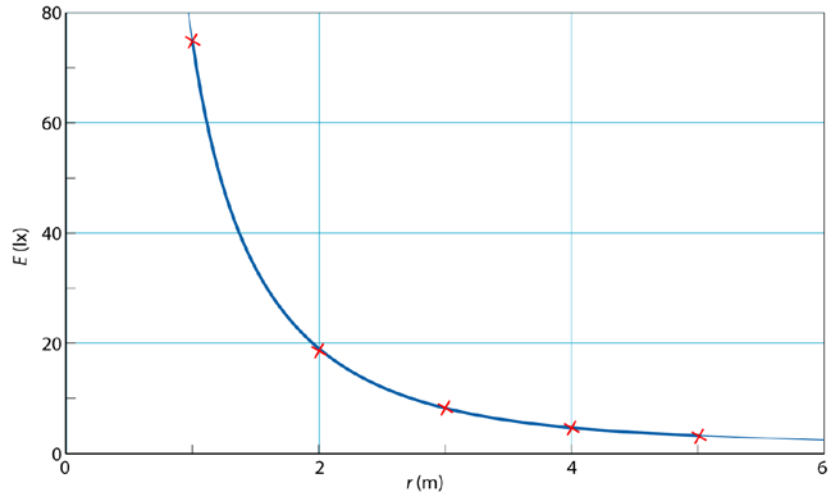
- 1-6. a) Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön eli  $E \sim \frac{1}{r^2}$ , joten valaistusvoimakkuuksien suhde on  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ . Kun

valaistusvoimakkuus etäisyydellä  $r_1 = 1,0 \text{ m}$  on  $E_1 = 75 \text{ lx}$ ,

valaistusvoimakkuus etäisyydellä  $r$  on tämän yhtälön perusteella

$$E = \frac{r_1^2}{r^2} E_1 = \frac{(1,0 \text{ m})^2 \cdot 75 \text{ lx}}{r^2} = \frac{75 \text{ m}^2 \cdot \text{lx}}{r^2}.$$

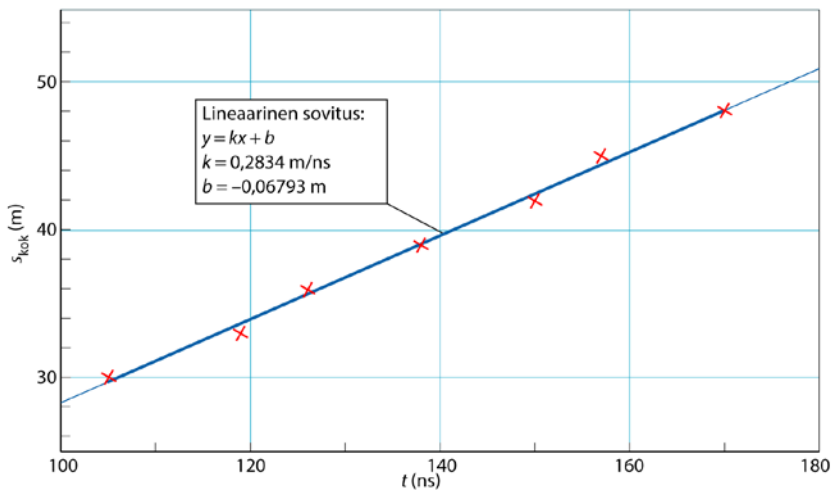
Valaistusvoimakkuuden kuvaaja:



b) Mittausohjelmaa käytettäessä voidaan kohdistimen koordinaatteja lukemalla havaita, että valaistusvoimakkuus etäisyydellä 3,5 m on 6,1 lx.

1-7. Valopulssi heijastuu peilistä takaisin mittauslaitteeseen. Esitetään taulukossa kokonaismatka  $s_{\text{kok}}$  ajan funktiona:

$s_{\text{kok}}$ (m)	30,00	33,00	36,00	39,00	42,00	45,00	48,00
$t$ (ns)	105	119	126	138	150	157	170



Mittausohjelman avulla mittauspisteisiin tehty lineaarinen sovitus antaa suoran, jonka fysikaalinen kulmakerroin on 0,2834 m/ns. Valonnopeus on tämä kulmakerroin eli  $c \approx 2,8 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

**1-8.** Sen, ovatko aurinkolasit polarisoivat, voi tarkistaa esimerkiksi seuraavasti:

– Tarkastellaan pöydän pinnasta vinosti heijastunutta valoa kääntelemällä aurinkolaseja eri asentoihin. Jos valon kirkkaus muuttuu lasien asentoa muutettaessa, lasit ovat polarisoivat.

– Katsotaan sinistä taivasta eri asennoissa olevien lasien läpi. Jos taivaan kirkkaus muuttuu, lasit ovat polarisoivat.

– Käännellään laseja tietokoneen näytön edessä. Jos kuva muuttuu tummaksi jossain lasien asennossa, lasit ovat polarisoivat.

**1-9.** Maidon pienet ainesosat sirottavat sinistä valoa sivusuuntiin enemmän kuin muita valkoisessa valossa (lampun valo tai päivänvalo) olevia värejä. Siksi maidosta silmiimme heijastunut valo on sinivoittoista, kun valo tulee sivusuunnasta. Takaa maidon läpi tulevasta valosta siroaa sinistä valoa sivusuuntiin, joten silmiimme tuleva valo on punertavaa.

**1-10.** Poutaisilla säillä ilmaan kertyy pienhiukkasia eli aerosoleja, jotka sirottavat auringonvaloa. Eniten siroaa auringonvalon spektrin sininen osa, joten silmiimme tuleva valo on sinivoittoista. Mitä etäämpänä kohde on, sitä enemmän meidän ja kohteen väliin mahtuu pienhiukkasia ja sitä sinisempää valo on. Sinisyyttä sanotaan autereeksi. Sitä aiheuttavat myös metsäpaloissa ja teollisuudesta vapautuneet pienhiukkaset ja kuivista puista ja muusta kasvillisuudesta sekä maanpinnasta irronnut pöly. Kun

ilman kosteus lisääntyy, pienhiukkasiin alkaa tiivistyä vettä ja ne suurenevat ja alkavat sirottamisen sijasta heijastaa valoa. Auer muuttuu silloin harmahtavaksi uduksi.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

2-1. a) Jään taitekerroin on  $n = \frac{c}{c_{\text{jää}}} = \frac{2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,29 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 1,31$ .

b) Valon nopeus lasissa saadaan yhtälöstä  $n = \frac{c}{c_{\text{lasi}}}$ :

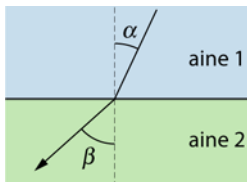
$$c_{\text{lasi}} = \frac{c}{n} = \frac{2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,51} \approx 1,99 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2-2. Oikeat vaihtoehdot: b eli  $v_2 > v_1$  ja d eli  $n_1 > n_2$

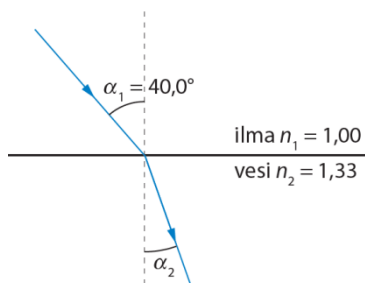
Perustelu: Valonsäde taittuu pinnan normaalista poispäin, joten tulokulma  $\alpha$  on pienempi kuin taitekulma  $\beta$ . Tällöin  $\sin \alpha < \sin \beta$ .

Taittumislaista  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$  voidaan silloin päätellä, että

$$v_1 < v_2 \text{ ja } n_2 < n_1.$$



2-3. a)



Valon taittumislaita  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$  seuraa

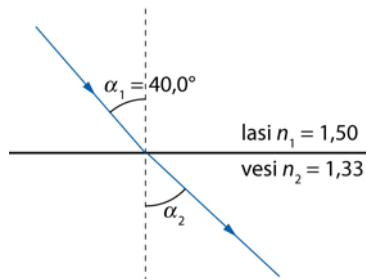
$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1 \sin \alpha_1}{n_2} = \frac{1,00 \cdot \sin 40,0^\circ}{1,33} = 0,483300,$$

josta saadaan taitekulmaksi  $\alpha_2 \approx 28,9^\circ$ .

b) Valon taittumislaita  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$  seuraa

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1 \sin \alpha_1}{n_2} = \frac{1,50 \cdot \sin 40,0^\circ}{1,33} = 0,724948, \text{ josta saadaan taitekulmaksi}$$

$\alpha_2 \approx 46,5^\circ$ .



**2-4.** Taittumislaita  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_{\text{lasi}}}{n_{\text{ilma}}}$  seuraa

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_{\text{ilma}} \sin \alpha_1}{n_{\text{lasi}}} = \frac{1,00 \cdot \sin 30,0^\circ}{1,5} = 0,333333,$$

josta saadaan taitekulmaksi  $\alpha_2 = 19,4712^\circ$ .

Valonsäteen suunnanmuutos on  $30,0^\circ - 19,4712^\circ \approx 11^\circ$ .

Valon nopeus lasissa on

$$c_{\text{lasi}} = \frac{c}{n_{\text{lasi}}} = \frac{2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,5} \approx 2,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Valon taajuus on

$$f_{\text{lasi}} = f_{\text{ilma}} = \frac{c}{\lambda_{\text{ilma}}} = \frac{2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{450 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 0,67 \text{ PHz}.$$

Yhtälöstä  $\frac{\lambda_{\text{ilma}}}{\lambda_{\text{lasi}}} = \frac{n_{\text{lasi}}}{n_{\text{ilma}}}$  saadaan aallonpituudeksi lasissa

$$\lambda_{\text{lasi}} = \frac{\lambda_{\text{ilma}} n_{\text{ilma}}}{n_{\text{lasi}}} = \frac{450 \text{ nm} \cdot 1,00}{1,5} = 300 \text{ nm}.$$

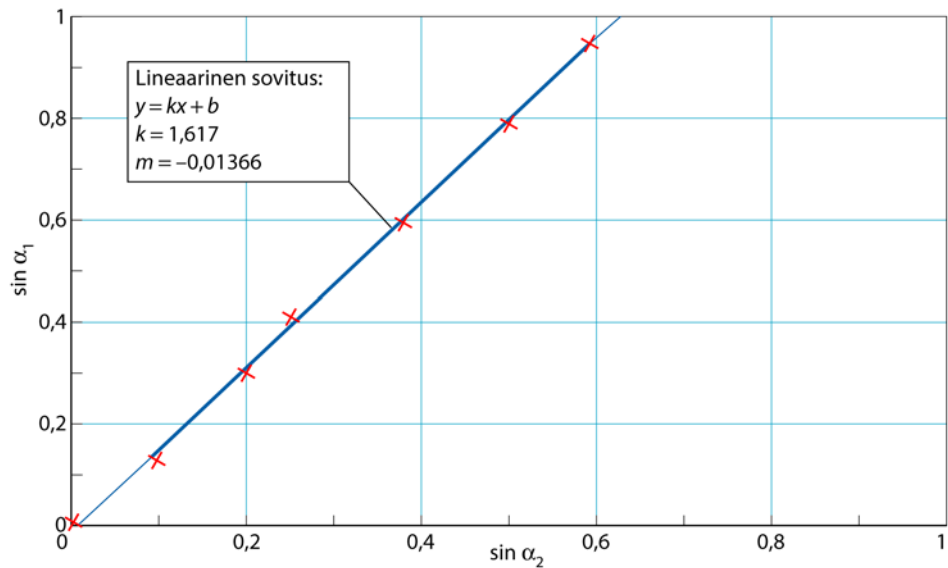
**2-5.** Valon taittumislaki on  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ , jossa  $n_1$  on ilman taitekerroin eli

$n_1 = 1,00$ ,  $n_2$  on määritettävä muovin taitekerroin,  $\alpha_1$  on tulokulma ja  $\alpha_2$  on taitekulma. Lasketaan taulukkoon mitattuja tulo- ja taitekulmia vastaavat sinien arvot:

$\alpha_1$ (°)	0	7,5	17,4	24,2	36,2	52,2	71,8
$\sin \alpha_1$	0	0,1305	0,2990	0,4099	0,5906	0,7902	0,9500
$\alpha_2$ (°)	0	5,7	11,5	14,5	22,3	30,0	36,2
$\sin \alpha_2$	0	0,0993	0,1994	0,2504	0,3795	0,500	0,5906

Esitetään mittaustulokset mittaushjelman avulla tai millimetripaperille piirtämällä  $\sin \alpha_1$ ,  $\sin \alpha_2$ -koordinaatistossa ja määritetään kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin.





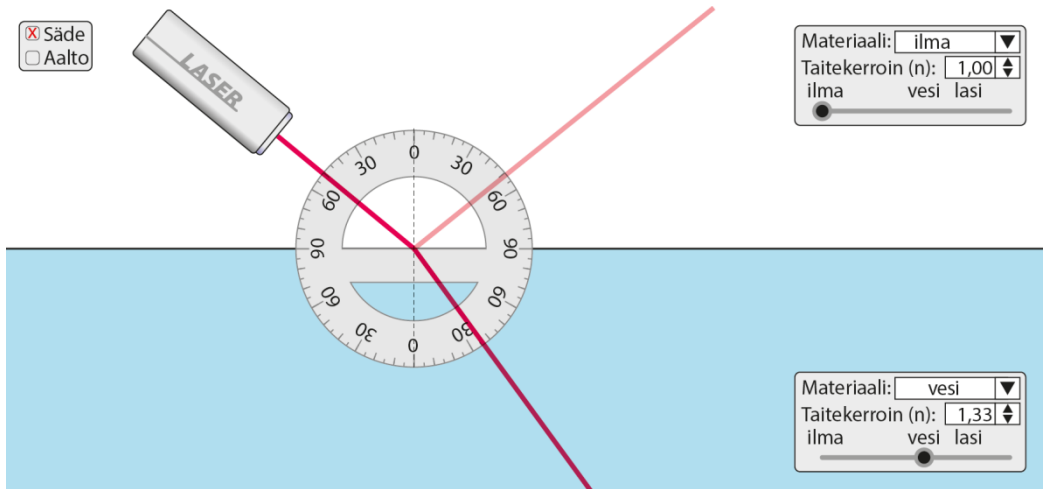
Mittausohjelmalla tehty lineaarinen sovitus antaa fysikaalisen

kulmakertoimen eli  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$  : n arvoksi 1,617, jolloin yhtälöstä

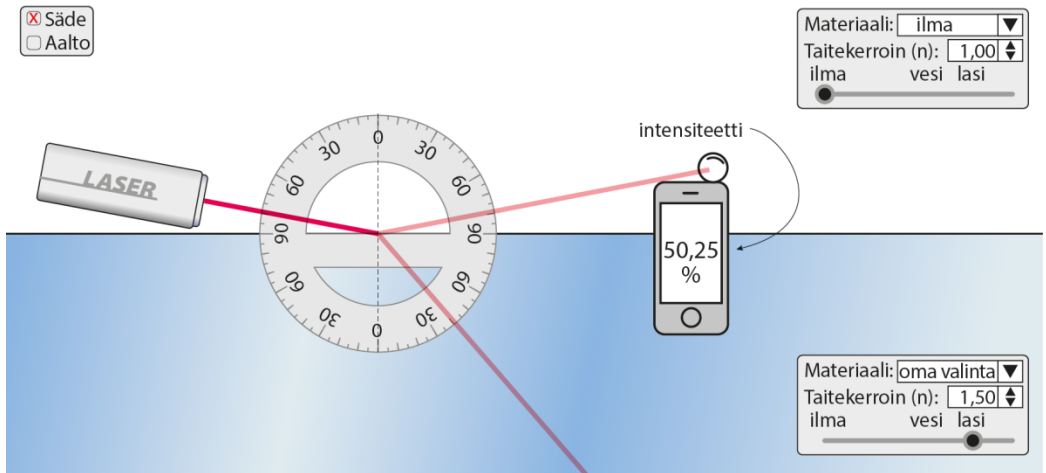
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \text{ saadaan } n_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} n_1 = 1,617 \cdot n_1 = 1,617 \cdot 1,00 \approx 1,62.$$

Muovin taitekerroin on 1,6.

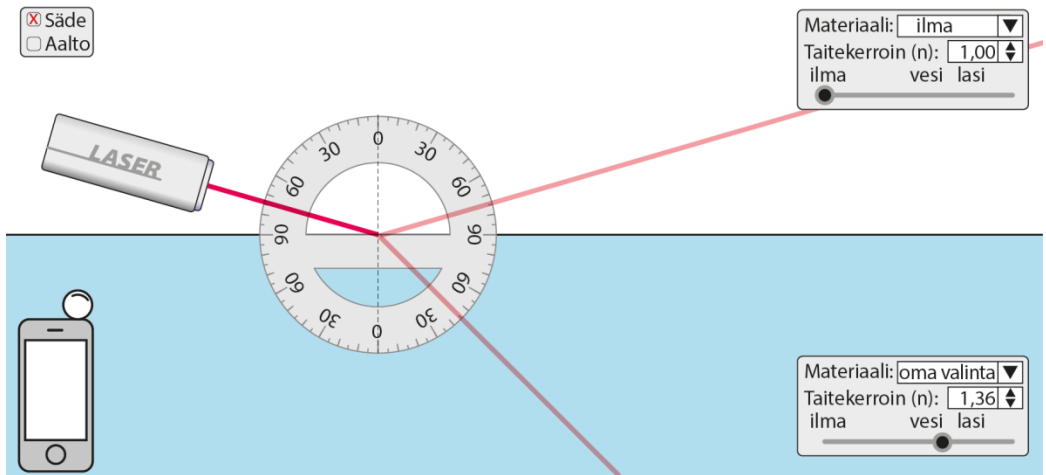
2-6. a) Tulokulma on  $52^\circ$ .



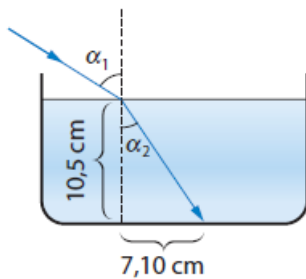
b) Tulevasta valosta heijastuu 50 %, kun tulokulma on  $80^\circ$ .



c) Taitekerroin on 1,36. Taulukkokirjan mukaan etanolin taitekerroin aallonpituudelle 527,0 nm on 1,364, joten aine on todennäköisesti etanolia.



- 2-7. Kuvan perusteella  $\tan \alpha_2 = \frac{7,10 \text{ cm}}{10,5 \text{ cm}} = 0,676 \text{ 190}$ . Tästä saadaan taitekulmalle arvo  $\alpha_2 = 34,0662^\circ$ .



Valon taittumislain  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$  perusteella nesteen taitekerroin on

$$n_2 = \frac{n_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{1,00 \cdot \sin 49,5^\circ}{\sin 34,0662^\circ} \approx 1,36.$$

Taulukkokirjan mukaan etanolin taitekerroin 760,8 nm:n valolle on 1,358. Neste on taitekertoimen perusteella todennäköisesti etanolia.

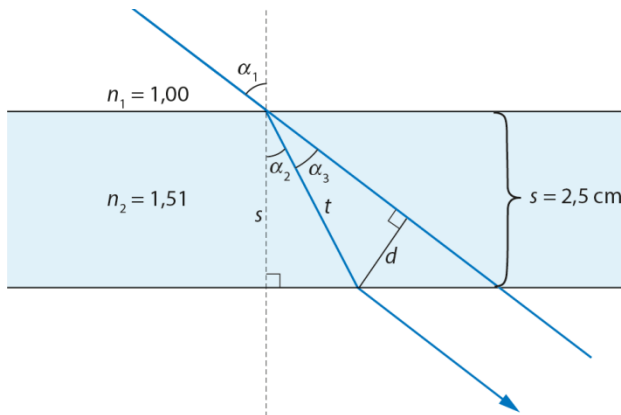
**2-8.** Valon taittumislain  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$  saadaan

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1 \sin \alpha_1}{n_2} = \frac{1,00 \cdot \sin 55^\circ}{1,51} = 0,542\,485,$$

jolloin taitekulman arvoksi tulee  $\alpha_2 = 32,8530^\circ$ . Piirroksessa olevan suorakulmaisen kolmion sivun  $t$  pituus saadaan ratkaistua kosinin

lausekkeesta  $\cos \alpha_2 = \frac{s}{t}$ :

$$t = \frac{s}{\cos \alpha_2} = \frac{2,5 \text{ mm}}{\cos 32,8530^\circ} = 2,97596 \text{ mm}.$$



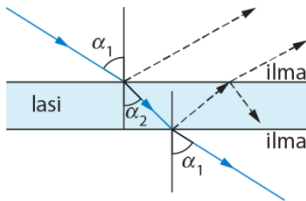
Kulman  $\alpha_3$  suuruus on  $\alpha_3 = 55^\circ - 32,8530^\circ = 22,1470^\circ$ . Yhtälöstä

$\sin \alpha_3 = \frac{d}{t}$  saadaan ratkaistua yhdensuuntaissiirtymän  $d$  arvo:

$$d = t \sin \alpha_3 = 2,97596 \text{ mm} \cdot \sin 22,1470^\circ \approx 1,1 \text{ mm}.$$

**2-9.** a) Lasersäde taittuu taittumislain ja heijastuu heijastuslain mukaisesti sekä lasin etu- että takapinnassa. Koska lasi on tasapaksu, säteen tulokulma  $\alpha_1$  etupinnassa on yhtä suuri kuin taitekulma takapinnassa,

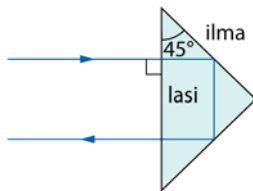
joten tapahtuu yhdensuuntaissiirtymä. Lasin sisällä heijastunut valo heijastuu aina uudelleen vastakkaiseen pintaan. Joka kerralla osa valosta heijastuu ja osa läpäisee pinnan taittuen.



b) Valonsäde osuu prisman pitkään tahkoon kohtisuorasti, joten säde läpäisee pinnan suuntaansa muuttamatta. Lasin sisällä kummassakin pinnassa säteen tulokulma on  $45^\circ$ . Kokonaisheijastumisen rajakulma  $\alpha_r$

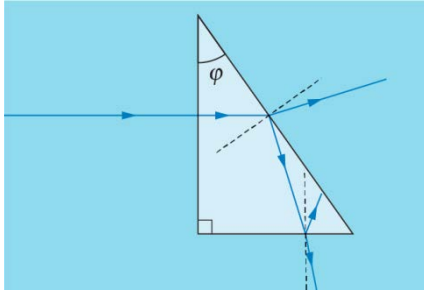
lasin ja ilman välillä lasketaan yhtälöstä  $\sin \alpha_r = \frac{n_{\text{ilma}}}{n_{\text{lasi}}} = \frac{1,00}{1,52} = 0,657895$ ,

josta saadaan kokonaisheijastumisen rajakulmaksi  $\alpha_r \approx 41,1^\circ$ . Koska valonsäteen tulokulma on suurempi kuin kokonaisheijastumisen rajakulma lasin ja ilman rajapinnassa, kummassakin pinnassa tapahtuu kokonaisheijastuminen. Heijastunut valonsäde tulee prisman pystysuoraan seinämään kohtisuorasti, joten se etenee ilmaan suuntaansa muuttamatta.



**2-10.** Kun valo tulee prismaan, se ei muuta suuntaa: tulokulma  $\alpha_1 = 0$ , joten taittumislain  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$  mukaan  $n_1 \sin 0^\circ = n_2 \sin \alpha_2$  eli

$n_1 \cdot 0 = n_2 \sin \alpha_2$ . Tästä seuraa, että  $\sin \alpha_2 = 0$  eli taitekulma on  $\alpha_2 = 0$ . Prismän takareunassa valo tulee optisesti harvemmasta aineesta (lasi) optisesti tiheämpään aineeseen (neste), joten valo taittuu pinnan normaaliin päin. Kuvaan on jätetty piirtämättä prismän alapinnasta heijastuneen säteen edelleenheijastumiset ja -taittumiset.



**2-11.** Kokonaisheijastumisen rajakulma saavutetaan, kun taitekulma  $\alpha_2$  on  $90^\circ$ .

Valon taittumislain  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$  saadaan silloin kokonaisheijastumisen

rajakulmalle yhtälö  $\sin \alpha_r = \frac{n_2}{n_1}$ , jossa  $n_1$  on sen aineen taitekerroin, josta

valonsäde saapuu, ja  $n_2$  sen aineen taitekerroin, josta valo

kokonaisheijastuu. Ilman taitekerroin on  $n_{\text{ilma}} = 1,00$ , veden  $n_{\text{vesi}} = 1,33$  ja

lasin  $n_{\text{lasi}} = 1,50$ .

**a)** Kun valo tulee lasista ilmaan, on kokonaisheijastumisen rajakulmalle

saadaan yhtälö  $\sin \alpha_r = \frac{n_{\text{ilma}}}{n_{\text{lasi}}} = \frac{1,00}{1,50} = 0,666\ 667$ , josta saadaan

rajakulmaksi  $\alpha_r \approx 41,8^\circ$ .

**b)** Kun valo tulee vedestä ilmaan, on kokonaisheijastumisen rajakulmalle

saadaan yhtälö  $\sin \alpha_r = \frac{n_{\text{ilma}}}{n_{\text{vesi}}} = \frac{1,00}{1,33} = 0,751880$ , josta saadaan

rajakulmaksi  $\alpha_r \approx 48,8^\circ$ .

c) Kun valo tulee lasista veteen, on kokonaisheijastumisen rajakulmalle

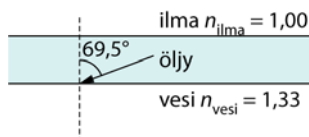
saadaan yhtälö  $\sin \alpha_r = \frac{n_{\text{vesi}}}{n_{\text{lasi}}} = \frac{1,33}{1,50} = 0,886\ 667$ , josta saadaan

rajakulmaksi  $\alpha_r \approx 62,5^\circ$ .

**2-12.** Koska veden taitekerroin on suurempi kuin ilman taitekerroin, vedestä ilmaan tuleva valo taittuu pois päin pinnan normaalista. Tämän takia kynästä silmään saapuva valo näyttää tulevan ylempää kuin mistä se on alun perin lähtöisin.

**2-13.** Taiteutumislaista  $\frac{\lambda_{\text{ilma}}}{\lambda_{\text{vesi}}} = \frac{n_{\text{vesi}}}{n_{\text{ilma}}}$  voidaan ratkaista aallonpituus vedessä,

$$\lambda_{\text{vesi}} = \frac{n_{\text{ilma}} \lambda_{\text{ilma}}}{n_{\text{vesi}}} = \frac{1,00 \cdot 628 \text{ nm}}{1,33} = 472,180 \text{ nm}$$

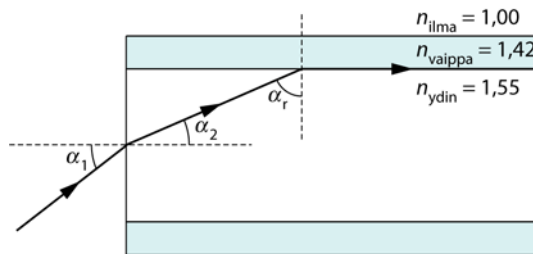


Taiteutumislaista  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$  saadaan kokonaisheijastumisen tapahtuessa

yhtälö  $\sin 69,5^\circ = \frac{\lambda_{\text{öljy}}}{\lambda_{\text{vesi}}}$ , josta saadaan laservalon aallonpituudeksi öljyssä

$$\lambda_{\text{öljy}} = \lambda_{\text{vesi}} \cdot \sin 69,5^\circ = 472,180 \text{ nm} \cdot \sin 69,5^\circ \approx 442 \text{ nm}.$$

- 2-14.** Tulokulman suurin arvo vastaa sitä, että ytimen ja vaipan rajapinnasta kokonaiseijastunut aalto etenee valokuidun akselin suuntaisesti. Jos tulokulma on tätä suurempi, ei tapahdu kokonaiseijastumista eikä valo kulje valokuidun toiseen päähän.



Valokuidussa ytimen ja vaipan rajapinnassa tapahtuvan kokonaiseijastumisen rajakulma saadaan yhtälöstä

$$\sin \alpha_r = \frac{n_{\text{vaippa}}}{n_{\text{ydin}}} = \frac{1,45}{1,47} \text{ eli rajakulma on } \alpha_r = 80,5379^\circ. \text{ Taitekulma}$$

kuidun päässä on silloin  $\alpha_2 = 90^\circ - 80,5379^\circ = 9,46210^\circ$ . Tulokulma  $\alpha_1$

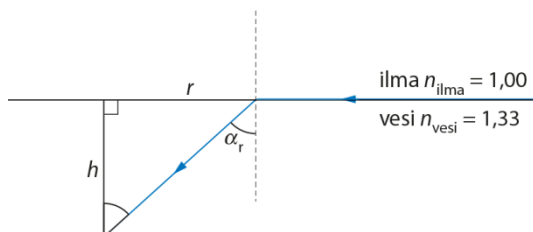
$$\text{saadaan taittumislaista } \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_{\text{ydin}}}{n_{\text{ilma}}} \text{ eli}$$

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 \frac{n_{\text{ydin}}}{n_{\text{ilma}}} = \sin 9,46210^\circ \cdot \frac{1,47}{1,00}. \text{ Tulokulma on } \alpha_1 \approx 14,0^\circ.$$

Valo poistuu valokuidun toisesta päästä, jos tulokulma on  $14,0^\circ$  tai pienempi.



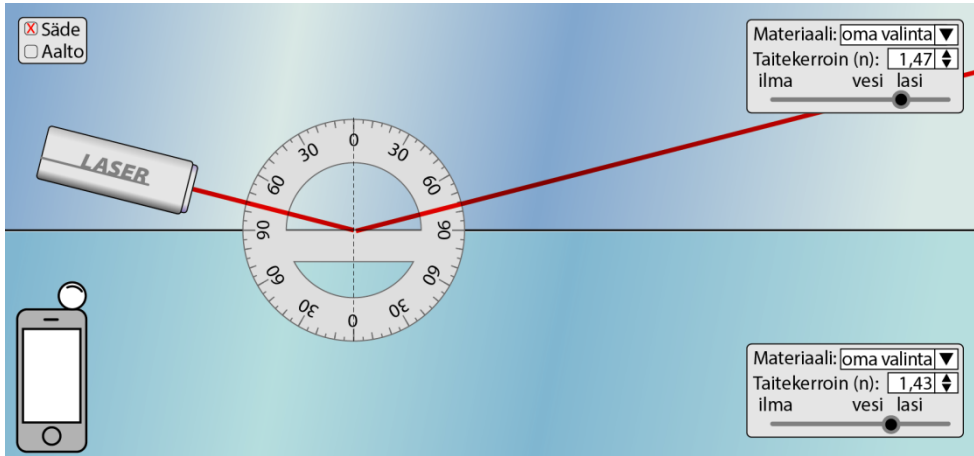
- 2-15. Tahtumislaista  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$  saadaan kokonaisheijastumisen rajakulmalle ilman ja veden rajapinnassa yhtälö  $\sin \alpha_r = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,00}{1,33}$ . Rajakulmaksi saadaan  $\alpha_r \approx 48,7535^\circ$ .



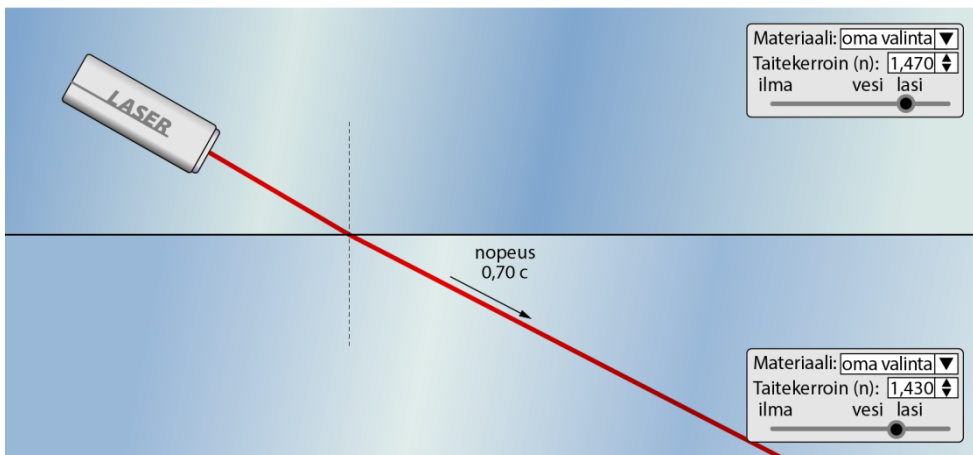
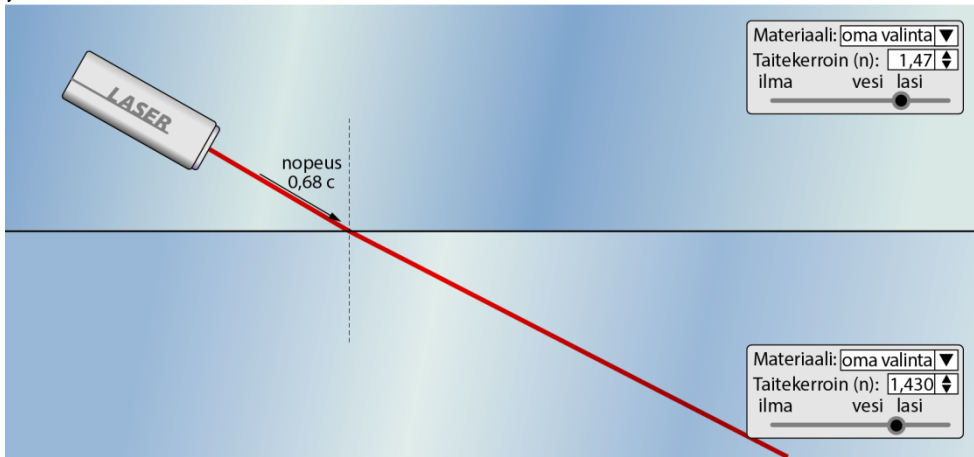
Koska ilmasta veteen tuleva valo taittuu pinnan normaalin suuntaan, tulee kaikki vedenpinnan yläpuolinen valo sukeltajaa kohti ympyränmuotoisesta alueesta hänen yläpuolellaan. Tämän alueen reunat vastaavat sitä valoa, joka tulee veden pinnan suunnasta. Koska valo kulkee ilmasta veteen ja vedestä ilmaan samaa reittiä, vastaa valoisan alueen reunat kokonaisheijastumisen rajakulmaa  $\alpha_r$ , kuten piirroksessa on esitetty. Kun sukeltajan etäisyys  $h$  vedenpinnasta on 3,0 m, saadaan suorakulmaisesta kolmiosta yhtälö  $\tan 48,7535^\circ = \frac{r}{3,0 \text{ m}}$ , jossa  $r$  on valoisan alueen säde. Säteeksi saadaan  $r = 3,0 \text{ m} \cdot \tan 48,7535^\circ \approx 3,4 \text{ m}$ .

Sukeltaja näkee vedenpinnan yläpuolisen maiseman 3,4 m:n säteisenä, ympyrän muotoisena valoisana alueena yläpuolellaan. Ympärillä oleva tummempi alue on veden pinnasta heijastunutta järven pohjan suunnasta peräisin olevaa valoa.

2-16. a) Kokonaisheijastuminen tapahtuu, kun tulokulma on vähintään  $77^\circ$ .



ja muovissa  $0,70c = 0,70 \cdot 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 2,1 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .



## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**3-1.** Oikeita väitteitä ovat a ja c.

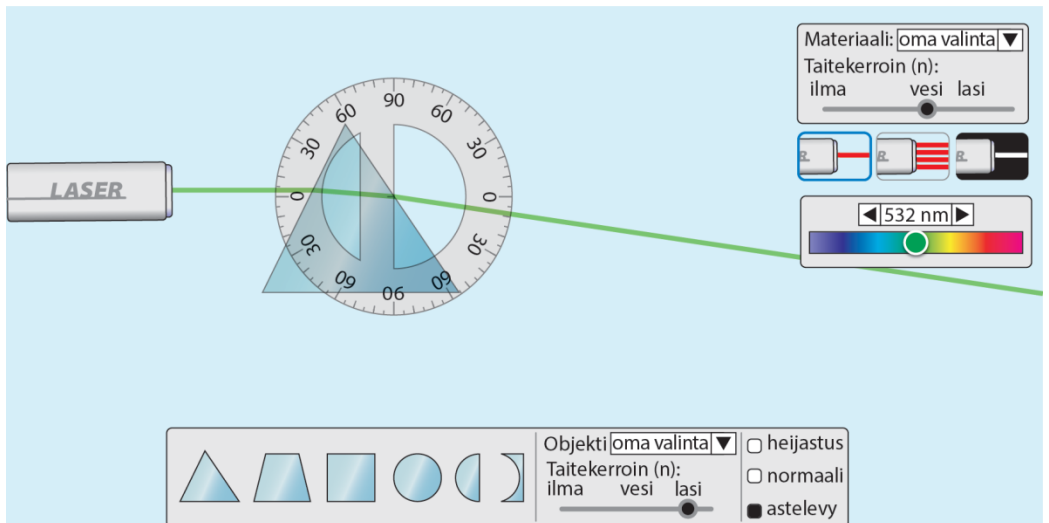
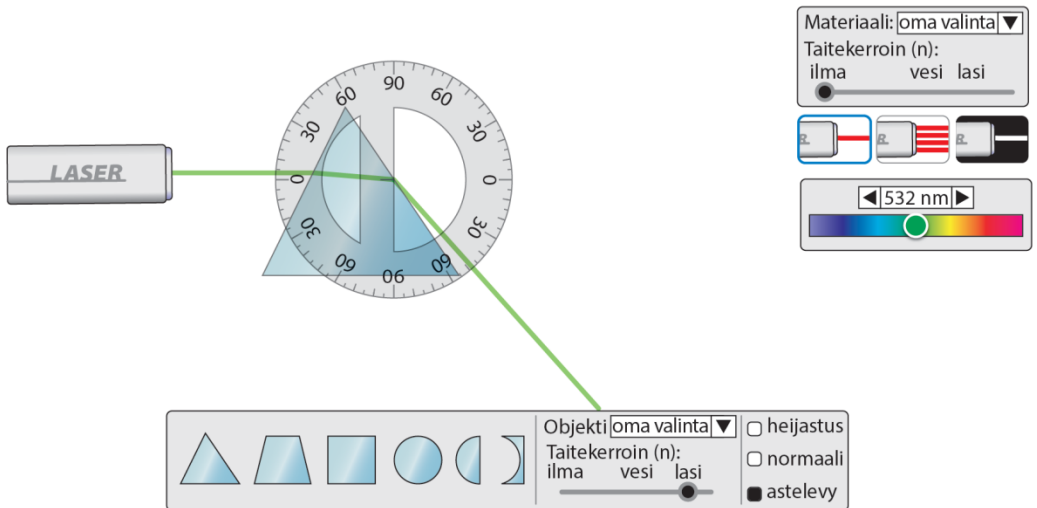
**3-2.** Kappaleen näkyminen johtuu siitä, että kappale heijastaa valoa. Väri aiheutuu kappaleen pinnassa tapahtuvan valon absorptioon ja heijastumisen keskinäisestä suhteesta. Jos kappale absorboi valkoisesta valosta vihreän aallonpituuden, kappale nähdään punaisena. Silmä näkee jäljelle jääneen valon aallonpituudet (spektrin) ja tulkitsee sen punaiseksi. Kappaleesta heijastuneet valkoisen valon aallonpituudet määräävät kappaleen värin.

**a)** Jos aine imee lähes kaiken siihen osuvan valon, se ei heijasta valoa kovin paljon ja se näyttää tummalta. Silmä erottaa värit vain, jos valon intensiteetti on tarpeeksi suuri.

**b)** Aine, joka heijastaa lähes kaiken siihen osuvan valon, heijastaa kaikkia valon sisältämiä aallonpituuksia. Absorptio on vähäistä. Silloin aineen pinta näyttää valkoisessa valossa, esimerkiksi auringonvalossa, valkoiselta.

**c)** Punaiset kengät näyttävät sinisessä valossa mustilta. Punainen pinta absorboi tehokkaasti sinisiä aallonpituuksia, ja sen takia punainen kenkä ei heijasta sinisessä valaistuksessa valoa lainkaan eli on musta.

**3-3.** PhET-simulaattorin Taittuva valo mukaan tulevan ja poistuvan lasersäteiden välinen kulma on **a)**  $50^\circ$  **b)**  $11^\circ$ .

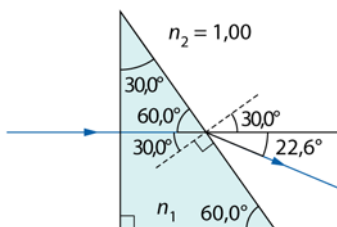


- 3-4. Piirroksesta nähdään, että valon tulokulma  $\alpha_1$  prisman takareunaan on  $30,0^\circ$ ; säteen tulosuunnan ja kolmion vinon sivun normaalin välinen kulma on sama kuin kolmion kärkikulma, koska kulmien sivut ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Taitekulma  $\alpha_2$  on piirroksen perusteella  $\alpha_2 = 30,0^\circ + 22,6^\circ = 52,6^\circ$ . Ilman taitekerroin on  $n_2 = 1,00$ . Taantumislaita

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_{\text{ilma}}}{n_{\text{lasi}}}$$

saadaan silloin prisman taitekertoimelle yhtälö

$$n_{\text{lasi}} = n_{\text{ilma}} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = 1,00 \cdot \frac{\sin 52,6^\circ}{\sin 30,0^\circ} \approx 1,59.$$



- 3-5. Valon taantumislaita  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$  saadaan

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_{2,\text{punainen}}} \sin \alpha_1 = \frac{1,00}{1,455} \cdot \sin 25,0^\circ, \text{ josta saadaan kulmalle arvo}$$

$$\alpha_2 \approx 16,8855^\circ.$$

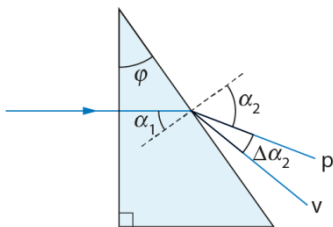
$$\text{Vastaavasti } \sin \alpha_2' = \frac{n_1}{n_{2,\text{violetti}}} \sin \alpha_1 = \frac{1,00}{1,470} \cdot \sin 25,0^\circ, \text{ josta saadaan kulmalle}$$

$$\text{arvo } \alpha_2' \approx 16,7081^\circ.$$

$$\text{Kulmien ero on } 16,8855^\circ - 16,7081^\circ \approx 0,18^\circ.$$

- 3-6.** RGB viittaa pääväriin punainen (R, red), vihreä (G, green) ja sininen (B, blue), joista kaikki muut värit saadaan additiivisesti eli yhdistämällä. CMYK viittaa väripainatuksessa käytettyihin väriin syaani (sinivihreä, C, cyan), aniliinin punainen eli magenta (M), keltainen (Y, yellow) ja musta (”avainväri”, K, key). Nämä värit toisiinsa sekoitettuna muodostavat eri värit subtraktiivisesti.
- 3-7.** Kuvapisteellä on 256 erilaista kirkkaustasoa kutakin kolmea osaväriä kohti. Kun värien kirkkaussuhteet muuttuvat, muuttuu kuvapisteen väri. Erilaisia värejä saadaan silloin  $256 \times 256 \times 256 = 16\,777\,216$  kappaletta.
- 3-8.** Koska valonsäde tulee kohtisuorasti prisman ensimmäiseen rajapintaan, se menee läpi taittumatta. Toisessa rajapinnassa valonsäde taittuu. Valonsäteen tulokulma rajapintaan on  $\alpha_1 = \varphi = 34,0^\circ$ , koska kulmat  $\varphi$  ja  $\alpha_1$  ovat samankohtaisia kulmia eli kulmien samannimiset kyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Kuvaajasta saadaan piilasin taitekertoimeksi punaiselle valolle  
 $n_{\text{lasi, punainen}} = 1,661$ .



Taittumislain mukaan on  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_{\text{ilma}}}{n_{\text{lasi}}}$ , josta saadaan

$$\sin \alpha_{2,\text{punainen}} = \frac{n_{\text{lasi, punainen}} \sin \alpha_1}{n_{\text{ilma}}} = \frac{1,661 \cdot \sin 34,0^\circ}{1,00},$$

jolloin punaisen valon taitekulma on  $\alpha_{2,\text{punainen}} = 68,2515^\circ$ .

Violetille valolle saadaan kuvaajasta  $n_{\text{lasi, violetti}} = 1,702$  ja vastaavasti

$$\sin \alpha_{2,\text{violetti}} = \frac{n_{\text{lasi, violetti}} \sin \alpha_1}{n_{\text{ilma}}} = \frac{1,702 \cdot \sin 34,0^\circ}{1,00}, \text{ jolloin taitekulma on}$$

$$\alpha_{2,\text{violetti}} = 72,1283^\circ.$$

Taittuneiden säteiden välinen kulma on  $\Delta\alpha_2 = 72,1283^\circ - 68,2515^\circ \approx 3,9^\circ$ .

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 4-1.** Youngin koe on sekä diffraktiokoe että interferenssikoe. Hilassa tapahtuu valon taipuminen eli diffraktio. Huygensin aaltoteorian mukaan raot toimivat palloaaltojen keskuksina, jonka takia valoa leviää rakojen takana myös sivusuuntiin. Valkokankaalla nähdään valoisien pisteiden alueet ja niiden välissä tummat alueet. Valoisat pisteet muodostuvat valon interferenssin seurauksena, kun eri raoista lähteneet aallot kohtaavat valkokankaan niissä kohdissa samenvaiheisina. Tumma alue muodostuu, kun aallot kohtaavat vastakkaisvaiheisina.
- 4-2.** a) Kapeita rakoja voidaan pitää pistemäisinä valolähteinä, joista valo leviää rakolevyn takana diffraktion takia kaikkiin suuntiin. Kahden raon ollessa auki, eri raoista lähteneet aallot interferoivat, jolloin syntyy kuvan kaltainen interferenssikuvio. Kun toinen raoista suljetaan, interferenssiä ei tapahdu ja varjostinta valaisee vain yksi valopiste. Silloin varjostin on kauttaaltaan valaistu, valaistusvoimakkuuden pienentyessä reunoja kohti, koska etäisyys valolähteeseen kasvaa.
- b) Vedessä valo etenee hitaammin kuin ilmassa. Koska valon taajuus pysyy muuttumattomana, vedessä valon aallonpituus on yhtälön  $c = f\lambda$  perusteella pienempi kuin ilmassa. Interferenssiehdon  $d \sin \alpha = k\lambda$  perusteella kulma  $\alpha$  on siten myös pienempi vedessä kuin ilmassa eli valoisat raidat ovat vedessä suoritettussa kokeessa lähempänä toisiaan kuin ilmassa suoritettussa kokeessa.
- 4-3.** a) Prismassa valon hajaantuminen väreihin johtuu valon taantumuksesta, hilassa valon taipumisesta. Prismän lasin taitekerroin riippuu valon aallonpituudesta, joka on erivärisillä valoilla erilainen. Hilassa intensiteettimaksimit syntyvät kohtiin, joissa interferoivat aallot vahvistavat toisiaan, ja tämä tapahtuu eri väreille eri kohdissa varjostinta niiden erilaisten aallonpituuksien takia.



b) Prismassa taittuu vähiten valon punainen osa. Sen aallonpituus lasissa on suurin, joten yhtälön  $c = f\lambda$  perusteella sen nopeus niin ikään suurin.

Taittumislain  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$  perusteella punaisen valon taitekulma (valon kulkusuunnan ja rajapinnan normaalin välinen kulma)  $\alpha_2$  on suurempi kuin muunväristen valojen taitekulmat eli punainen valo taittuu rajapinnassa vähiten.

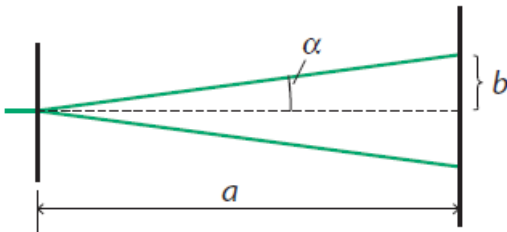
c) Hilassa taipuu eniten valon punainen osa. Hilayhtälön  $d \sin \alpha = k\lambda$  perusteella taipumiskulma  $\alpha$  on suurin punaiselle valolle, koska punaisen valon aallonpituus on suurin.

4-4. Ensimmäisten valoisien viivojen etäisyys keskikohdasta on

$$b = \frac{7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2} = 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Valon taipumiskulma  $\alpha$  saadaan yhtälöstä  $\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{4,0 \text{ m}}$ , josta seuraa kulman arvoksi  $\alpha = 0,0537148^\circ$ . Yhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  saadaan aallonpituudeksi

$$\lambda = \frac{d \sin \alpha}{k} = \frac{0,60 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \sin 0,0537148^\circ}{1} \approx 560 \text{ nm}.$$



- 4-5. a) Hilan hilavakio saadaan hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  :

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \alpha} = \frac{2 \cdot 600 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{\sin 26,0^\circ} = 2,737 \ 41 \cdot 10^{-6} \text{ m} \approx 2,74 \mu\text{m} .$$

- b) Lasketaan kolmannen kertaluvun ( $k = 3$ ) taipumiskulma. Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  seuraa yhtälö

$$\sin \alpha = \frac{k\lambda}{d} = \frac{3 \cdot 600 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2,737 \ 41 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 0,657 \ 556 , \text{ josta tulee kulmalle arvo}$$

$$\alpha \approx 41,1^\circ .$$

- 4-6. Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  seuraa  $d = \frac{k\lambda}{\sin \alpha}$ . Kun hilavakio (rakojen välimatka)  $d$  suurenee eli rakojen tiheys hilassa pienenee,  $\sin \alpha$  pienenee eli kulma  $\alpha$  pienenee. Tämä tarkoittaa, että intensiteettimaksimit tulevat lähemmäs keskikohtaa eli diffraktiokuvio kapenee. Kun hilavakio pienenee eli rakojen tiheys hilassa kasvaa, käy päinvastoin eli intensiteettimaksimien etäisyys keskikohdasta kasvaa eli diffraktiokuvio levenee.

- 4-7. Hilan hilavakio on  $d = \frac{1 \text{ mm}}{400} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{400} = 2,50 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . Taipumiskulma saadaan hilayhtälöstä  $\sin \alpha = \frac{k\lambda}{d} = \frac{1 \cdot 589 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2,50 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 0,2356$ . Kulman arvoksi saadaan  $\alpha = 13,6270^\circ$ .

Ensimmäisen kertaluvun valoisan viivan etäisyys  $b$  keskustasta saadaan yhtälöstä

$$\tan 13,6370^\circ = \frac{b}{2,00 \text{ m}} \text{ eli } b = 2,00 \text{ m} \cdot \tan 13,6370^\circ \approx 48,5 \text{ cm} .$$

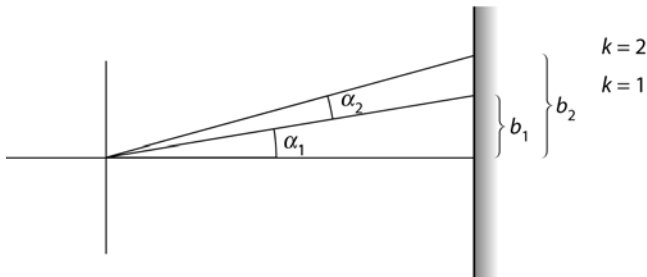
4-8. Hilan hilavakio on  $d = \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{550} = 1,818 \text{ } 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . Hilayhtälöstä

$$d \sin \alpha = k\lambda \text{ saadaan yhtälö } \sin \alpha = \frac{k\lambda}{d}.$$

Ensimmäisen intensiteettimaksimin tapauksessa on

$$\sin \alpha_1 = \frac{k\lambda}{d} = \frac{1 \cdot 590 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{1,818 \text{ } 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 0,324500,$$

josta saadaan taipumiskulmalle arvo  $\alpha_1 = 18,9353^\circ$ . Etäisyys keksikohdasta on  $b_1 = 5,0 \text{ m} \cdot \tan 18,9353^\circ = 1,715 \text{ } 32 \text{ m}$ .



Toisen intensiteettimaksimin tapauksessa on

$$\sin \alpha_2 = \frac{k\lambda}{d} = \frac{2 \cdot 590 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{1,818 \text{ } 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 0,649001, \text{ josta saadaan kulmalle arvo}$$

$$\alpha_2 = 40,4663^\circ$$

Etäisyys keksikohdasta on  $b_2 = 5,0 \text{ m} \cdot \tan 40,4663^\circ = 4,265 \text{ } 32 \text{ m}$ .

Intensiteettimaksimien etäisyys on

$$\Delta b = b_2 - b_1 = 4,265 \text{ } 32 \text{ m} - 1,715 \text{ } 32 \text{ m} \approx 2,6 \text{ m}.$$

- 4-9.** Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  saadaan ehto  $\sin \alpha = \frac{k\lambda}{d} \leq 1$ , koska sinifunktion suurin arvo on 1.

Yhtälöstä  $\frac{k\lambda}{d} \leq 1$  saadaan ehto intensiteettimaksimien lukumäärälle:

$$k \leq \frac{d}{\lambda} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{633 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 4,6.$$

Näin ollen  $k$  voi saada arvot 0, 1, 2, 3 ja 4. Intensiteettimaksimit muodostuvat keskelle ja kummallekin puolelle eli maksimeita on yhteensä 9.

- 4-10.** Newtonin renkaat ovat kehämäisiä kuvioita, jotka syntyvät, kun tasaisen lasilevyn päälle asetetaan lievästi kupera lasilevy kuperapuoli tasaiseen lasilevyyn päin. Koska valoa heijastavien kuperan lasin alapinnan ja tasaisen lasilevyn pinnan välimatka on eri kohdissa erilainen, syntyy heijastuneiden säteiden interferenssin tuloksena eri kohtiin eriväriset renkaat.

- 4-11.** Riikinkukon sulkien värikkyyys perustuu sulkien pintarakenteeseen. Pintarakenteessa on useita mikroskooppisen ohuita kerroksia, joista heijastuneet aallot interferoivat keskenään. Katselukulmasta riippuu, mitkä aallonpituudet kussakin kohtaa interferoivat vahvistavasti tuoden vastaavan värin esille voimakkaana.

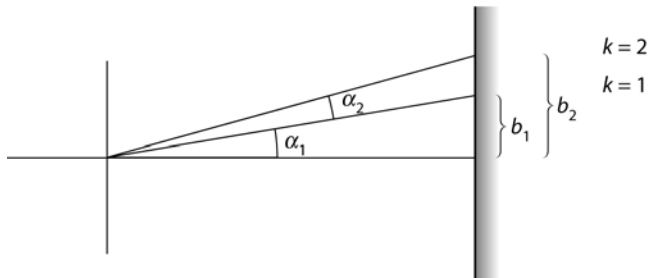
- 4-12.** Hilayhtälön  $d \sin \alpha = k\lambda$  mukaan pienin taipumiskulma vastaa pienintä  $k$ :n arvoa eli  $k = 1$ . Hilan hilavakioksi eli hilarakojen etäisyydeksi

$$\text{toisistaan saadaan } d = \frac{k\lambda}{\sin \alpha} = \frac{1 \cdot 405 \text{ nm}}{\sin 38,5^\circ} = 6,50587 \cdot 10^{-4} \text{ mm}.$$

Rakojen lukumäärä millimetrillä on  $\frac{1 \text{ mm}}{6,50587 \cdot 10^{-4} \text{ mm}} \approx 1540$ .

**4-13.** Lasketaan taipumiskulmat ja niitä vastaavat valoisien pisteiden etäisyydet diffraktiokuvion keskikohdasta.

Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k \lambda$  saadaan  $\sin \alpha = \frac{k \lambda}{d}$ .



Kun aallonpituus on  $\lambda = 480 \text{ nm}$  ja  $k = 4$ , saadaan  $\sin \alpha_1 = \frac{4 \cdot 480 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{0,50 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$   
ja kulma on  $\alpha_1 = 0,220 \text{ } 016^\circ$ .

Yhtälöstä  $\tan 0,220 \text{ } 016^\circ = \frac{b_1}{1,0 \text{ m}}$  saadaan valoisian viivan etäisyydeksi keskikohdasta  $b_1 = 3,84002 \text{ mm}$ .

Kun aallonpituus on  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , saadaan  $\sin \alpha_2 = \frac{4 \cdot 600 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{0,50 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$  ja

kulma on  $\alpha_2 = 0,275 \text{ } 021^\circ$ . Tällöin yhtälöstä  $\tan 0,275 \text{ } 021^\circ = \frac{b_2}{1,0 \text{ m}}$   
saadaan valoisian viivan etäisyydeksi keskikohdasta  $b_2 = 4,80006 \text{ mm}$ .

Viivojen välinen etäisyys on

$$\Delta b = b_2 - b_1 = 4,80006 \text{ mm} - 3,84002 \text{ mm} \approx 0,96 \text{ mm}.$$

- 4-14.** Olkoon asetonikerroksen paksuus  $d$ . Koska asetonin taitekerroin on 1,25, valon aallonpituus  $\lambda_1 = 600,0 \text{ nm}$  vastaa asetonissa aallonpituutta

$$\lambda_{a1} = \frac{\lambda_1}{n} = \frac{600,0 \text{ nm}}{1,25} = 480 \text{ nm ja}$$

aallonpituus  $\lambda_2 = 700,0 \text{ nm}$  vastaa aallonpituutta

$$\lambda_{a2} = \frac{\lambda_2}{n} = \frac{700,0 \text{ nm}}{1,25} = 560 \text{ nm.}$$

Koska kalvo ei heijasta valoa, on tulevan ja heijastuneen säteen välinen vaihe-ero sellainen, että säteet sammuttavat toisensa. Tämä tapahtuu, kun aaltojen välillä on puolen aallonpituuden ero eli asetonikerroksen alapinnasta heijastuneen aallon kulkema ylimääräinen matka  $2d$  on kokonainen määrä aallonpituuksia plus yksi puolიაallonpituus:

$$2d = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda_{a1}.$$

Kun havaitaan intensiteettimaksimi, vaihe-eroa ei ole ja säteet vahvistavat toisiaan eli  $2d = k\lambda_{a2}$ .

Yhdistämällä nämä yhtälöt saadaan

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda_{a1} = k\lambda_{a2}, \text{ josta } k = \frac{-\frac{1}{2}\lambda_{a1}}{\lambda_{a1} - \lambda_{a2}} = \frac{-0,5 \cdot 480 \text{ nm}}{480 \text{ nm} - 560 \text{ nm}} = 3.$$

Näin ollen ehdosta  $2d = k\lambda_{a2}$  asetonikerroksen paksuudeksi saadaan

$$d = \frac{3\lambda_{a2}}{2} = \frac{3 \cdot 560 \text{ nm}}{2} = 840 \text{ nm.}$$

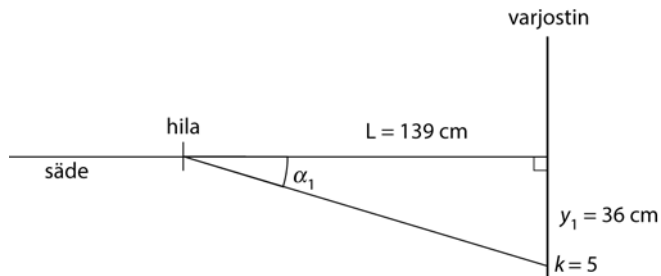
4-15. Hilayhtälö  $d \sin \alpha = k \lambda$  saadaan muotoon  $\sin \alpha = \frac{k \lambda}{d}$ .

Aallonpituudelle 400 nm on  $\sin \alpha_1 = \frac{1 \cdot 400 \text{ nm}}{\frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{500}}$ , josta saadaan  $\alpha_1 \approx 12^\circ$ .

Aallonpituudelle 750 nm on  $\sin \alpha_2 = \frac{1 \cdot 750 \text{ nm}}{\frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{500}}$ , josta saadaan  $\alpha_2 \approx 22^\circ$ .

Spektri näkyy kulmien  $12^\circ$  ja  $22^\circ$  välillä.

4-16. a) Tehtävän kuvasta havaitaan, että viidennen kertaluvun valoisa piste on punaisen laserin tapauksessa  $41 \text{ cm} - 5,0 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$  etäisyydellä keskusmaksimista.



Punaisen valon taipumiskulma saadaan yhtälöstä  $\tan \alpha = \frac{36 \text{ cm}}{139 \text{ cm}}$ .

Taipumiskulma on  $\alpha = 14,5201^\circ$ . Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k \lambda$  saadaan

hilavakioksi  $d = \frac{k \lambda}{\sin \alpha} = \frac{5 \cdot 632,8 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{\sin 14,5201^\circ} = 1,261 \, 97 \cdot 10^{-5} \text{ m} \approx 13 \, \mu\text{m}$ .

b) Keltaiselle valolle vastaava viidennen kertaluvun valopisteen etäisyys diffraktiokuvion keskikohdasta (keskusmaksimista) on 33,8 cm.

Keltaisen valon taipumiskulma saadaan yhtälöstä  $\tan \alpha_2 = \frac{33,8 \text{ cm}}{139 \text{ cm}}$ .

Taipumiskulma on  $\alpha_2 = 13,6671^\circ$ . Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  saadaan keltaisen valon aallonpituudeksi

$$\lambda = \frac{d \sin \alpha}{k} = \frac{1,26197 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \sin 13,6671^\circ}{5} \approx 600 \text{ nm}.$$

**4-17.** Lasketaan valon aallonpituudet aaltoliikkeen perusyhtälöstä  $c = f\lambda$ :

$$f_1 = 430 \text{ THz}: \lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{430 \cdot 10^{12} \text{ 1/s}} \approx 6,97191 \cdot 10^{-7} \text{ m ja}$$

$$f_2 = 750 \text{ THz}: \lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{750 \cdot 10^{12} \text{ 1/s}} \approx 3,99723 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Kertaluku on  $k = 1$  ja aallonpituus  $\lambda_1 = 6,97191 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ :

Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  saadaan kertaluvun  $k = 1$  intensiteettimaksimille yhtälö

$$\sin \alpha_1 = \frac{k\lambda_1}{d} = \frac{1 \cdot 6,97191 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{1,74 \cdot 10^{-6} \text{ m}}, \text{ josta tulee kulmalle arvo } \alpha_1 = 23,6210^\circ.$$

Tämän intensiteettimaksimin etäisyys varjostimella keskimmäisestä nollannen kertaluvun intensiteettimaksimista on

$$h_1 = a \tan \alpha_1 = 1,2 \text{ m} \cdot \tan 23,6210^\circ \approx 53 \text{ cm}.$$

Kertaluku  $k = 1$  ja aallonpituus  $\lambda_2 = 3,99723 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ :



Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  saadaan kertaluvun  $k = 1$  intensiteettimaksimille yhtälö

$$\sin \alpha_2 = \frac{k\lambda_2}{d} = \frac{1 \cdot 3,997\ 23 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{1,74 \cdot 10^{-6} \text{ m}}, \text{ josta } \alpha_2 = 13,2809^\circ.$$

Tämän intensiteettimaksimin etäisyys varjostimella keskimmäisestä nollannen kertaluvun intensiteettimaksimista on  
 $h_2 = a \tan \alpha_2 = 1,2 \text{ m} \cdot \tan 13,2809^\circ \approx 28 \text{ cm}.$

Kertaluvun 1 spektri tulee näkyviin välille 28...53 cm.

Kertaluku  $k = 2$  ja aallonpituus  $\lambda_1 = 6,97191 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ :

Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  saadaan kertaluvun  $k = 2$  intensiteettimaksimille yhtälö

$$\sin \alpha_1 = \frac{k\lambda_1}{d} = \frac{2 \cdot 6,971\ 91 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{1,74 \cdot 10^{-6} \text{ m}}, \text{ josta saadaan taipumiskulmaksi}$$
$$\alpha_1 = 53,2611^\circ$$

Tämän intensiteettimaksimin etäisyys varjostimella keskimmäisestä nollannen kertaluvun intensiteettimaksimista on  
 $h_1 = a \tan \alpha_1 = 1,2 \text{ m} \cdot \tan 53,2611^\circ \approx 160 \text{ cm}.$

Kertaluku  $k = 2$  ja aallonpituus  $\lambda_2 = 3,99723 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ :

Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  saadaan kertaluvun  $k = 2$  intensiteettimaksimille yhtälö

$$\sin \alpha_2 = \frac{k\lambda_2}{d} = \frac{2 \cdot 3,997\,23 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{1,74 \cdot 10^{-6} \text{ m}}, \text{ josta } \alpha_2 = 27,3517^\circ.$$

Tämän intensiteettimaksimin etäisyys varjostimella keskimmäisestä nollannen kertaluvun intensiteettimaksimista on

$$h_2 = a \tan \alpha_2 = 1,2 \text{ m} \cdot \tan 27,3517^\circ \approx 62 \text{ cm}.$$

Kertaluvun 2 spektri tulee välille 62...160 cm.

Kertaluku  $k = 3$  ja aallonpituus  $\lambda_1 = 6,97191 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ :

Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  saadaan kertaluvun  $k = 3$  intensiteettimaksimille yhtälö

$$\sin \alpha_3 = \frac{k\lambda_1}{d} = \frac{3 \cdot 6,97191 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{1,74 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 1,202\,06. \text{ Koska sinin arvo ei voi olla}$$

suurempi kuin 1, tilanne ei voi toteutua eli nämä intensiteettimaksimit eivät synny varjostimelle.

Kertaluku  $k = 3$  ja aallonpituus  $\lambda_2 = 3,997\,23 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ :

Hilayhtälöstä  $d \sin \alpha = k\lambda$  saadaan kertaluvun  $k = 3$  intensiteettimaksimille yhtälö

$$\sin \alpha_3 = \frac{k\lambda_1}{d} = \frac{3 \cdot 3,99723 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{1,74 \cdot 10^{-6} \text{ m}}, \text{ josta kulma } \alpha_3 = 43,5650^\circ.$$

Tämän intensiteettimaksimin etäisyys varjostimella keskimmäisestä nollannen kertaluvun intensiteettimaksimista on

$$h_3 = a \tan \alpha_3 = 1,2 \text{ m} \cdot \tan 43,5650^\circ \approx 1,1 \text{ m} .$$

Kertaluvun 3 spektri alkaa varjostimella kohdasta 1,1 m mutta ei näy kokonaan.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 5-1.** a) Löytöretkien aikaan laivan paikka määritettiin avomerellä suunnan, matka-ajan, nopeuden ja tunnetun lähtöpisteen avulla. Menetelmästä käytettiin nimeä merkintälasku. Kompassi tarkensi suunnan määrittystä verrattuna Auringosta tai tähdistä määritettyyn suuntaan ja mahdollisti sen myös huonolla säällä.
- b) Magneetti tarttuu esimerkiksi nikkeliin ja kobolttiin.
- c) Magneetin avulla voisi löytää malmeja, joissa on rautaa, nikkeliä tai kobolttia.
- 5-2.** Toinen magneeteista leijuu toisen magneettikentässä, koska magneettien samannimiset päät hylkivät toisiaan. Magneetti asettuu kohtaan, jossa ylös suuntautuva magneettinen hylkivä voima ja alas suuntautuva paino ovat yhtä suuret.
- 5-3.** Kestomagneetti vuorovaikuttaa kestopagneettien ja magnetoituvasta aineesta valmistettujen kappaleiden kuten raudan kanssa.
- 5-4.** a) Magnetointi tarkoittaa magnetoituvan aineen tekemistä magneettiseksi.
- b) Rautanaulan voi magnetoida, koska rauta on magnetoituva aine.
- c) Ohut rautanaula muuttuu magneettiseksi, kun sitä sivellään kestopagneetilla useita kertoja samansuuntaisin vedoin. Sivelyjä joutuu tekemään sitä enemmän, mitä paksumpi rautanaula on.

d) Magneettisuus voidaan poistaa rautanaulasta esimerkiksi kuumentamalla tai sopivasti lyömällä. Pudotus voi myös aiheuttaa magneettisuuden heikkenemisen.

e) Kuparia ei voi magnetoida, koska kupari ei ole magnetoituva aine.

f) Kestomagneetin magneettisuuden voi poistaa esimerkiksi takomalla, kuumentamalla aine Curie-lämpötilaan tai viemällä magneetti pitkäksi ajaksi vaihtovirtaan kytketyn käämin sisään.

**5-5.** a) Kestomagneetin magneettisuus säilyy vuosia, mutta sähkömagneetin magneettisuus voidaan kytkeä päälle ja pois päältä tarpeen mukaan.

b) Sähkömagneetti koostuu virtapiiristä, jossa on tasajännitelähde, käämi ja käämillä rautasydän. Kun sähkömagneettiin kytketään sähkövirta, sähkömagneetin ympärille muodostuu magneettikenttä, joka saa rautaromun tarttumaan magneettiin. Kenttä on voimakkain käämin päissä. Kun sähkövirta katkaistaan, magneettikenttää ei ole, jolloin rautaromu irtoaa magneetista.

c) Sähkömagneetteja käytetään mm. nostureissa, kaiuttimissa, mikrofoneissa ja ovien sähkölukoissa.

d) Nosturilla voidaan nostaa vain sellaisia kappaleita, joissa on rautaa.

**5-6.** a) Oikein.

b) Väärin. Magneetti on dipoli, eli sillä on aina kaksi kohtiota: kohtioita ei voi erottaa toisistaan, koska magneettisuus on peräisin aineen mikrorakenteesta.

c) Oikein.

d) Väärin. Magnetoituvia metalleja ovat rauta, koboltti ja nikkeli.

e) Oikein.

f) Oikein.

**5-7.** a) Permeabiliteetti kuvaa, sitä missä määrin aine magnetisoituu, kun se on magneettikentässä.

b) Ferromagneettinen aine sisältää alkeismagneettien muodostamia alkeisalueita, jotka voivat kääntyä ulkoisen kentän suuntaisiksi. Eräiden ferromagneettisten aineiden alkeisalueiden magnetoitumissuunnat muuttuvat helposti. Tällaiset aineet ovat herkästi magnetoituvia, mutta niiden magneettisuus myös häviää nopeasti, kun ulkoinen magneettikenttä poistuu ja alkeisalueiden suunnat sekoittuvat uudelleen. Näin käyttäytyviä aineita kutsutaan magneettisesti pehmeiksi aineiksi. Monissa laitteissa, kuten sähkölukoissa ja erilaisissa releissä, sähkömagneettien sydämet on tehty magneettisesti pehmeistä aineista. Sähkömagneetissa sydäntä ympäröivään käämiin kytketään sähkövirta, jonka synnyttämä magneettikenttä magnetoi sydämen. Kun virta katkaistaan, magneettisuus häviää. Suuria sähkömagneetteja on esimerkiksi tehtaissa rautakappaleiden nostolaitteissa. Myös tietokoneiden kiintolevyjen lukupäät on tehty magneettisesti pehmeistä aineista.

*Lyhyesti:* Magneettisesti pehmeät aineet ovat helposti magnetoituvia, mutta niiden magneettisuus häviää helposti.

c) Magneettisesti kovien aineiden alkeisalueiden magnetoitumissuunnat säilyvät, ja ulkoisen kentän hävittyä aineet jäävät magneettisiksi. Sitä

magnetismia, joka jää jäljelle, sanotaan jäännösmagnetismiksi.

Kestomagneetin magnetismi on jäännösmagnetismia. Magneettisesti kovan aineen magneettisuuden poistamiseen tarvitaan voimakas vastakkaissuuntainen magneettikenttä. Magneettisesti kovista aineista saadaan hyviä kestopagneetteja. Magneettisesti kovia aineita käytetään mm. magneettisissa muisteissa. Pienet ulkoiset magneettikentät eivät pysty muuttamaan muisteja.

*Lyhyesti:* Magneettisesti kovien aineiden alkeisalueiden magnetoitumissuunnat säilyvät, ja ulkoisen kentän hävittyä aineet jäävät magneettisiksi.

**5-8.** a) Suprajohtavalla aineella on kaksi erikoisominaisuutta:

- sen resistanssi on nolla, ja
- Kun suprajohde asetetaan ulkoiseen magneettikenttään, se muodostaa pinnalleen syntyvien sähkövirtojen avulla magneettikentän, joka on peilikuva ulkoisesta magneettikentästä. Sen takia suprajohde hylkii lähelleen tuotua magneettia. Suprajohteen synnyttämä magneettikenttä ja ulkoinen magneettikenttä kumoavat toisensa suprajohteen sisällä, joten suprajohteen sisälle ei ole magneettikenttää. (Meissnerin ilmiö).

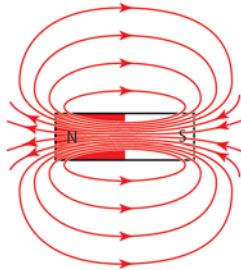
Jos magneetti asetetaan suprajohtavassa tilassa olevan johteen yläpuolelle, se jää siihen levitoimaan (leijumaan): syntyvä hylkimisvoima voi kumota gravitaatiovoiman. Näin ollen suprajohteet hylkivät magneetteja. Suprajohtavan tilan saavuttamiseksi aine on jäähdytettävä ns. kriittisen lämpötilan alapuolelle esimerkiksi upottamalla aine nestemäiseen tyypeen. Kun suprajohde poistetaan nestemäisestä tyypestä, sen lämpötila kohoaa ja suprajohtavat ominaisuudet alkavat hävitä. Tällä hetkellä ei tunneta ainetta, joka olisi suprajohtava huoneenlämpötilassa.

**b)** Suprajohtavan materiaalin, suprajohteen, resistanssi on (lähes) nolla ja näin ollen tehohäviöt johtimessa ovat hyvin pienet. Käämissä kulkeva sähkövirta on tällöin suuri, esim. 700 A ja sen aiheuttaman magneettikentän magneettivuon tiheys suuri esim. 1,5 T (noin 30 000 kertaa Maan magneettikentän voimakkuus).

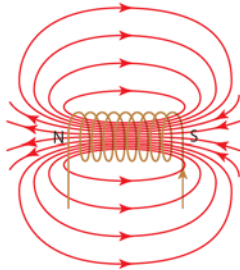


## TEHTÄVIEN RATKAISUT

6-1. a)



b)



6-2. Kun johtimessa kulkee sähkövirta, kompassin neula kääntyy johtimeen nähden. Kompassineula reagoi ulkoiseen magneettikenttään. Kun johtimessa kulkee sähkövirta, johtimen ympärille syntyy magneettikenttä ja tähän kenttään kompassineula reagoi.

6-3. a) Tilanteessa a) sähkövirran suunta oikean käden säännön perusteella on virtajohtimessa alas ja tilanteessa b) ylös. Sähkövirran suunta tilanteessa c) on oikean käden säännön mukaan johtimen suoralla osalla ylös ja lenkissä vastapäiväiseen suuntaan.

b) Johtimessa a) kulkevan sähkövirran suuruus on suurempi, koska magneettikentän kenttäviivat ovat tiheämmässä johtimen a) ympärillä kuin johtimen b) ympärillä.

c) Kytkenneen perusteella voi päätellä, että ensimmäisessä tilanteessa käämissä sähkövirta kulkee vastapäivään, joten oikeankäden säännön perusteella käämin oikeassa päässä on N-kohtio ja vasemmassa S-kohtio.

Huomaa, että käämin päähän on merkitty käämin käämityssuunta.

Toisessa tilanteessa käämin sähkövirta kulkee myötäpäivään, joten oikeankäden säännön perusteella käämin vasemmassa päässä on N-kohtio ja oikeassa S-kohtio.

Toinen tapa:

Ensimmäisessä tilanteessa kestopagneetin S-kohtio kääntyy kohti käämiä, joten käämin oikeassa päässä on N-kohtio ja vasemmassa S-kohtio. Toisessa tilanteessa kestopagneetin N-kohtio kääntyy kohti käämiä, joten käämin oikeassa päässä on S-kohtio ja vasemmassa N-kohtio.

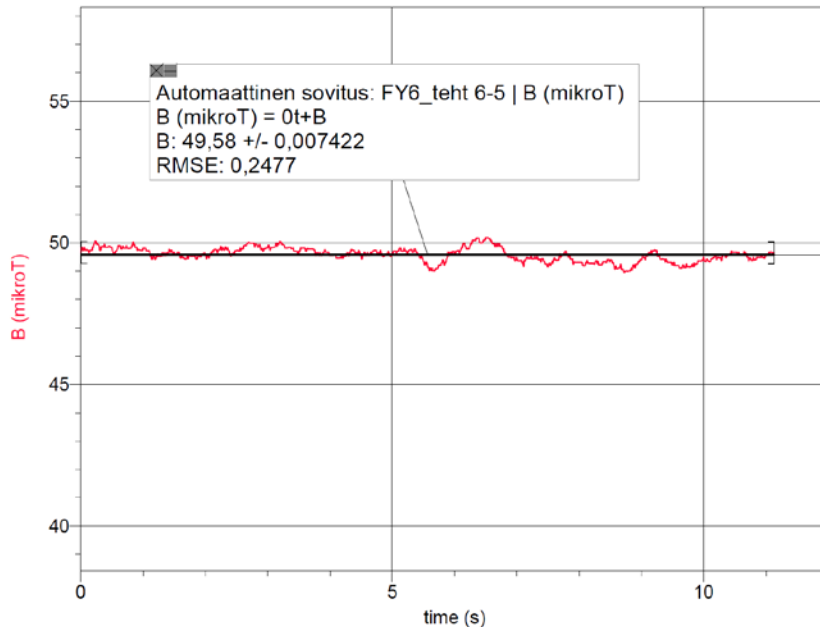
- 6-4.** a) Magneettivuon tiheys  $\bar{B}$  kuvaa magneettikentän voimakkuutta ja ilmoittaa magneettikentän suunnan, kun taas magneettikenttää vastaan kohtisuoran pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärää kuvaa magneettivuo.
- b) Magneettivuo on suurempi tilanteessa 2, koska kummankin silmukan kohdalla magneettivuon tiheyden  $B$  suuruus on yhtä suuri, mutta tilanteessa 2 silmukan pinta-ala on suurempi kuin pinta-ala tilanteessa 1 eli  $\Phi_2 > \Phi_1$ .
- 6-5.** a) Maapalloa ympäröi magneettikenttä, koska maapallon ytimen uloimpaan, nestemäiseen osaan syntyy pyörimisen ja kuumen kiinteän ytimen vaikutuksesta sähkövirtoja, jotka saavat aikaan magneettikentän.
- b) Deklinaatio on magneettineulan poikkeama pohjoissuunnasta. Inklinaatio on magneettineulan kallistuma vaakatasosta. Suomessa deklinaatio on 4–10 astetta itään ja inklinaatio 72–78 astetta.

Kuvaan merkitty kulma on inklinaatio.

Deklinaatio ja inklinaatio ovat myös tähtitieteessä käytettyjä termejä, jolloin ne eivät liity magnetismiin.

c) Selitys liittyy inklinaatioon. Maan magneettikenttä on vaakasuora vain päiväntasaajalla tai lähellä päiväntasaajaa. Muualla sillä on aina pystysuora komponentti, joka pyrkii vääntämään kompassin neulaa pystyasentoon. Tämä vääntö kumotaan kompassissa neulan painotuksella, jolloin neula asettuu kompassin sisällä likimain vaakasuoraan asentoon. Pohjoisella pallonpuoliskolla toimivissa kompassissa neulan eteläpää on painavampi ja eteläisellä pallonpuoliskolla toimivissa kompassissa päinvastoin. Väärän pallonpuoliskon kompassi ei toimi, koska neula on väärässä asennossa eikä pääse liikkumaan vapaasti.

d) Mittausalueella Maan magneettikentän voimakkuus on noin  $49,6 \mu\text{T}$ .



**6-6.** a) Maapallon sisäosien nestemäisten ainesosien sähkövirroissa tapahtuu muutoksia, joiden takia Maan magneettikentän napaisuus vaihtuu noin kerran miljoonassa vuodessa. Itse vaihdos kestää tuhansia vuosia, ja sen aikana Maan magneettiset kohtiot (navat) vaihtavat paikkaansa.

b) Koska karttaan on merkitty Maan magneettisen navan liikehdintää Pohjois-Kanadassa, kyseessä ei ole Maan magneettinen pohjoiskohtio, vaan Maan magneettinen eteläkohtio.

**6-7.** a) Magneettien välinen vuorovaikutus havaitaan niiden välisen voiman perusteella, samoin sähkövarausten välinen vuorovaikutus havaitaan niiden välisen voiman perusteella. Magneettien samannimiset kohtiot hylkivät toisiaan ja erinimiset kohtiot vetävät toisiaan puoleensa. Vastaavasti saman sähkövarauksen omaavat kappaleet hylkivät toisiaan, eri varauksen omaavat kappaleet vetävät toisiaan puoleensa.

Sähkövaraukset voivat olla positiivisia tai negatiivisia: ne voivat esiintyä toisistaan riippumatta ja erillään toisistaan. Sen sijaan magneetin napoja ei voi erottaa toisistaan. Magneetilla on aina sekä pohjoiskohtio ja eteläkohtio. Tämänhetkisen tietämyksen mukaan ei ole olemassa magneettisia monopoleja eli yksinapaisia magneettisia hiukkasia tai kappaleita.

b) Magneettikentän synnyttävät kestopagneetit, sähkömagneetit tai virtajohtimet, joissa kulkee sähkövirta. Sähkövaraukset synnyttävät sähkökentän. Magneettikenttiä havainnollistetaan kenttäviivaesityksillä, joissa kenttäviivojen suunta kertoo kentän suunnan ja tiheys kentän voimakkuutta. Vastaavasti sähkökentän kuvaamiseen käytetään kenttäviivoja. Magneettikentän kenttäviivat ovat sulkeutuvia käyriä, toisin kuin sähkökentän kenttäviivat, ja niitä on sekä magneetin ulko- että sisäpuolella. Magneettikentän voimakkuutta kuvaava suure on magneettivuon tiheys  $\vec{B}$ . Se on vektorisuure kuten sähkökentän voimakkuus  $\vec{E}$ .

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**7-1.** a) Koska positiivisesti varattu hiukkanen liikkuu lännestä itään kohtisuorasti etelään osoittavaa magneettikenttää vastaan, oikean käden säännön perusteella voima vaikuttaa suoraan alas kohti maanpintaa.

b) Hiukkaseen vaikuttavan magneettisen voiman suuruus saadaan yhtälöstä  $F_m = qvB \sin\alpha$ , jossa  $\alpha$  on magneettikentän ja hiukkasen nopeuden välinen kulma. Koska magneettikentän suunta on pohjoisesta etelään ja hiukkanen liikkuu etelästä pohjoiseen, kulma  $\alpha = 180^\circ$  ja  $\sin 180^\circ = 0$ . Näin ollen magneettinen voima on nolla.

**7-2.** a) Oikean käden säännön perusteella hiukkasen 1 sähkövaraus on positiivinen.

Koska hiukkanen 2 etenee suoraviivaisesti magneettikentässä, se ei ole magneettisessa vuorovaikutuksessa kentän kanssa. Näin ollen hiukkasella 2 ei ole sähkövarausta.

Oikean käden kolmisormisäännön perusteella hiukkasen 3 sähkövaraus on negatiivinen.

b) i) Protonin varaus on positiivinen, joten oikean käden säännön perusteella protonin rata kaartuu liikesuunnassa oikealle eli kuvassa ylös.

ii) Elektronin varaus on negatiivinen, joten oikean käden säännön perusteella elektronin rata kaartuu liikesuunnassa vasemmalle eli kuvassa alas.

ii) Koska neutronilla ei ole sähkövarausta, neutroni liike jatkuu suoraviivaisesti eteenpäin.

**7-3. a)** Kun positiivisesti varattu hiukkanen tulee kohtisuorasti homogeeniseen sähkökenttään, siihen vaikuttaa koko ajan sähkökentän suuntainen voima: voiman suunta ei siis muutu. Sähköinen voima muuttaa hiukkasen radan suuntaa. Hiukkasen radan muoto sähkökentässä on paraabeli. Sähköinen voima tekee työtä vaikuttaessaan liikkuvaan varattuun hiukkaseen ja hiukkasen liike-energia kasvaa. Varattuun hiukkaseen vaikuttaa sähkökentässä aina sähköinen voima, myös hiukkasen ollessa paikallaan.

**b)** Kun varattu hiukkanen tulee kohtisuorasti homogeeniseen magneettikenttään, siihen vaikuttaa magneettinen voima. Hiukkasen rata kaartuu, koska voiman suunta muuttuu jatkuvasti. Voima on kohtisuorassa liikkeen suuntaa ja magneettivuon tiheyttä vastaan, joten magneettinen voima ei tee työtä ja hiukkasen ratanopeus ympyräradalla on vakio.

**7-4. a)** Protoniin kohdistuvan magneettisen voiman suuruus Maan magneettikentässä on

$$F_m = qvB = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,0 \text{ Mm/s} \cdot 50 \mu\text{T} \approx 8,0 \cdot 10^{-18} \text{ N}.$$

Protoniin kohdistuvan painon suuruus on

$$G = mg = 1,67262 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 1,6 \cdot 10^{-26} \text{ N}.$$

Magneettisen voiman suuruusluokka on  $10^{-18}$  N ja painon  $10^{-26}$  N.

Paino on merkityksetön Maan magneettikentän kohdistamaan voimaan verrattuna: magneettinen voima on noin 500 miljoonaa kertaa suurempi.

b) Voiman yksikkötarkastelu:

$$\begin{aligned} [F_m] &= [q][v][B] \\ &= 1\text{C} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\text{T} = 1\text{As} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 1\text{A} \cdot 1\frac{\text{Vs}}{\text{m}} \\ &= 1\text{A} \cdot 1\frac{\text{W}}{\text{A}} \cdot 1\frac{\text{s}}{\text{m}} = 1\frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 1\frac{\text{s}}{\text{m}} = 1\frac{\text{Nm}}{\text{s}} \cdot 1\frac{\text{s}}{\text{m}} = 1\text{N}. \end{aligned}$$

7-5. a) Koska protonin liikkeen suunta on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan, protoniin kohdistuvan magneettisen voiman suuruus on

$$F_m = qvB = 1,60218 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 1,5 \text{ Mm/s} \cdot 15 \text{ mT} \approx 3,6 \text{ fN}.$$

Voiman suunta on etelään.

b) Koska elektronin liikkeen suunta on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan, elektroniin kohdistuvan magneettisen voiman suuruus on

$$F_m = qvB = 1,60218 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 2,5 \text{ Mm/s} \cdot 5,5 \text{ mT} \approx 2,2 \text{ fN}.$$

Huomaa, että  $q$  on elektronin varauksen itseisarvo. Voiman suunta on kohti kuvan vasenta reunaa eli liikesuuntaan nähden oikealle.

7-6. Oletetaan, että elektroni liikkuu tyhjiössä.

Koska sähkökenttä on homogeeninen ja elektroniin vaikuttaa vain sähköinen voima, pätee  $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = qU$ .

Koska elektronin alkunopeus on nolla, saadaan yhtälö  $\frac{1}{2}mv^2 = qU$ , jossa

$$|q| = e.$$

Koska kiihdytysjännite on 150 V, elektronin nopeus on

$$v_1 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 150 \text{ V}}{9,10938 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 7,26393 \cdot 10^6 \text{ m/s} \approx 7,3 \text{ Mm/s}.$$

Elektronin liike-energia on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,10938 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (7,26393 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2 \approx 2,4 \cdot 10^{-17} \text{ J}.$$

- 7-7.** Jotta protonit kulkisivat kenttien läpi suuntansa säilyttäen, liikettä vastaan kohtisuorassa suunnassa on oltava Newtonin II lain mukaan  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$  eli  $\vec{F}_m + \vec{F}_s = \vec{0}$ . Valitaan magneettisen voiman suunta positiiviseksi, jolloin skalaariyhtälöstä  $F_m - F_s = 0$  saadaan

$$F_s = F_m \text{ eli } qE = qvB \text{ ja } q \frac{U}{d} = qvB.$$

Levyjen välinen jännite on

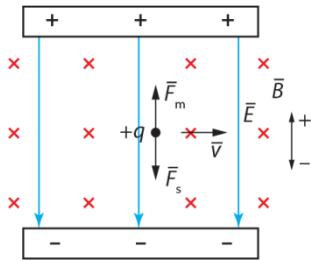
$$U = dvB = 0,016 \text{ m} \cdot 1,1 \text{ Mm/s} \cdot 23 \text{ mT} \approx 0,40 \text{ kV}.$$

- 7-8.** Sähköisen voiman ionille tekemä työ muuntaa ionin potentiaalienergian

liike-energiaksi:  $qU = \frac{1}{2}mv^2$ , josta ionin nopeudelle saadaan yhtälö

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$





Jotta ionin liikkeen suunta säilyy, liikettä vastaan kohtisuorassa suunnassa on oltava Newtonin II lain mukaan  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$  eli  $\vec{F}_m + \vec{F}_s = \vec{0}$ .

Valitaan suunta ylös positiiviseksi, jolloin skalaariyhtälöstä  $F_m - F_s = 0$  saadaan  $F_m = F_s$  eli  $qvB = qE$ .

Sähkökentän voimakkuuden suuruus on

$$E = vB = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \cdot B = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 42 \cdot 10^3 \text{ V}}{6,6 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}} \cdot 270 \cdot 10^{-3} \text{ T} \approx 0,17 \text{ MV/m}$$

ja suunta (tässä) piirroksessa alas.

Huomaa, että sähkökentän voimakkuuden suunta riippuu mm. valitusta ionin suunnasta, ja että ratkaisussa ei tarvitse ottaa huomioon ioniin kohdistuvaa painoa sen vähäisen vaikutuksen vuoksi.

- 7-9.** a) Newtonin II lain mukaan on  $\vec{F}_m = m\vec{a}_n$ , jossa magneettisen voiman suuruus on  $F_m = qvB$  ja normaalikiiktyvyyden suuruus  $a_n = \frac{v^2}{r}$ . Saadaan

yhtälö  $qvB = m \frac{v^2}{r}$ , josta protonin ratanopeus on

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,45 \text{ T} \cdot 0,66 \text{ m}}{1,67262 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \approx 2,84492 \cdot 10^7 \text{ m/s.}$$

Protonin liike-energia sen poistuessa syklotronista on

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,67262 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (2,84492 \cdot 10^7 \text{ m/s})^2 \\ \approx 6,76873 \cdot 10^{-13} \text{ J} \approx 4,2 \text{ MeV}.$$

b) Protonin yhteen kierrokseen kuluva aika on  $T = \frac{s}{v}$  ja matka  $s = 2\pi r$ .

Kohdan a perusteella protonien ratanopeus on  $v = \frac{qBr}{m}$ . Protonin

kierrostaajuus on  $f = \frac{1}{T}$ .

Jännitteen suunnan pitää vaihtua samassa ajassa joka protonilta kuluu puolikkaaseen kierrokseen ja kokonaisen kierroksen jälkeen jännitteen pitää olla samassa vaiheessa kuin alkutilanteessa. Kiihdytysjännitteen taajuuden on siis oltava yhtä suuri kuin protonin kierrostaajuus.

Protonien kiihdytystaajuus on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{s} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2,84492 \cdot 10^7 \text{ m/s}}{2\pi \cdot 0,66 \text{ m}} \approx 6,9 \text{ MHz}.$$

**7-10.** a) Deuteroni on vedyn isotooppi, ja sen massa on taulukkokirjan mukaan

$$m = 2,014 \text{ 1018 u}$$

$$= 2,014 \text{ 1018} \cdot 1,660 \text{ 5389} \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3,344 \text{ 4944} \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Kun deuteronin liike-energia on  $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 9,6 \text{ MeV}$ , sen ratanopeus on

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,6 \cdot 10^6 \cdot 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{3,34449 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \approx 3,03278 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

Deuteronin kiertoaika syklotronissa on

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 0,45 \text{ m}}{3,03278 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 9,32291 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Kiihdytysjännitteen taajuus on  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{9,32291 \cdot 10^{-8} \text{ s}} \approx 11 \text{ MHz}$ .

b) Koska magneettikentän suunta on hiukkasen nopeuteen nähden kohtisuora, magneettinen voima pakottaa hiukkasen ympyräradalle. Newtonin II lain mukaan on  $\vec{F}_m = m\vec{a}_n$ , jossa magneettisen voiman suuruus on  $F_m = qvB$  ja normaalikiihtyvyyden suuruus  $a_n = \frac{v^2}{r}$ . Saadaan yhtälö  $qvB = m\frac{v^2}{r}$ , josta magneettivuon tiheyden suuruus on

$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{3,34449 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 3,03278 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,45 \text{ m}} \approx 1,4 \text{ T}$$

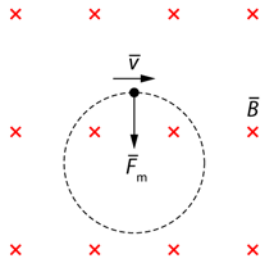
ja suunta on kohtisuoraan ratatasoa vastaan.

**7-11. a)** Elektronisuihkun jokaiseen elektroniin kohdistuvan magneettisen voiman suuruus on

$$F_m = qvB = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 9,0 \text{ Mm/s} \cdot 0,25 \text{ mT} \approx 0,36 \text{ fN ja}$$

suunta oikean käden säännön perusteella elektronin liikesuuntaan nähden oikealle.

Huomaa,  $q$  on elektronin varauksen itseisarvo.



b) Newtonin II lain mukaan on  $\vec{F}_m = m\vec{a}_n$ , jossa magneettisen voiman suuruus on  $F_m = qvB$  ja normaalikiiktyvyyden suuruus  $a_n = \frac{v^2}{r}$ . Saadaan yhtälö  $qvB = m\frac{v^2}{r}$  ( $q$  elektronin varauksen itseisarvo), josta saadaan radan säteeksi

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{9,10938 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 9,0 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,25 \text{ mT}} \approx 0,20 \text{ m}.$$

c) Elektronin ratanopeus ympyräradalla on vakio. Tällöin on voimassa  $t = \frac{s}{v}$ . Elektronin kulkema matka sen tehdessä kokonaisen kierroksen on  $s = 2\pi r$ , jossa  $r$  on radan säde. Kohdan a perusteella  $r = \frac{mv}{qB}$ , jossa  $q$  on elektronin varauksen itseisarvo.

Yhteen kierrokseen kulunut aika on

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi \frac{mv}{qB}}{v} = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi \cdot 9,10938 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,25 \text{ mT}} \approx 0,14 \mu\text{s}.$$

**7-12. a)** Tutkittava aine ionisoidaan, sillä vain varattuja hiukkasia voidaan kiihdyttää ja ohjata sähkö- ja magneettikentillä. Kiihdyttävä sähkökenttä kiihdyttää ionit likimain haluttuun nopeuteen. Ionien tullessa kiihdyttävään sähkökenttään niillä kaikilla ei ole täsmälleen sama nopeus. Tästä syystä tarvitaan nopeusvalitsin, jossa on ristikkäiset kohtisuorat sähkö- ja magneettikentät  $\vec{E}$  ja  $\vec{B}_1$ . Nopeusvalitsimessa ioneihin kohdistuu vastakkaisuuntaiset sähköinen ja magneettinen voima, joiden suuruudet ovat  $F_s = qE$  ja  $F_m = qvB_1$ . Magneettisen voiman suuruus riippuu nopeudesta  $v$ . Vain ne ionit pääsevät nopeusvalitsimesta läpi, jotka menevät suoraan, eli ne joille sähköinen ja magneettinen voima ovat yhtä suuria:  $F_s = F_m$  eli  $qE = qvB$ . Näin ollen vain nopeudella  $v = \frac{E}{B_1}$  etenevät ionit kulkevat valitsimen läpi suoraviivaisesti ja pääsevät analysoivaan magneettikenttään. Sähköinen ja magneettinen voima eivät riipu massasta, joten nopeusvalitsimen läpi pääsee massaltaan erilaisia hiukkasia.

**b)** Ionit saapuvat analysoivaan magneettikenttään kohtisuorasti kenttää vastaan. Tällöin ioneihin kohdistuu magneettinen voima, joka on kohtisuorassa ionien nopeutta ja magneettivuon tiheyttä vastaan, joten hiukkaset joutuvat ympyräradalle. Analysoivassa magneettikentässä Newtonin II lain mukaan on  $\vec{F}_{m2} = m\vec{a}_n$ , jossa magneettisen voiman suuruus on  $F_{m2} = qvB_2$  ja normaalikiihtyvyyden suuruus  $a_n = \frac{v^2}{r}$ . Saadaan yhtälö  $qvB_2 = m\frac{v^2}{r}$ , josta radan säde on  $r = \frac{mv}{qB_2}$ .

Radan säde riippuu ionien massasta. Saman alkuaineen eri isotoopeilla on hieman toisistaan poikkeavat massat. Näin massaspektrometri pystyy erottelemaan eri isotoopit toisistaan ratojen säteiden avulla.

- 7-13.** Newtonin II lain mukaan vakionopeudella nopeusvalitsimessa kulkeville ioneille on  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$  eli  $\vec{F}_m + \vec{F}_s = \vec{0}$ , jossa  $\vec{F}_m$  on magneettinen voima ja  $\vec{F}_s$  sähköinen voima.

Kun valitaan magneettisen voiman suunta positiiviseksi, saadaan  $F_m - F_s = 0$  eli  $F_m = F_s$ , joten yhtälöstä  $qvB = Eq$  analysoivaan magneettikenttään saapuvien ionien nopeus on

$$v = \frac{Eq}{qB_1} = \frac{E}{B_1} = \frac{28,6 \text{ kV}}{0,110 \text{ T}} = 2,60 \cdot 10^5 \text{ m/s.}$$

Analysoivassa magneettikentässä ionit liikkuvat magneettisen voiman vaikutuksesta pitkin ympyrärataa. Newtonin II lain mukaan on  $\vec{F}_m = m\vec{a}_n$ , jossa magneettisen voiman suuruus on  $F_m = qvB_2$  ja

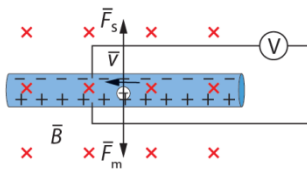
normaalikiihtyvyyden suuruus  $a_n = \frac{v^2}{r}$ . Saadaan yhtälö  $qvB_2 = m \frac{v^2}{r}$ , josta

saadaan radan säteeksi  $r = m \frac{v}{qB_2}$ .

Tinaionien ratojen halkaisijoiden erotus eli ionien osumakohtien ero on

$$\begin{aligned} \Delta d &= 2r_2 - 2r_1 = 2(r_2 - r_1) = 2 \left( m_2 \frac{v}{qB_2} - m_1 \frac{v}{qB_2} \right) = 2(m_2 - m_1) \frac{v}{qB_2} \\ &= 2 \cdot (114,903\text{u} - 113,903\text{u}) \cdot \frac{2,60 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,530 \text{ T}} \\ &= 2 \cdot (1,00056 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \cdot \frac{2,6 \cdot 10^5 \text{ m/s}}{1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,530 \text{ T}} \approx 10,2 \text{ mm.} \end{aligned}$$

- 7-14. a)** Veren virratessa suonessa positiivisesti varattuja ioneja siirtyy oikean käden säännön perusteella suonin seinän alaosaan magneettisen voiman  $\vec{F}_m$  vaikutuksesta. Vastaavasti negatiivisia ioneja siirtyy suonin yläosaan. Ala- ja yläosan välille syntyy sähkökenttä ja sen seurauksena elektroneihin kohdistuu sähköinen voima  $\vec{F}_s$ . Tasapainotilanteessa ioneihin kohdistuva kokonaisvoima johdinta vastaan kohtisuorassa suunnassa on Newtonin II lain mukaan  $\sum \vec{F} = \vec{0}$  eli  $\vec{F}_s + \vec{F}_m = \vec{0}$ . Tällöin enempien varausten siirtyminen suonin seiniin lakkaa ja jännitteellä on vakioarvo. Verisuonen alaosa on positiivisesti varautunut.



- b)** Tarkastellaan positiivista ionia, jonka varaus on  $q$ . Newtonin II lain mukaan on  $\sum \vec{F} = \vec{0}$  eli  $\vec{F}_s + \vec{F}_m = \vec{0}$ . Sovitaan magneettisen voiman suunta positiiviseksi. Tällöin skalaariyhtälön  $F_m - F_s = 0$  eli yhtälön  $qvB - q\frac{U}{d} = 0$  perusteella ionien keskimääräinen nopeus eli veren virtausnopeuden suuruus on

$$v = \frac{U}{Bd} = \frac{11 \cdot 10^{-6} \text{ V}}{1,4 \text{ T} \cdot 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2,1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Nopeuden suunta on kuvassa vasemmalle.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 8-1.** a) Magneettikentässä olevaan johtimeen kohdistuvan magneettisen voiman suuruus saadaan yhtälöstä  $F = I l B \sin \alpha$ , jossa  $\alpha$  on kentän ja johtimen välinen kulma.

Voima on pienin, kun  $\sin \alpha = 0$  eli silloin, kun kulma  $\alpha = 0^\circ$ . Tällöin johdin on kenttäviivojen suuntainen ja magneettikentästä ei kohdistu johtimeen magneettista voimaa.

- b) Voima on suurin, kun  $\sin \alpha = 1$  eli silloin, kun kulma  $\alpha = 90^\circ$ . Tällöin johdin on kohtisuorassa kenttäviivoja vastaan.

- 8-2.** Magneettisen voiman suunta on

- a) ylös (sähkövirran suunnan suhteen vasemmalle)  
b) vasemmalle (sähkövirran suunnan suhteen vasemmalle)  
c) vinosti oikealle alas (sähkövirran suunnan suhteen vasemmalle)  
d) vasemmalle (sähkövirran suunnan suhteen oikealle).  
e) Kuvan tilanteissa, ts. kun sähkövirta on yhdensuuntainen magneettikentän kenttäviivojen kanssa, virtajohtimeen ei kohdistu magneettista voimaa.





**8-3.** Miksi johdin heilahtaa?

Johtimessa kulkee sähkövirta. Johdin heilahtaa, koska U-magneetin magneettikenttä kohdistaa johtimeen voiman.

Kumpi U-magneetin kohtioista on S-kohtio?

Pariston kääntämisen jälkeen musta johdin kytketään pariston positiiviseen napaan. Tällöin sähkövirta kulkee magneettikentässä olevassa suorassa johtimessa vinosti takavasemmalle. Koska johdin heilahtaa etuvasemmalle, on magneettisen voiman suunta etuvasemmalle. Oikean käden säännön mukaan keskisormi osoittaa alas, joten alempi kohtio on S-kohtio.

**8-4.** a) Oletetaan iskukanava suoraksi virtajohtimeksi, jolloin magneettivuon

tiheyden suuruus etäisyydellä  $r$  iskukanavasta on  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

Magneettivuon tiheyden suuruus eri etäisyyksillä, kun:

$$r = 10 \text{ m, on } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 10 \text{ kA}}{2\pi \cdot 10 \text{ m}} = 200 \mu\text{T},$$

$$r = 100 \text{ m, on } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 10 \text{ kA}}{2\pi \cdot 100 \text{ m}} = 20 \mu\text{T} \text{ ja}$$

$$r = 1 \text{ km, on } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \cdot 10 \text{ kA}}{2\pi \cdot 1000 \text{ m}} = 2 \mu\text{T}.$$

Maan magneettivuon tiheyden suuruus vaihtelee paikan mukaan ja on noin 20...60  $\mu\text{T}$ . Kun salamaniskukanavan etäisyys on yli 100 m, salamaniskun aiheuttaman magneettivuon tiheyden suuruus on laskelmien perusteella pienempi kuin Maan magneettivuon tiheyden suuruus.

b) Suoran virtajohtimen magneettikentän magneettivuon tiheyden

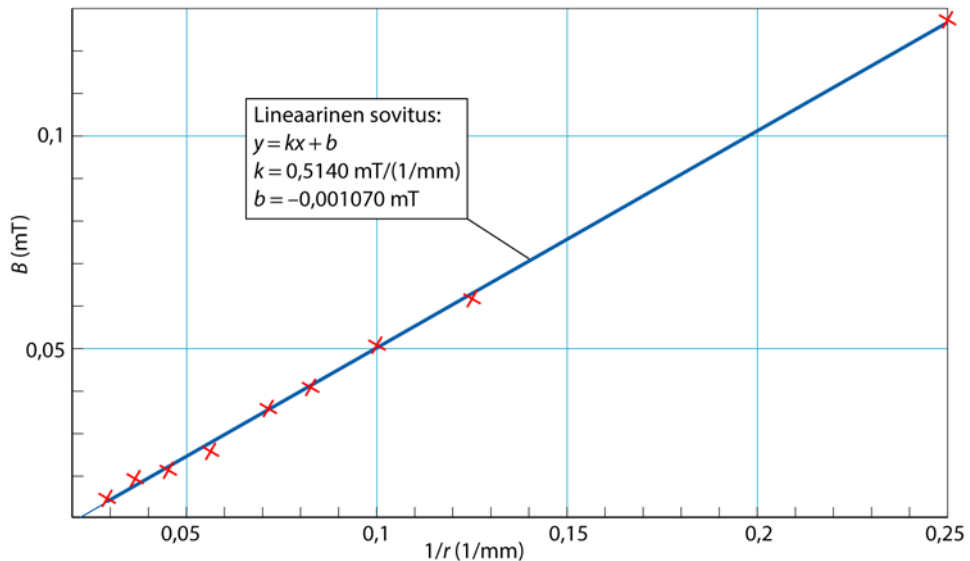
suuruus on  $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot \frac{1}{r}$ . Kun mittaustulokset esitetään  $\frac{1}{r}, B$  -

koordinaatistossa, suoran fysikaalinen kulmakerroin on  $\frac{\mu_0}{2\pi} I$ .

Täydennetään taulukkoon etäisyyden  $r$  käänteisarvot  $1/r$ :

$r$ (mm)	$1/r$ (1/m)	$B$ (mT)
4	0,250	0,128
8	0,125	0,062
10	0,100	0,051
12	0,083	0,041
14	0,071	0,036
18	0,056	0,026
22	0,045	0,021
28	0,036	0,019
35	0,029	0,015

Esitetään mittaustulokset  $\frac{1}{r}, B$  -koordinaatistossa:



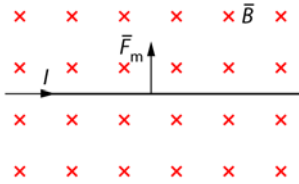
Mittausohjelman mukaan suoran fysikaalinen kulmakerroin on

$$k = 0,5140 \frac{\text{mT}}{\text{mm}} = 0,5140 \cdot \frac{10^{-3} \text{T}}{10^{-3} \text{m}} = 0,5140 \cdot 10^{-6} \text{Tm}$$

Yhtälöstä  $\frac{\mu_0}{2\pi} I = 0,5140 \cdot 10^{-6} \text{Tm}$  saadaan sähkövirran suuruudeksi

$$I = \frac{2\pi \cdot 0,5140 \cdot 10^{-6} \text{Tm}}{\mu_0} = \frac{2\pi \cdot 0,5140 \cdot 10^{-6} \text{Tm}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}} \approx 2,6 \text{ A.}$$

8-5. a)



Koska magneettikenttä ja johdin ovat kohtisuorassa, magneettisen voiman suuruus on  $F_m = IlB = 0,75 \text{ A} \cdot 0,095 \text{ m} \cdot 1,8 \text{ mT} \approx 0,13 \text{ mN}$ .  
Voiman suunta on kuvan piirroksessa ylös.

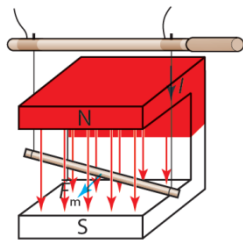
b) Magneettinen voima  $F_m = IlB \sin \alpha$  on suurin, kun  $\sin \alpha = 1$  ja kulma  $\alpha = 90^\circ$ . Siksi johdin asetetaan niin, että se on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan, jolloin magneettivuon tiheyden suuruus on

$$B = \frac{F_m}{Il} = \frac{2,7 \text{ mN}}{1,5 \text{ A} \cdot 0,12 \text{ m}} \approx 15 \text{ mT.}$$

8-6. Yhtälöstä  $F_m = I l B \sin \alpha$  saadaan magneettivuon tiheyden suuruudeksi

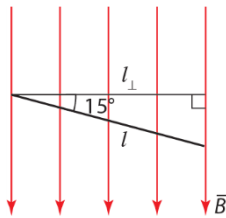
$$B = \frac{F_m}{I l \sin \alpha} = \frac{0,12 \text{ N}}{12,5 \text{ A} \cdot 0,025 \text{ m} \cdot \sin 15^\circ} \approx 1,5 \text{ T}.$$

8-7. Koska sauva heilahtaa pois päin magneetista, magneettisen voiman suunta on kuvassa vasemmalle. Oikean käden säännön perusteella sähkövirran suunta on sauvassa edestä taaksepäin.



Sauvasta on magneettikentässä 9,0 cm pituinen osa, siksi kenttäviivoja vastaan kohtisuoran osan pituus on  $l_{\perp} = l \cos 15^\circ$ .

Tilanne edestä katsottuna:

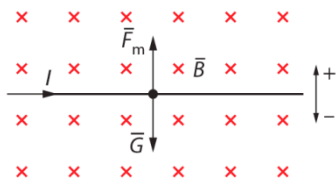


Magneettisen voiman suuruus on

$$F_m = I l_{\perp} B = 3,1 \text{ A} \cdot 0,090 \text{ m} \cdot \cos 15^\circ \cdot 25 \text{ mT} \approx 6,7 \text{ mN}.$$

Sähkövirran suunta on kuvassa oikealta vasemmalle.

- 8-8.** a) Johdin on tasapainossa, joten Newtonin II lain mukaan on  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ . Johtimeen kohdistuvan painon suunta on kuvassa alas ja magneettisen voiman suunta oikeankäden säännön perusteella ylös.

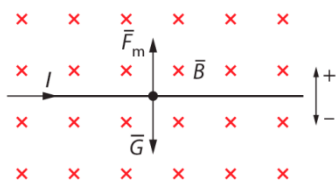


- b) Kun suunta ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö  $F_m - G = 0$  eli  $F_m = G$ . Johdin on kohtisuorassa kenttäviivoja vastaan, joten yhtälöstä  $ILB = mg$  saadaan johtimessa kulkevan sähkövirran

$$\text{suuruudeksi } I = \frac{mg}{lB} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{1,0 \text{ m} \cdot 0,75 \text{ T}} \approx 33 \text{ mA}.$$

Virran suunta on oikeankäden säännön mukaan kuvassa vasemmalta oikealle.

- 8-9.** a) Koska johdin pysyy paikallaan (leijuu) vaakasuorassa asennossa, on magneettisen voiman suunnan oltava painon suunnalle vastakkainen.



Oikean käden säännön perusteella sähkövirran suunta on kuvassa oikealle, kun magneettisen voiman suunta on ylös.

b) Newtonin II lain mukaan on  $\sum \vec{F} = \vec{0}$  eli  $\vec{F}_m + \vec{G} = \vec{0}$ . Kun suunta ylös valitaan positiiviseksi, skalaariyhtälö on  $F_m - G = 0$ , joka saadaan muotoon  $F_m = G$  eli  $IlB = mg$ .

Johdin on muodoltaan suora ympyrälieriö, joten sen tilavuus on  $V = \pi r^2 l$ . Johtimen massa voidaan kirjoittaa muotoon  $m = \rho V = \rho \pi r^2 l$ , jossa  $\rho$  on alumiinin tiheys.

Johtimessa kulkevan sähkövirran suuruus on

$$I = \frac{mg}{Bl} = \frac{\rho \pi r^2 l g}{Bl} = \frac{\rho \pi r^2 g}{B} = \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot (0,50 \cdot 10^{-3} \text{m})^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,56 \text{T}} \approx 37 \text{mA}.$$

**8-10. a)** Ampèren lain mukaan suora virtajohdin kohdistaa toiseen yhdensuuntaiseen virtajohtimeen voiman, jonka suuruus on

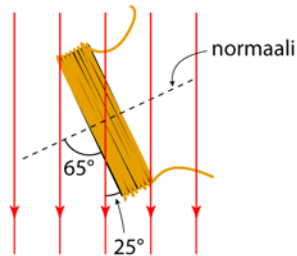
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r} l, \text{ kun } \mu_0 \text{ on tyhjiön permeabiliteetti, } I_1 \text{ ja } I_2 \text{ ovat johtimissa}$$

kulkevat sähkövirrat,  $r$  on johdinten välinen etäisyys ja  $l$  virtajohtimien pituus.

b) Koska virtajohtimissa sähkövirrat kulkevat samaan suuntaan, johtimet vetävät toisiaan puoleensa. Virtajohtimiin kohdistuvat voimat ovat Newtonin III lain mukaan yhtä suuret ja vastakkaissuuntaiset. Voimien suuruudet ovat

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r} l = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs/(Am)}}{2\pi} \cdot \frac{2,5 \text{A} \cdot 2,5 \text{A}}{0,19 \text{m}} \cdot 1,4 \text{m} \approx 9,2 \cdot 10^{-6} \text{N}.$$

8-11.



Kulma  $\alpha$  on käämin silmukoiden tason normaalin ja magneettikentän välinen kulma, joten nyt kulma  $\alpha$  on

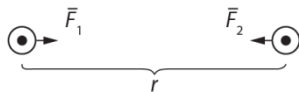
$$\alpha = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.$$

Magneetikentästä käämiin kohdistuva momentti on

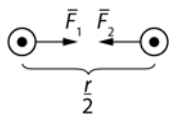
$$M = NIBA \sin \alpha = NIB \cdot \pi r^2 \cdot \sin \alpha$$

$$= 660 \cdot 1,5 \text{ A} \cdot 1,2 \text{ T} \cdot \pi \cdot (0,034 \text{ m})^2 \cdot \sin 65^\circ \approx 3,9 \text{ Nm}.$$

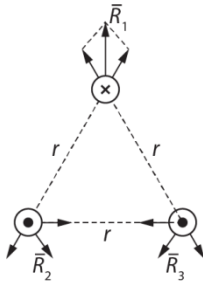
- 8-12. a) Koska johtimissa kulkevat sähkövirrat ovat samansuuntaiset, johtimet vetävät toisiaan puoleensa. Newtonin III lain mukaan voimat ovat yhtä suuret ja vastakkaisuuntaiset.



- b) Koska johtimien välinen etäisyys on pienempi kuin kohdassa a, vuorovaikutus on voimakkaampi. Kun etäisyys pienenee puoleen, voima kaksinkertaistuu, koska voima on kääntäen verrannollinen etäisyyteen.



c) Tutkitaan pareittain kahden johtimen välistä magneettista vuorovaikutusta. Voima  $\vec{R}_1$  on suurempi kuin  $\vec{R}_2$  ja  $\vec{R}_3$ , jotka ovat yhtä suuret. Voimat  $\vec{R}_1$ ,  $\vec{R}_2$  ja  $\vec{R}_3$  ovat kuhunkin johtimeen vaikuttavat resultanttivoimat (kokonaisvoimat).





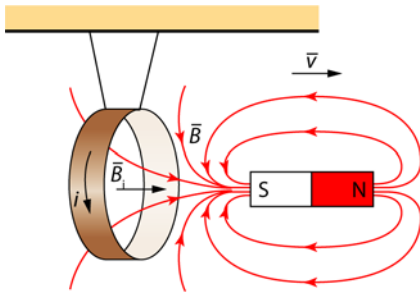
## TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 9-1.**
- a) Väite pitää paikkansa.
  - b) Väite on väärä. Käämiin indusoituva jännite aiheutuu käämin läpi menevän magneettivuon muuttumisesta. Käämin läpäisevä magneettivuo voi olla myös vakio, jolloin ei synny induktioilmiötä eikä induktiojännitettä.
  - c) Väite on väärä. Lenzin lain mukaan induktiovirta on suunnaltaan sellainen, että sen vaikutukset vastustavat induktioilmiön aiheuttaneen magneettikentän muutosta.
  - d) Väite pitää paikkansa.
- 9-2.**
- a) 1) Vahvistuva magneettikenttä indusoi silmukkaan sähkövirran, jonka suunta on sellainen, että sen synnyttämä magneettikenttä Lenzin lain mukaan vastustaa magneettikentän kasvua. Sähkövirran aiheuttama kenttä silmukan sisällä on alkuperäiseen kenttään nähden vastakkaisuuntainen. Sähkövirran suunta on oikean käden säännön perusteella silmukan katsojaa lähempänä olevassa osassa ylös.
  - 2) Koska magneettikenttä on heikkenemässä, Lenzin lain mukaan silmukan sisälle syntyy magneettikenttä, joka pyrkii vastustamaan kentän heikkenemistä eli kenttä on vahvistava. Sen suunta on sama kuin alkuperäisen kentän suunta eli kohti katsojaa. Sähkövirran suunta on kuvassa vastapäivään.
- b) Magneettivuo on  $\Phi = AB = 28 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,14 \text{ T} \approx 0,39 \text{ mWb}$ .

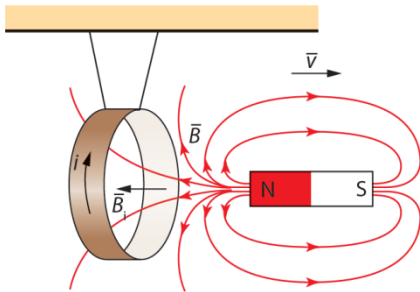
**9-3.** a) Magneetin pudotessa N-kohtio edellä magneetin magneettikentän suunta silmukan sisällä on alas. Muuttuva magneettikenttä indusoi silmukkaan jännitteen, jonka synnyttämä sähkövirta aiheuttaa silmukan ympärille magneettikentän. Lenzin lain mukaan syntyvä magneettikenttä silmukan sisällä on vastakkaisuuntainen magneetin kentän suunnalle eli ylös. Näin ollen oikean käden säännön perusteella sähkövirran suunta on kuvassa silmukan katsojaa lähempänä olevassa osassa oikealle.

b) Koska induktiovirta kulkee kuvassa silmukan katsojaa lähempänä olevassa osassa ylös, induktiovirran seurauksena syntyvän magneettikentän suunta on oikean käden säännön perusteella sama kuin kestopagneetin kentän suunta. Näin ollen induktiovirran synnyttämä magneettikenttä vahvistaa kestopagneetin kenttää eli kestopagneetin kenttä on Lenzin lain mukaan heikkenemässä. Kestomagneetti on siis liikkeessä pois päin silmukasta eli vasemmalle.

**9-4.** a) Kun magneetti vedetään pois alumiinirenkaan läheltä, kestopagneetin magneettikenttä renkaan sisällä heikkenee. Lenzin lain mukaan renkaaseen indusoituu jännite, joka synnyttää renkaaseen sähkövirran. Sen aiheuttaman magneettikentän suunta on sellainen, että se vahvistaa alkuperäistä magneettikenttää. Sauvamagneetin kentän suunta renkaan lähellä on kuvassa oikealle. Renkaan sisällä induktiovirran synnyttämän magneettikentän suunta on myös oikealle. Oikean käden säännön avulla voidaan päätellä sähkövirran suunnaksi kuvassa renkaan katsojaa lähempänä olevassa osassa alas. Rengas heilahtaa magneetin liikkeen suuntaan eli kuvassa oikealle.



b) Jos magneetti käännetään toisin päin eli N-kohtio tulee lähelle rengasta, sen magneettikentän suunta silmukan sisällä on kuvassa vasemmalle. Koska magneetti vedetään pois renkaan läheltä, alkuperäinen magneettikenttä heikkenee, joten magneetin liike aiheuttaa renkaaseen magneettikenttää vahvistavan kentän. Kentät ovat siis samansuuntaiset (molemmat vasemmalle). Oikean käden säännön perusteella sähkövirran suunta on renkaan katsojaa lähempänä olevassa osassa ylös. Rengas heilahtaa jälleen magneetin suuntaan eli oikealle.



- 9-5. a) 1) ja 2) Jos käämi otetaan pois magneetin kohtioden välistä tai käännetään pystyasentoon, käämin läpäisevä magneettivuo pienenee. Vuon pienenemisen aikana käämin napojen välille indusoituu jännite. Tämä havaitaan jännitemittarilla.

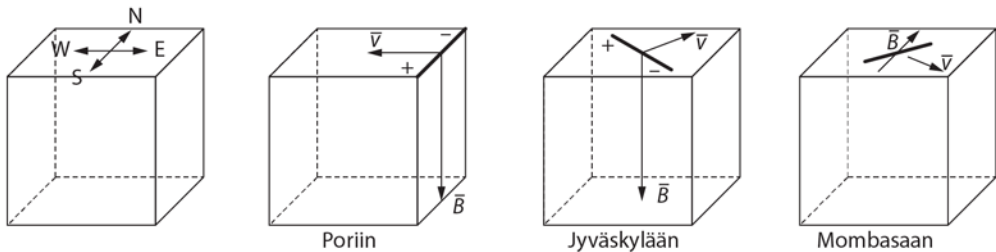
b) Käämit on kytketty induktiivisesti, koska niiden sisällä on osittain yhteinen magneettikenttä. Kun käämi 1 kytetään tasajännitteeseen, käämissä 2 havaitaan jännite vain kytkemis- ja katkaisuhetkellä, jolloin magneettivuo käämin läpi muuttuu.

- 9-6.
- a) Koska silmukan etäisyys johtimesta pysyy vakiona, silmukan läpäisevä magneettivuo ei muutu eikä silmukkaan indusoidu jännitettä.
  - b) Koska silmukan etäisyys johtimesta muuttuu, myös silmukan läpäisevä magneettivuo muuttuu ja silmukkaan indusoiduu jännite.
  - c) Koska silmukan etäisyys johtimesta muuttuu, myös silmukan läpäisevä magneettivuo muuttuu ja silmukkaan indusoiduu jännite.
  - d) Koska silmukan etäisyys johtimesta pysyy vakiona, silmukan läpäisevä magneettivuo ei muutu eikä silmukkaan indusoidu jännitettä.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 10-1.** Johtimeen indusoituu jännite tapauksissa a) ja b). Periaatteessa myös johtimeen c), mutta vain johtimen "paksuussuunnassa" eli kuvassa pystysuunnassa.
- 10-2.** a) Väärin. Maan magneettikentän nopeutta vastaan kohtisuora komponentti  $\vec{B}_\perp$  osoittaa alas. Näin ollen oikean käden säännön perustella vasemman siiven kärki varautuu positiivisesti.
- b) Oikein.
- c) Oikein.
- d) Väärin. Lentokoneen siipien kärkien välille indusoitua jännite on  $e = lvB_\perp$ . Jännite on siis sitä suurempi, mitä suurempi kyseinen vakionopeus on.
- e) Väärin. Olipa lentokoneella vakionopeus tai muuttuva nopeus, siivenkärjillä on erimerkkiset sähkövaraukset. Vakionopeus indusoi siiven kärkien välille jännitteen  $e = lvB_\perp$ . Jos nopeus muuttuu, myös jännite muuttuu.
- 10-3.**
- a) ja b) Junan akseli on metallia, joten sitä voidaan pitää johdintankona. Suomessa inkliinaatio on noin  $71^\circ$ . Maan magneettikentän pystysuora komponentti on kohtisuorassa junan etenemisnopeutta ja akselia vastaan, joten junan liikkuessa Tampereelta Poriin tai Jyväskylään akselin päiden välille indusoituu jännite.
- c) Nairobi sijaitsee päiväntasaajalla ja inkliinaatio on nolla. Maan magneettikenttä on siellä maan pinnan suuntainen. Elektroneihin

kohdistuva magneettinen voima, joka on suuruudeltaan  $F = I v B \sin \alpha$ , aiheuttaa indusoituvan jännitteen. Voima on kohtisuorassa ( $\alpha = 90^\circ$ ) magneettikenttää ja elektronien nopeutta (tässä junan nopeus) vastaan. Koska sekä junan nopeus että maan magneettikenttä ovat maanpinnan tasossa, voiman suunta on kohtisuorassa maan pintaa vastaan, jolloin vaakasuoran akselin päiden välille ei indusoidu jännitettä. Akselin ylä- ja alaosa sen sijaan varautuvat erimerkkisesti.



**10-4.** Huomaa, että ratkaisussa  $e$  on kahdessa merkityksessä: induktiojännite tai alkeisvaraus.

a) Koska kuvassa oleva johdin ei liiku, magneettikenttä ei aiheuta johtimessa induktioilmiötä. Näin ollen jännitemittari näyttää nollaa.

b) Kun johdinta liikutetaan magneetin kohtioiden välissä, jännitemittarissa havaitaan välillä positiivinen ja välillä negatiivinen jännite.

Kun johdinta liikutetaan magneettikentässä niin, että johdin leikkaa liikkeessaan kohtisuorasti magneettikentän kenttäviivat, johtimessa oleviin elektroneihin kohdistuu magneettinen voima. Kun johtimen liikkeen suunta muuttuu päinvastaiseksi kenttäviivoihin nähden, myös elektronien liikesuunta johtimessa muuttuu. Johtimeen indusoiduu jännite molemmissa tapauksissa.

c) Jännitteen  $e = I v B \sin \alpha$  arvo on suurin, kun johtimeen liikkeen suunta on kohtisuorassa magneettivuon tiheyttä vastaan, tällöin kulma  $\alpha$  on  $90^\circ$  ja  $\sin \alpha = 1$ . Jännite on sitä suurempi, mitä nopeammin johdinta

liikutetaan. Jännite on likimain nolla, kun johdinta liikutetaan kenttäviivojen suuntaisesti (kulma  $\alpha = 0^\circ$  tai  $180^\circ$ ), ja jännite on nolla, jos johdin ei liiku.

d) Jos hyvin kapean silmukan vastakkaiset puolet liikkuvat magneettikentässä, indusoituva jännite on nolla. Tämä johtuu siitä, että johtimen eri osissa elektroneihin kohdistuu yhtä suuret voimat. Eri puolilla silmukkaa magneettiset voimat pyrkivät liikuttamaan elektroneja silmukassa vastakkaisiin suuntiin. Voimien vaikutukset kumoavat toisensa, joten jännite on nolla.

**10-5.** Päiväntasaajan yläpuolelle Maan magneettikenttä on likimain Maan pinnan suuntainen ja magneettivuon tiheyden suunta on etelään.

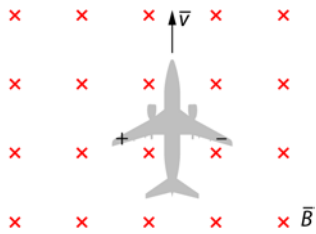
a) Jos satelliitin nopeus ei ole kohtisuorassa Maan magneettivuon tiheyttä vastaan, niin antenniin indusoituva jännite on  $e = lvB\sin\alpha$ , jossa  $\alpha$  on satelliitin nopeuden ja magneettivuon tiheyden välinen kulma. Jos satelliitti liikkuu likimain etelään tai pohjoiseen yhdensuuntaisesti magneettikentän kanssa, on kulma  $\alpha = 0$ , jolloin  $\sin\alpha = 0$  ja jännite on nolla. Tällöin antenniin indusoituva jännite on pienin.

b) Kun satelliitti lentää likimain itään tai länteen kohtisuorasti magneettikenttää vastaan, antenniin indusoituva jännite on  $e = lvB$ , kun  $l$  on antennin pituus,  $v$  satelliitin nopeus ja  $B$  Maan magneettivuon tiheys. Tällöin antenniin indusoituva jännite on suurin.

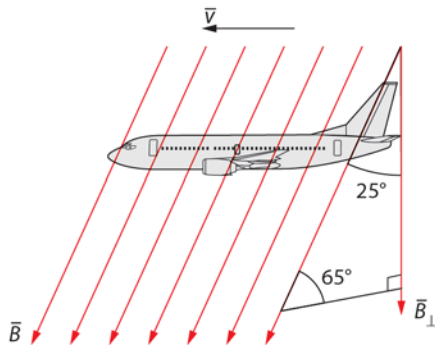
**10-6.** Lentokoneen nopeus on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan, jolloin lentokoneen siipien kärkien välille indusoituva jännite on

$$e = lvB = 25 \text{ m} \cdot \frac{680 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \cdot 85 \cdot 10^{-6} \text{ T} \approx 0,40 \text{ V}.$$

Elektroneihin kohdistuva magneettinen voima aiheuttaa lentokoneeseen induktiojännitteen. Oikean käden säännön perusteella vapaat elektronit siirtyvät lentokoneen oikean siiven kärkeen, jolloin koneen vasemman siiven kärki saa positiivisen varauksen. Vasemman siiven kärki on korkeammassa potentiaalissa.



10-7.



Siivenkärkien välille indusoituva jännite on

$$e = lvB_{\perp} = lvB\sin\alpha = 35 \text{ m} \cdot 175 \text{ m/s} \cdot 30 \mu\text{T} \cdot \sin 65^{\circ} \approx 0,17 \text{ V}.$$

10-8. Sauvan nopeus ympyräliikkeessä on

$$v = \omega r = 2\pi nr = 2\pi \cdot \frac{2,0}{1 \text{ s}} \cdot 0,90 \text{ m} \approx 11,3097 \text{ m/s}.$$

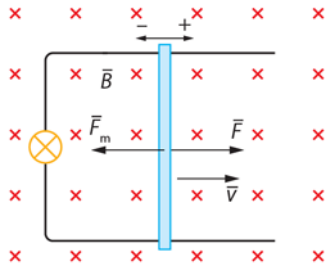


Sauvan päiden välille indusoitunut jännite on suurin, kun sauva liikkuu kohtisuorasti Maan magneettivuon tiheyttä vastaan. Tällöin induktiojännite on  $e = lvB$ , joten Maan magneettivuon tiheys on suuruudeltaan

$$B = \frac{e}{lv} = \frac{0,67 \text{ mV}}{1,0 \text{ m} \cdot 11,3097 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 59 \mu\text{T}.$$

- 10-9. a)** Polttimo hehkuu kirkkaasti, kun se toimii täydellä teholla eli kun  $P = 1,5 \text{ W}$ . Yhtälöstä  $P = Ui$  saadaan polttimossa kulkevan sähkövirran suuruudeksi silloin  $i = \frac{P}{U} = \frac{1,5 \text{ W}}{4,5 \text{ V}} \approx 0,333333 \text{ A}$ . Jos oletetaan, että polttimo ei lämpene merkittävästi, on polttimon resistanssi

$$R = \frac{U}{i} = \frac{4,5 \text{ V}}{0,333333 \text{ A}} \approx 13,5000 \Omega.$$



Sauvaan kohdistuva kitka ja vastusvoimat oletetaan pieniksi. Koska vakionopeudella liikkuvan johtimen päiden välille indusoituu jännite  $e = lvB$ , myös polttimon napoihin indusoituu yhtä suuri jännite. Jotta polttimo hehkuisi kirkkaasti, yhtälöstä  $Ri = lvB$  saadaan sauvan

$$\text{nopeudeksi } v = \frac{Ri}{lB} = \frac{13,5000 \Omega \cdot 0,333333 \text{ A}}{0,12 \text{ m} \cdot 0,15 \text{ T}} \approx 250 \text{ m/s}.$$

Lopputuloksesta voidaan päätellä, että polttimoa tuskin saadaan hehkumaan kyseisen koejärjestelyn avulla.

Huomaa, että tehtävän ratkaisussa oletettiin, että polttimo ei lämpene merkittävästi. Hehkuessaan kirkkaasti polttimon lämpötila voi kohota nopeasti hyvinkin korkeaksi. Tällöin polttimon hehkulangan resistanssi kasvaa. Kylmän polttimon resistanssi on pienempi.

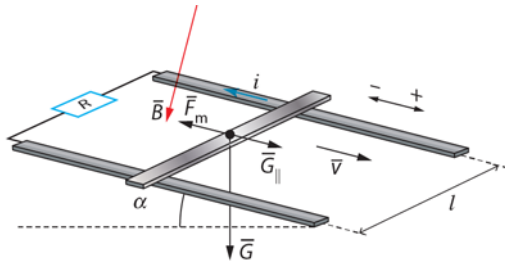
b) Sauva liikkuu vakionopeudella, joten Newtonin II lain perusteella  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$  eli  $\vec{F} + \vec{F}_m = \vec{0}$ . Kun suunta oikealle on valittu positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö  $F - F_m = 0$  eli  $F = F_m$ . Näin ollen vetävä voima on yhtä suuri ja vastakkaisuuntainen kuin magneettikentästä sauvaan kohdistuva magneettinen voima. Koska sauva on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan, on magneettinen voima suuruudeltaan

$$F_m = i l B = 0,333333 \text{ A} \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,15 \text{ T} = 6,0 \text{ mN}.$$

Vetävä voima on suuruudeltaan 6,0 mN, voiman suunta on sama kuin sauvan nopeuden suunta.

c) Koska sauva liikkuu kuvassa oikealle ja magneettikentän suunta on katsojasta pois päin, sähkövirran suunta sauvassa on oikean käden säännön perusteella ylös (ja silmukassa vastapäivään).

**10-10.** Koska kitka ja ilmanvastus ovat pienet, sauvaan kohdistuvat voimat ovat paino ja magneettinen voima. Koska magneettivuon tiheys on kohtisuorassa sauvaa vastaan, magneettisen voiman suunta on nopeuden suunnalle vastakkainen. Magneettinen voima vastustaa johdesauvan liukumista voimalla  $F_m = i l B$ .



Jotta sauva liikkuisi vakionopeudella, on sauvaan kohdistuvan kokonaisvoiman kaltevan tason suunnassa oltava Newtonin II lain mukaan nolla:  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$  eli  $\vec{G}_{\parallel} + \vec{F}_m = \vec{0}$ . Näin ollen magneettisen voiman suunnan on oltava vastakkainen nopeuden suunnalle. Kun suunta kaltevaa tasoa alas on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö  $G_{\parallel} - F_m = 0$ .

Koska  $F_m = ilB$  ja kuvion perusteella on  $G_{\parallel} = mg \sin \alpha$ , yhtälöstä  $G_{\parallel} - F_m = 0$  voidaan ratkaista sähkövirta:

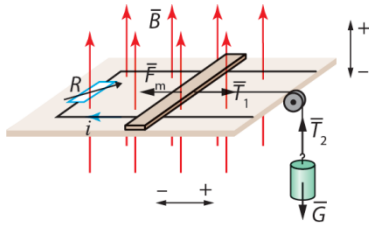
$$G_{\parallel} - F_m = 0,$$

$$ilB = mg \sin \alpha,$$

$$i = \frac{mg \sin \alpha}{lB} = \frac{0,0072 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 15^\circ}{0,10 \text{ m} \cdot 0,76 \text{ T}} = 0,240538 \text{ A}.$$

Sauvan päiden välille indusoitunut jännite on  $e = Ri = 12 \Omega \cdot 0,240538 \text{ A} \approx 2,9 \text{ V}$ .

10-11. a)



Kitka ja vastusvoimat ovat pienet. Koska magneettikenttä on kohtisuorassa sauvaan vastaan, magneettikentästä aiheutuva magneettinen voima vastustaa johdesauvan liukumista voimalla  $F_m = ilB$ . Magneettisen voiman suunta on oikean käden säännön perusteella kuvassa vasemmalle.

Jotta sauva liikkuisi vakionopeudella, on sauvaan vaikuttavan kokonaisvoiman oltava vaakasuunnassa Newtonin II lain mukaan nolla:  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$  eli  $\vec{T}_1 + \vec{F}_m = \vec{0}$ . Kun suunta oikealle valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö  $T_1 - F_m = 0$ .

Koska punnus liikkuu vakionopeudella, pystysuunnassa on oltava Newtonin II lain mukaan  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$  eli  $\vec{T}_2 + \vec{G} = \vec{0}$ . Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö  $T_2 - G = 0$ . Koska sauva ja punnus on yhdistetty toisiinsa venymättömällä langalla, lanka aiheuttaa molempiin kappaleisiin yhtä suuren, langan suuntaan vaikuttavan voiman eli itseisarvo  $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$ .

Kun yhtälöön  $T - F_m = 0$  sijoitetaan  $T = mg$  ja  $F_m = ilB$ , saadaan  $mg - ilB = 0$ . Tästä voidaan ratkaista induktiovirta:

$$i = \frac{mg}{lB} = \frac{0,25 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{1,5 \text{ m} \cdot 0,22 \text{ T}} \approx 7,43182 \text{ A}.$$

Sähkövirta kulkee suljetussa silmukassa oikean käden säännön perusteella myötäpäivään. Koska sauva liikkuu kenttäviivoja vastaan kohtisuorasti, siihen indusoituu jännite

$$e = lvB = 1,5 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ m/s} \cdot 0,22 \text{ T} = 1,65 \text{ V}.$$

Säätövastuksen resistanssi on

$$R = \frac{e}{i} = \frac{1,65 \text{ V}}{7,43182 \text{ A}} = 0,222018 \Omega \approx 0,22 \Omega.$$

**b)** Kun punnus laskeutuu vakionopeudella, punnuksen liikkumiseen kuluu aika

$$t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{0,60 \text{ m}}{5,0 \text{ m/s}} = 0,12 \text{ s}.$$

Energiaa vapautuu

$$E = Pt = Ri^2 t = 0,222018 \Omega \cdot (7,43182 \text{ A})^2 \cdot 0,12 \text{ s} \approx 1,5 \text{ J}.$$

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**11-1.** a) Väite on väärä. Käämiin indusoituu jännite vain, jos magneettivuo käämiin läpi muuttuu.

b) Väite on oikein.

c) Väite on oikein.

d) Väite on oikein.

**11-2.** a) Kun johdinsilmukka on magneetikentässä, sähkövirran syntyminen silmukkaan vaatii, että magneettivuo silmukan läpi muuttuu. Magneettivuon muutos indusoi silmukkaan jännitteen, joka aiheuttaa sähkövirran. Kuvatussa tilanteessa magneettivuo ei muutu, joten silmukkaan ei indusoidu jännitettä, ja näin ollen sähkövirtaa ei synny.

b) Silmukkaan indusoituva jännite riippuu magneettivuon muutosnopeudesta: jännitteen suuruuteen vaikuttavat esimerkiksi

– silmukan pinta-ala,

– magneettivuon tiheyden muutos kuljetulla matkalla ja

– silmukan nopeudesta riippuva matkaan käytetty aika.

Jännite indusoituu myös silloin, kun silmukan muoto tai asento muuttuvat niin, että silmukan pinta-ala magneetikenttää vastaan kohtisuorassa suunnassa muuttuu.

- 11-3. a)** Kun kestopagneetti putoaa käämin läpi, magneettivuo käämin sisällä muuttuu ja synnyttää käämin päiden välille jännitteen  $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt}$ .

Magneetin lähestyessä käämiä magneettivuon muutosnopeus  $\frac{d\Phi}{dt}$  kasvaa ja on positiivinen. Tällöin jännite kasvaa. Kun magneetti menee käämin sisään, vuo kasvaa edelleen, mutta vuon muutosnopeus alkaa pienentyä, joten jännite pienenee. Kun magneetti on keskellä käämiä, magneettivuo on suurimmillaan. Vuon muutosnopeus ja indusoitunut jännite ovat sillä hetkellä nollia.

Kun magneetti jatkaa putoamistaan, se alkaa poistua käämin sisältä. Silloin magneettivuo käämin läpi pienenee eli magneettivuon muutosnopeus on negatiivinen. Indusoitunut jännite on tällöin vastakkaismerkkinen kuin magneetin lähestyessä käämiä. Muutosnopeus saavuttaa suurimman negatiivisen arvonsa silloin, kun magneetti on juuri poistumassa käämin sisältä. Tämän jälkeen vuon muutosnopeus alkaa pienentyä, ja samalla jännite pienenee ja saavuttaa lopulta arvon nolla.

**b)** Magneetin pudotessa sen vauhti kasvaa koko ajan: magneetin vauhti on käämin alaosassa suurempi kuin yläosassa. Näin ollen käämin ohitusaika lyhenee ja magneettivuon muutosnopeus kasvaa, joten indusoituva jännite on suurempi. Siksi jälkimmäinen piikki on korkeampi ja kapeampi ja indusoitunut jännite suurempi.

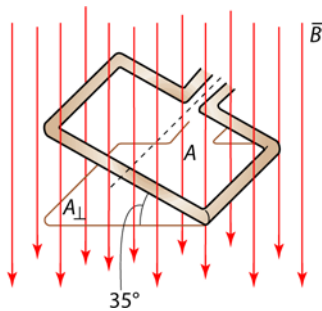
**c)** Koska kuvassa indusoituneiden jännitteiden positiivisten ja negatiivisten piikkien paikat ovat vaihtuneet päinvastaisiksi, putoavan magneetin magneettikentän suunta on vaihtunut päinvastaiseksi. Toisessa pudotuksessa eteläkohtio on ollut edellä ja toisessa pohjoiskohtio (Jännitteen merkki riippuu myös kytkennästä.)

Kuvaajien korkeusero riippuu pudotuskorkeudesta. Mitä korkeammalta magneetti pudotetaan, sitä suurempi on magneetin nopeus sen mennessä käämiin läpi. Näin ollen magneettivuon muutosnopeus on suurempi korkealta pudotettaessa kuin matalalta pudotettaessa. Tämän takia indusoitunut jännite on suurempi korkealta pudotettaessa kuin matalalta pudotettaessa. Mitä nopeammin magneetti liikkuu, sitä kapeampia ja korkeampia ovat jännitepiikit. Vasemmanpuoleinen jännitekuviot on syntynyt, kun magneetti on pudotettu korkeammalta kuin oikeanpuoleisen kuvion syntyessä.

- 11-4.** Koska magneettivuo muuttuu tasaisesti, käämiin indusoituva jännite on vakio:

$$e = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -250 \cdot \frac{12 \text{ mWb} - 36 \text{ mWb}}{0,26 \text{ s}} \approx 23 \text{ V} .$$

- 11-5.**



- a) Silmukan pinta-ala on  $A = (18 \text{ cm})^2 = 324 \text{ cm}^2 = 0,0324 \text{ m}^2$

Magneettivuo silmukan läpi on

$$\Phi = AB = 0,0324 \text{ m}^2 \cdot 720 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 23,328 \text{ mWb} \approx 23 \text{ mWb} .$$



b) Kun silmukka kiertyy  $35^\circ$ , magneettivuo silmukan läpi pienenee. Magneettivuo on nyt

$$\Phi = A_{\perp} B = AB \cos \alpha = 0,0324 \text{ m}^2 \cdot 720 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot \cos 35^\circ = 19,1092 \text{ mWb}$$

Silmukkaan indusoituva keskimääräinen jännite on

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -\frac{19,1092 \text{ mWb} - 23,328 \text{ mWb}}{2,0 \text{ ms}} \approx 2,1 \text{ V}.$$

**11-6.** Silmukkaan indusoituvan keskimääräisen jännitteen suuruus on

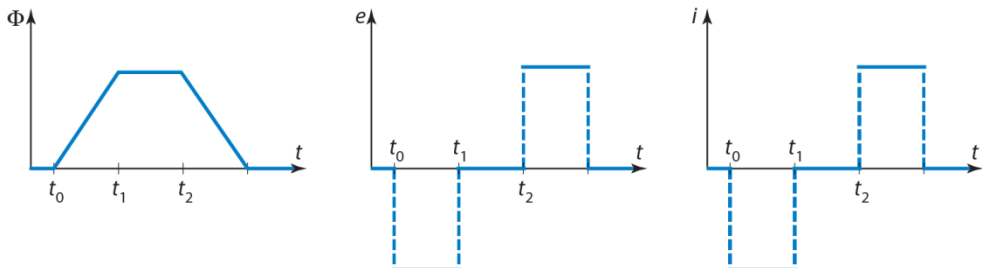
$$e_k = \left| -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \frac{|\Delta(BA)|}{\Delta t}. \text{ Koska magneettivuon tiheyden suuruus on vakio,}$$

voidaan merkitä  $e_k = \frac{B \cdot |\Delta A|}{\Delta t}$ . Kun taso on magneettikentän suuntainen,

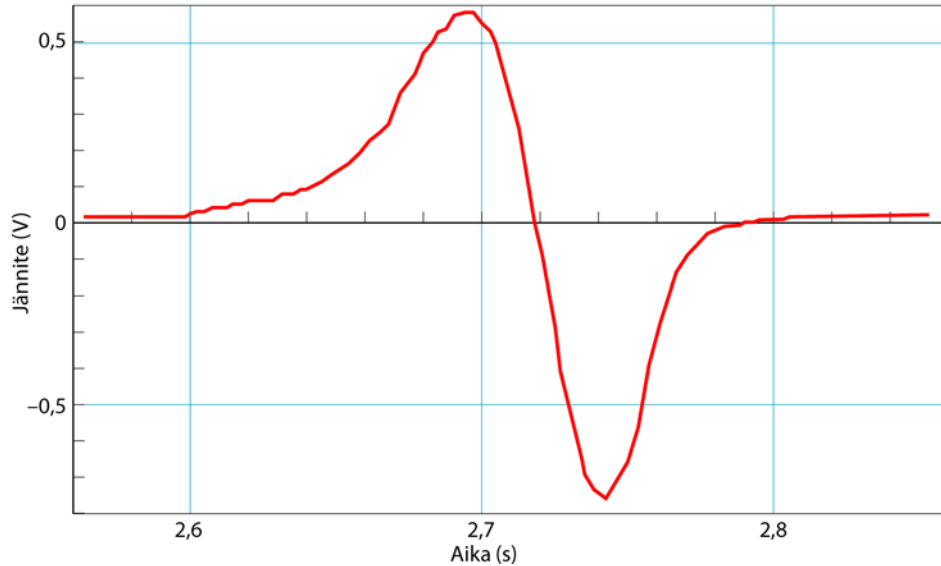
$A_2 = 0$ , joten  $|\Delta A| = |A_2 - A_1| = A_1$ . Keskimääräinen sähkövirta on

$$i_k = \frac{e_k}{R} = \frac{B \cdot |\Delta A|}{R \cdot \Delta t} = \frac{BA_1}{R \cdot \Delta t} = \frac{27 \text{ mT} \cdot 51 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{0,98 \Omega \cdot 0,17 \text{ s}} \approx 0,83 \text{ mA}.$$

**11-7.** Silmukan mennessä kenttään magneettivuon muutos, induktiojännite ja induktiovirta ovat vakioita, samoin silmukan tullessa kentästä pois. Kun silmukka on kokonaan magneettikentässä, magneettivuo ei muutu, joten jännite ja sähkövirta ovat nollia. Ohessa ovat magneettivuon, jännitteen ja sähkövirran kuvaajat.



- 11-8. Viedään taulukon arvot mittausohjelmaan. Taulukon arvoista saadaan jännitteen kuvaaja ajan funktiona.



Kun kestopagneetti putoaa käämin läpi, magneettivuon muuttuminen käämin sisällä synnyttää käämin päiden välille induktiolain mukaisen jännitteen  $e = -N \frac{d\Phi}{dt}$ .

Alla on esimerkinomaisesti analysointimahdollisuuksia:

Ennen 2,600 s: Magneetti putoaa kohti käämiä melko kaukana. Käämiin indusoitunut pieni jännite, likimain 0,02 V, voi johtua käämin lähellä olevista vaihtovirtalaitteista, tai mittarin kalibrointivirheestä.

2,600...2,695 s: Magneetin pudotessa ja lähestyessä käämiä magneettivuon muutosnopeus  $\frac{d\Phi}{dt}$  kasvaa ja on negatiivinen. Tällöin positiivinen jännite kasvaa.

2,694 s: Jännitteen suurin arvo on 0,58 V.

2,695...2,717 s: Kun magneetti menee käämin sisään, vuo kasvaa edelleen, mutta vuon muutosnopeus alkaa pienentyä, joten jännite pienenee.

2,717 s: Kun magneetti on keskellä käämiä, magneettivuo on suurimmillaan. Vuon muutosnopeus ja indusoitunut jännite ovat nollia.

2,717...2,743 s: Kun magneetti jatkaa putoamistaan, magneettivuon muutosnopeus on positiivinen ja sen arvo kasvaa. Indusoitunut jännite on silloin negatiivinen. Vuon muutosnopeus jatkaa kasvamistaan, kunnes magneetti on kokonaan poistunut käämin sisältä.

2,743 s: Negatiivisen jännitteen huippuarvo on  $-0,76$  V.

2,742...2,805 s: Vuon muutosnopeus alkaa pienentyä, ja samalla negatiivinen jännite pienenee ja saavuttaa lopulta arvon nolla.

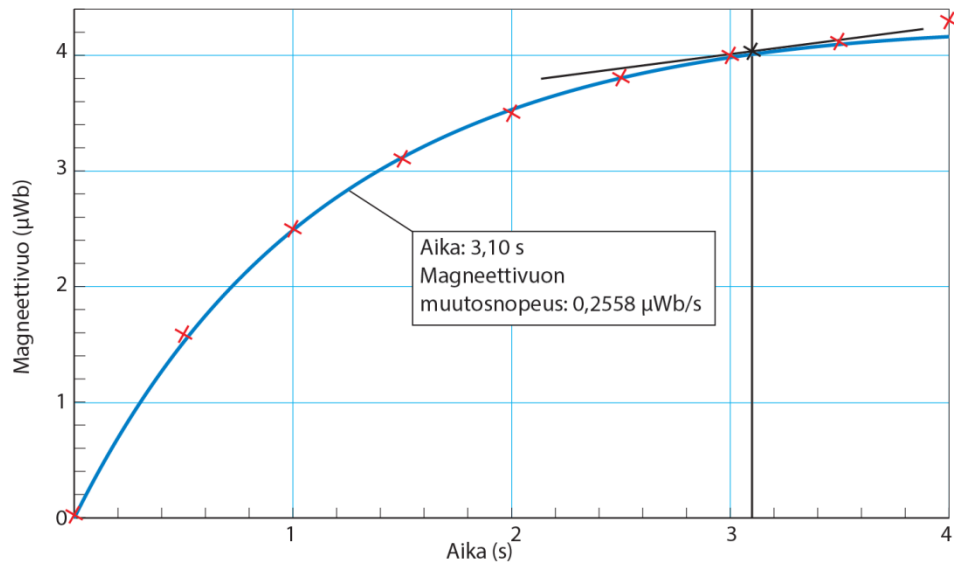
2,805 s... Jännite on vakio likimain 0,02 V. Magneetti on niin kaukana käämistä, että magneetin liike ei indusoi käämiin jännitettä. Jännitteen 0,02 V syy on sama kuin käyrän vasemmassa reunassa.

Kuvaajasta huomataan, että käyrän jälkimmäinen piikki on kapeampi kuin edellinen. Tämä johtuu siitä, että magneetin nopeus kasvaa sen pudotessa. Tästä johtuen vuon muutosnopeus on jälkimmäisen piikin kohdalla suurempi kuin edellisen piikin kohdalla.

Näin ollen jälkimmäinen jännitepiikki on korkeampi kuin edellinen.

(Käyrillä näkyvät pienet epäsäännöllisyydet voivat johtua siitä, että magneetti on pudotessaan koskettanut lasiputkeen ja tällöin magneetin asento on muuttunut. Käyrän pieni kulmikkuus johtuu mittausohjelmasta.)

- 11-9.** Viedään taulukon arvot mittausohjelmaan. Sovitetaan mittauspisteisiin käyrä.



**a)** Lasketaan keskimääräinen jännite.

Interpolaatiolaskurin avulla saadaan:

$$\Phi(1,2 \text{ s}) = 2,78465 \mu\text{Wb} \text{ ja } \Phi(2,9 \text{ s}) = 3,95616 \mu\text{Wb}.$$

Keskimääräinen induktiojännite aikavälillä 1,2...2,9 s on

$$e_k = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{3,95616 \mu\text{Wb} - 2,78465 \mu\text{Wb}}{2,9 \text{ s} - 1,2 \text{ s}} \approx -0,69 \mu\text{V}.$$

b) Ohjelma antaa hetkellä 3,1 s tangentin kulmakertoimeksi

$$\frac{d\Phi}{dt} \approx 0,2558 \frac{\mu\text{Wb}}{\text{s}}.$$

Näin ollen hetkellä 3,1 s johdinsilmukkaan indusoitunut jännite on

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \approx -0,2558 \frac{\mu\text{Wb}}{\text{s}} \approx -0,26 \mu\text{V}.$$

**11-10. a)** Piikkilanka-aitaa voidaan mallintaa yhtenäisellä johdinsilmukalla, johon indusoituvan jännitteen suuruus on

$$e_k = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \frac{A\Delta B}{\Delta t} = \frac{(30,0 \cdot 10^3 \text{ m})^2 \cdot 0,010 \cdot 52 \cdot 10^{-6} \text{ T}}{20,0 \text{ s}} = 23,4 \text{ V} \approx 23 \text{ V}.$$

b) Silmukan resistanssi on

$$R = \rho \frac{l}{A} = 0,180 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m} \cdot \frac{4 \cdot 30000 \text{ m}}{\pi \cdot (1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 3,05577 \text{ k}\Omega.$$

Silmukkaan indusoituvan sähkövirran suuruus on

$$i = \frac{e}{R} = \frac{23,4 \text{ V}}{3,05577 \cdot 10^3 \Omega} \approx 7,7 \text{ mA}.$$

**11-11. a)** Koska magneettivuon muutos on tasainen, silmukkaan indusoitunut jännite aikavälillä 0,0...0,50 s on vakio:

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1} = -\frac{0,0\mu\text{Wb} - 4,0\mu\text{Wb}}{0,50\text{s} - 0,00\text{s}} = 8,0\mu\text{V}.$$

b) Koska indusoitunut jännite on vakio, silmukassa kulkeva sähkövirta on myös vakio:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{8,0\mu\text{V}}{1,5\text{m}\Omega} \approx 5,3\text{mA} .$$

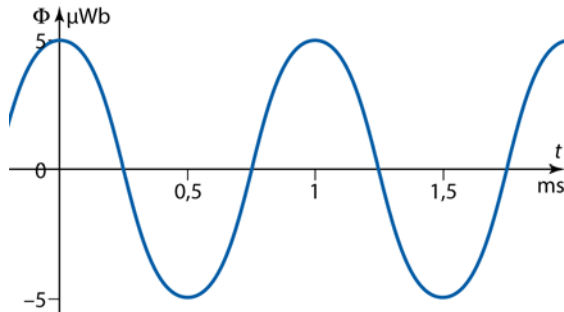
Siksi myös hetkellä 0,20 s virta on 5,3 mA.

c) Jotta silmukka liikkuisi vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan on oltava  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ . Kun vetävän voiman  $\vec{F}$  suunta on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö  $F - F_m = 0$  eli  $F = F_m$ . Koska magneettinen voima on

$$F_m = i l B \text{ ja sähkövirta } i = \frac{e}{R}, \text{ silmukkaa on vedettävä voimalla}$$

$$F = i l B = \frac{e}{R} l B = \frac{e l \Phi}{R A} = \frac{8,0\mu\text{V} \cdot 0,080\text{m} \cdot 4,0\mu\text{Wb}}{1,5\text{m}\Omega \cdot (0,080\text{m})^2} \approx 0,27\mu\text{N} \text{ oikealle.}$$

11-12. a) Magneettivuon kuvaaja:



b) Induktiolain perusteella induktiojännite on magneettivuon aikaderivaatan vastaluku:

$$\begin{aligned} e &= -N \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -3600 \cdot \frac{d\left(5,0 \mu\text{Wb} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{s}\right)\right)}{dt} \\ &= -3600 \cdot \frac{d\left(5,0 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{s}\right)\right)}{dt} \\ &= -3600 \cdot 5,0 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(-\sin\frac{2\pi t}{s}\right) \\ &= 0,113097 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{s}\right). \end{aligned}$$

$$1) e(0,25 \text{ s}) = 0,113097 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot 0,25 \text{ s}}{s}\right) \approx 0,11 \text{ V}.$$

$$2) e(0,50 \text{ s}) = 0,113097 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot 0,50 \text{ s}}{s}\right) = 0 \text{ V}.$$

$$3) e(0,75 \text{ s}) = 0,113097 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot 0,75 \text{ s}}{s}\right) \approx -0,11 \text{ V}.$$

$$4) e(1,4 \text{ s}) = 0,113097 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot 1,4 \text{ s}}{s}\right) \approx 0,066 \text{ V}.$$

Tehtävä on mahdollista ratkaista myös graafisesti piirtämällä annettuja hetkiä vastaavat käyrän tangentit ja määrittämällä tangenttien kulmakertoimet. Esimerkiksi hetkellä 0,50 s käyrän tangentti on vaakasuora, joten sen kulmakerroin on nolla ja jännite on 0 V.

**11-13.** Oletetaan, että hetkellä  $t = 0$  s silmukan etureuna on kentän reunan kohdalla. Silmukka liikkuu vakionopeudella magneettikentän reunalta kokonaan kenttään ajassa

$$t_1 = \frac{a}{v} = \frac{0,25 \text{ m}}{0,20 \text{ m/s}} = 1,25 \text{ s}.$$

Muuttuva magneettivuo indusoi silmukkaan jännitteen, joka synnyttää silmukkaan sähkövirran.

Aikavälillä  $0,0 \dots 1,25$  s silmukan läpäisevä magneettivuo muuttuu tasaisesti, joten indusoituva keskimääräinen jännite on vakio:

$$e_k = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta A \cdot B}{\Delta t} = -\frac{(0,25 \text{ m} \cdot 0,25 \text{ m} - 0,0 \text{ m}^2) \cdot 15 \text{ mT}}{1,25 \text{ s}} = -7,5 \cdot 10^{-4} \text{ V}.$$

Tällöin johtimessa kulkeva sähkövirta on

$$i = \frac{e_k}{R} = \frac{-7,5 \cdot 10^{-4} \text{ A}}{1,25 \Omega} = -6,0 \cdot 10^{-4} \text{ A} = -0,60 \text{ mA}.$$

Silmukka on kokonaan magneettikentässä ajan

$$t_2 = \frac{l_2}{v} = \frac{0,75 \text{ m} - 0,25 \text{ m}}{0,20 \text{ m/s}} = 2,5 \text{ s}.$$

Näin ollen aikavälillä  $1,25 \dots 3,75$  s magneettivuo ei muutu, ja siksi indusoitunut jännite on nolla, samoin sähkövirta.

Silmukka poistuu magneettikentästä ajassa  $t_3 = \frac{a}{v} = \frac{0,25 \text{ m}}{0,20 \text{ m/s}} = 1,25 \text{ s}.$



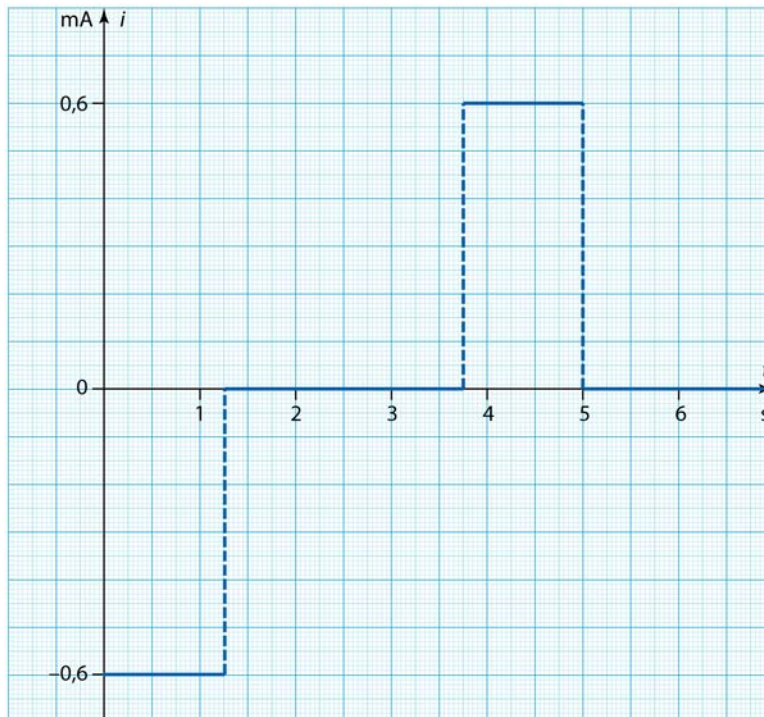
Aikavälillä 3,75... 5,0 s magneettivuo muuttuu tasaisesti, joten induoituva keskimääräinen jännite on vakio:

$$e_k = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta AB}{\Delta t} = -\frac{(0,0\text{ m}^2 - 0,25\text{ m} \cdot 0,25\text{ m}) \cdot 15\text{ mT}}{1,25\text{ s}} = 7,5 \cdot 10^{-4}\text{ V}.$$

Johtimessa kulkevan sähkövirran suuruus on tällöin

$$i = \frac{e_k}{R} = \frac{7,5 \cdot 10^{-4}\text{ A}}{1,25\Omega} = 6,0 \cdot 10^{-4}\text{ A} = 0,60\text{ mA}.$$

Hetkellä 5,0 s silmukka poistuu kokonaan magneetikentästä, joten magneettivuo ei muutu, induoitunut jännite on nolla ja samoin sähkövirta.



## TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 12-1.** a) Pyörrevirroilla tarkoitetaan sähkövirtoja, jotka syntyvät muuttuvassa magneettikentässä olevaan metallikappaleeseen. Ne aiheuttavat magneettikentän, joka pyrkii heikentämään kasvavaa ulkoista magneettikenttää ja vahvistamaan pienenevää ulkoista magneettikenttää.
- b) Ei voi syntyä. Pyörrevirrat syntyvät metallikappaleessa aina sellaiseen alueeseen, jossa magneettikentän magneettivuo muuttuu. Tämä muutos voi aiheutua joko kappaleen liikkeestä tai magneettikentän muutoksesta (magneetti voi liikkua kappaleen suhteen).
- c) Pyörrevirrat aiheuttavat tehohäviöitä mm. generaattoreissa, moottoreissa ja muuntajien rautasydämissä, koska pyörrevirtojen takia osa energiasta muuntuu esimerkiksi muuntajan rautasydämen sisäenergiaksi eli rautasydän lämpenee.
- d) Esimerkiksi muuntajan rautasydämen voi valmistaa useista eristetyistä liuskoista, samoin metallin kokonaispinta-alaa voi joissakin tapauksissa pienentää tekemällä levystä kampamaisen.
- 12-2.** a) Pyörrevirtojen lämpövaikutuksien sovelluksia:
- Pyörrevirtojen lämpövaikutusta käytetään hyödyksi sulatettaessa induktiouuneissa metalleja. Sulatettavat metallikappaleet, esimerkiksi rautaromu, sijoitetaan lämpöä kestäväan eristeastiaan. Astian ympärillä on käämi. Käämissä kulkevan vaihtovirran taajuus on noin 1 kHz. Metalleissa syntyvät pyörrevirrat nostavat lämpötilan metallin resistanssin takia sen sulamispisteeseen.
  - Induktioliesien keittolevyissä on käämit, joissa kulkevat vaihtovirrat synnyttävät pyörrevirtoja levyllä olevaan metallisen astian pohjaan. Kuumenevasta astiasta lämpö siirtyy astiassa olevaan veteen tai ruokaan.

b) Induktiovirtojen voimavaikutuksien teknisiä sovelluksia:

- Junissa on kiskojen molemmin puolin pareittain asennettuja sähkömagneetteja, joihin kytketään junaa jarrutettaessa sähkövirta. Tällöin magneettivuo läpäisee kiskon, joten junan liikkuaessa kiskoihin indusoituu pyörrevirtoja. Kiskoissa kulkevat pyörrevirrat synnyttävät magneettisen voiman, joka jarruttaa sähkömagneettien ja samalla junan liikettä.
- Pyörrevirtoja hyödynnetään myös autojen ja moottoripyörien nopeusmittareissa estämään osoittimen heilahtelua.
- Tarkkojen vaakojen heilahtelua vaimennetaan induktiojarruilla, jolloin ne asettuvat mahdollisimman nopeasti tasapainoasemaansa.

**12-3.** a) Voimakas magneetti vierii alumiinilevyllä hitaammin kuin muovilevyllä. Alumiini on sähköä johtava aine, ja sen vuoksi siihen muodostuu vierivän magneetin vaikutuksesta pyörrevirtoja. Pyörrevirtojen synnyttämä magneettikenttä aiheuttaa magneettiin magneettisen voiman, joka hidastaa magneetin liikettä. Muovi ei johda sähköä, joten sen tapauksessa ei tapahdu vastaavaa ilmiötä.

b) Teräskuulien liikkeeseen ei liity magneettisia vaikutuksia, joten ne liikkuvat alumiinilevyllä ja muovilevyllä samalla tavalla.

**12-4.** Tien päällysteen alle, noin 30–60 metrin etäisyydelle liikennevaloista, asennetaan virtapiiri, jossa on anturi ja sähköjohdot, jotka synnyttävät ympärilleen magneettikentän. Kun auto ajaa magneettikenttään, auton runkoon indusoituu pyörrevirtoja. Nämä synnyttävät oman magneettikenttensä, johon anturi reagoi. Tästä saatava signaali ohjaa liikennevaloja. Muitakin kuin induktioon perustuvia ohjaamislaitteita on käytössä.

- 12-5.** Induktioliesissä pyörrevirrat kuumentavat suoraan liedelle asetetun metallikattilan pohjaa. Lieden keraaminen pinta johtaa huonosti lämpöä lieden muihin osiin, joten energiaa menee vain vähän hukkaan. Induktiolevyn pinta ei kuumene yhtä paljon kuin metalliset sähkölevyt. Ruokien kuumentaminen induktioliedellä edellyttää metallisten astioiden käyttöä, koska pyörrevirtojen syntyminen edellyttää materiaalilta hyvää sähköjohtavuutta.

Vaikka teoriassa keittolevyillä olisi mahdollista käyttää myös muita kuin metallisia keittoastioita, lasin ja keramiikan huonon lämmönjohtavuuden ja rikkoutumisvaaran vuoksi kaikki liedelle suunnitellut astiat ovat metallisia, joten induktioliesi ei tässäkään mielessä ole perinteistä lämmön johtumiseen perustuvaa liettä huonompi. Induktioliesien etuja ovat myös nopeus ja hyvä säädettävyys. Induktioliesien energiankulutus on pienempi kuin perinteisten liesien.

- 12-6. a)** Koulussa kyseinen demonstraatio tehdään yleensä siten, että alumiinilevyn annetaan heilahdella voimakkaan magneetin napojen välissä. Heilurissa oleva levy voi olla mitä tahansa sähköä johtavaa materiaalia, mutta ei kuitenkaan rautaa. Jos levy on rautaa (ferromagneettista ainetta), se ei heilahtele ollenkaan, vaan tarttuu välittömästi kiinni magneetin napoihin. Muissa sähköä johtavissa materiaaleissa syntyy pyörrevirtoja, koska levyn heilahdellessa sen lävistävä magneettivuo muuttuu. Lenzin lain mukaan pyörrevirtojen suunta on sellainen, että niiden synnyttämä magneettikenttä pyrkii vastustamaan ulkoista (vuon) muutosta eli heilurin heilahtelua. Kun heiluri on heilahtamassa kestopagneetin napojen väliin, pyörrevirtojen suunta on sellainen, että levy hylkii kestopagneettia. Kun heiluri on heilahtamassa ulos magneetin napojen välistä, pyörrevirtojen suunta vaihtuu ja magneetti vetää levyä puoleensa. Siksi levyn heilahtelu hidastuu voimakkaasti.

b) Hopealevy pysähtyy nopeammin kuin lyijylevy, koska hopealla on parempi sähkönjohtavuus kuin lyijyllä ja siksi siihen muodostuvat pyörrevirrat ovat voimakkaampia.

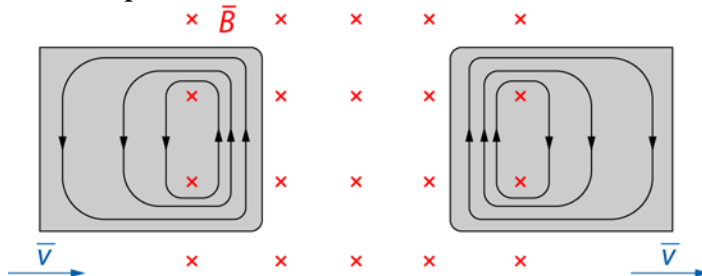
**12-7. a)** Kun magneetti alkaa pudota kupariputkessa, magneetin putoamisnopeus alkaa hidastua: hidastuminen johtuu pyörrevirtojen aikaansaamista magneettikentistä ja magneettisten voimien putoamista hidastavasta vaikutuksesta. Lopulta magneettiin kohdistuva paino on yhtä suuri kuin pyörrevirtojen aikaansaama magneettinen voima, ja putoaminen muuttuu tasaiseksi.

b) Aluksi voima-anturi näyttää putkeen kohdistuvan painon. Kun magneetti pudotetaan, magneetin nopeus kasvaa ja magneetin ja putken välinen magneettinen vuorovaikutus aiheuttaa magneettiin ylöspäin kohdistuvan voiman, joten Newtonin III lain mukaan putkeen kohdistuu vastavoima alaspäin. Tämän takia voiman suuruus alkaa kasvaa. Lopulta magneetti putoaa vakionopeudella ja voiman kuvaaja on vaakasuora.

**12-8.** Väite ei pidä paikkansa.

Suurin vetävä voima tarvitaan silloin, kun levy menee magneettikenttään ja poistuu siitä. Tällöin magneettivuo muuttuu levyn suhteen ja levyyn indusoituu sähkövirtoja, joiden aiheuttama magneettikenttä vastustaa vuo muutosta. Kun levy on kokonaan magneettikentässä, magneettivuo ei muutu ja levyn liikettä vastustavaa voimaa ei ole.

**12-9.** Kuvaan on merkitty sähkövirran suunnat, jotka saadaan oikean käden säännön perusteella.



- 12-10. a)** Kun metallinilmaisimen lähellä ei ole metalliesinettä, vastaanotinkäämiin 2 ei indusoidu jännitettä, koska lähetinkäämin 1 vaihtovirran synnyttämän magneettikentän muuttuva magneettivuo käämin 2 läpi on nolla systeemin geometriasta johtuen.
- b)** Kun metallinilmaisimen lähellä on metalliesine M, lähetinkäämin 1 magneettikenttä muuttuu ja metalliesineeseen M indusoituu pyörrevirtoja. Niiden aikaansaama muuttuva magneettikenttä menee osittain vastaanotinkäämin 2 läpi. Käämiin indusoituu jännite. Millivolttimittari osoittaa syntyvän jännitteen.
- c)** Induktiojännite vastaanotinkäämissä 2 on sitä suurempi, mitä voimakkaampia metalliesineeseen syntyvät pyörrevirrat ovat. Pyörrevirrat ovat taas sitä voimakkaampia, mitä parempi metallin sähkönjohtavuus on ja mitä suurempi esine on.
- 12-11. a)** Metallilevyyn syntyy pyörrevirtoja. Pyörrevirrat synnyttävät metallilevyyn vastakkaissuuntaisen magneettikentän sauvamagneetin kenttään nähden, ja magneetin pyöriminen hidastuu. Muovilevy ei vaikuta magneetin pyörimiseen; siihen ei synny pyörrevirtoja.
- b)** Kytkimen sulkeminen synnyttää hetkeksi käämiin kasvavan sähkövirran ja samalla syntyy hetkellisesti käämin rautasydämeen kasvava magneettivuo. Vuon kasvu indusoi alumiinirengaaseen pyörrevirtoja. Lenzin lain mukaisesti pyörrevirtojen suunta on sellainen, että niiden aiheuttama magneettikenttä on vastakkaissuuntainen käämin aiheuttamaan kenttään nähden. Tästä aiheutuu renkaan ja rautasydämen välille magneettinen hylkimisvoima, jonka takia rengas lennähtää ilmaan.
- 12-12.** Vanhemmissa sähkönkulutusmittareissa mittarin herkkäliikkeeseen akseliin on kiinnitetty yhtenäinen metallilevy (alumiinilevy), joka pyörii sähkömagneettien aiheuttaman ulkoisen muuttuvan magneettikentän

aiheuttaman momentin vuoksi. Sähköverkkoa kuormittava vaihtovirta synnyttää mittarin metallilevyn pyörrevirtoja, jotka pyörittävät levyä. Metallilevyn pyöriminen on verrannollinen kulkevaan tehoon. Metallilevyn akseli on kytketty kierroslaskuriin ja mittarin näyttöön.

Uudemmat mittarit toimivat elektronisesti. Niissä on mikroprosessorit, jotka mittaavat vaihejännitteet ja eri vaiheissa kulkevat sähkövirrat, joista saadaan tieto kulutetusta sähkötehosta. Kun tiedetään mittausten aikaväli, voidaan laskea kulutettu energia.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**13-1.** a) i) Silmukan läpi kulkeva magneettivuo on suurin piirroksessa 3.

ii) Silmukan läpi kulkeva magneettivuo on pienin piirroksessa 1.

b) i) Lähdejännite on suurin piirroksessa 1.

ii) Lähdejännite on pienin (nolla) piirroksessa 3.

**13-2.** Kohdassa a lähdejännite saavuttaa huippuarvonsa, koska käämin silmukoiden taso on magneettikentän suuntainen (käämin magneettikentän kenttäviivat ovat kohtisuorassa ulkoista magneettikenttää vastaan).

Kohdassa b lähdejännite on nolla, koska käämin silmukoiden taso on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan (käämin magneettikentän kenttäviivat ovat samansuuntaiset ulkoisen magneettikentän kanssa).

Kohdassa c lähdejännite kasvaa, joten käämin silmukoiden taso on vinossa magneettikenttää vastaan.

**13-3.** a) Generaattorin toiminta perustuu sähkömagneettiseen induktioon. Induktion edellyttämä muuttuva magneettikenttä saadaan pyörittämällä käämejä voimakkaassa magneettikentässä. Generaattorin avulla mekaaninen energia muunnetaan sähköksi.

b) Voimalaitoksessa energialähteestä vapautuvan energian avulla pyöritetään generaattoria, jossa mekaaninen energia muuntuu induktioilmion vuoksi sähköksi. Vesivoimalaitoksessa generaattoria pyörittää virtaava vesi, tuulivoimalaitoksessa liikkuva ilma. Ydinvoimalaitoksessa ydinreaktioissa vapautuva energia höyrystää vettä



ja korkeapaineinen vesihöyry pyörittää generaattoria.

**13-4.** Kun kuntopyörää poljetaan, käämi pyörii paikallaan olevan kestopagneetin ympärillä. Tällöin polkeminen on raskaampaa kuin normaalisti, koska pyöräilijän jalkojen kosketusvoima tekee työtä synnyttääkseen käämiin vaihtojännitteen ja sähkövirran, joka lataa puhelimen akkua.

**13-5. a)** Pyörimisnopeuden kasvattaminen lisää vaihtojännitteen taajuutta. Jännitteen suuruuteen vaikuttavat magneettivuon tiheys, käämin pinta-ala ja kulmanopeus (ja käämin kierrosmäärä, tässä tehtävässä  $N=1$ ).

**b)** Koska jaksonaika on  $0,020\text{ s} = 20\text{ ms}$ , jännitteen taajuus on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20\text{ ms}} = 50\text{ Hz} . \text{ Silmukan pyörimisnopeus on } 50\text{ r/s}.$$

**c)** Jännitteen huippuarvo on  $e_0 = 3,2\text{ V}$ .

**d)** Huippuarvon yhtälöstä  $e_0 = NAB\omega$  saadaan magneettivuon tiheyden suuruudeksi

$$B = \frac{e_0}{NA\omega} = \frac{e_0}{NA \cdot 2\pi f} = \frac{3,2\text{ V}}{1 \cdot 125 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2 \cdot 2\pi \cdot 50\text{ 1/s}} \approx 0,81\text{ T} .$$

**e)** Kun silmukka on kiertynyt niin, että sen taso muodostaa  $15$  asteen kulman magneettikentän suunnan kanssa, silmukan asentoa kuvaavan kulman  $\alpha$  suuruus on  $\alpha = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ .

Jännitteen hetkellinen arvo, kun silmukan kiertokulma on  $75^\circ$ , on

$$e = e_0 \sin(\omega t) = e_0 \sin \alpha = 3,2\text{ V} \cdot \sin 75^\circ \approx 3,1\text{ V} .$$

- 13-6. a)** Indusoitunut jännite on  $e = e_0 \sin \alpha$ , jossa  $\alpha$  on magneettikentän ja silmukan tason normaalin välinen kulma. Silmukan tason ollessa kentän suuntainen kulma  $\alpha = 90^\circ$  ja  $\sin 90^\circ = 1$ , jolloin jännite on yhtä suuri kuin huippujännite eli

$$e_0 = NAB\omega = NAB \cdot 2\pi f = 1 \cdot (0,15 \text{ m})^2 \cdot 13 \text{ mT} \cdot 2\pi \cdot \frac{6600}{60} \cdot \frac{1}{\text{s}} \approx 0,20 \text{ V}.$$

- b)** Kun silmukan taso on magneettikenttää vastaan kohtisuorassa, kulma  $\alpha = 0^\circ$  ja  $\sin \alpha = 0$ . Tällöin magneettivuo silmukan läpi on hetkellisesti nolla ja jännite on nolla.

- 13-7. a)** Käämin läpi kulkeva magneettivuo muuttuu jaksollisesti.

$$\text{Kulmanopeus on } \omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 240 \frac{1}{\text{s}} = 480\pi \frac{1}{\text{s}}.$$

Magneettivuon yhtälö on

$$\begin{aligned} \Phi &= A_{\perp} B = A \cos \alpha \cdot B = AB \cos \omega t \\ &= 0,624 \text{ m}^2 \cdot 0,42 \text{ T} \cdot \cos\left(480\pi \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \\ &= 0,26208 \text{ Wb} \cdot \cos\left(1507,96 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right). \end{aligned}$$

- b)** Induktiolain mukaan käämiin indusoitunut ajasta riippuva lähdejännite on

$$\begin{aligned} e &= -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d(AB \cos \omega t)}{dt} \\ &= -N \frac{ABd(\cos \omega t)}{dt} = -NAB\omega(-\sin \omega t) = NAB\omega \sin \omega t. \end{aligned}$$

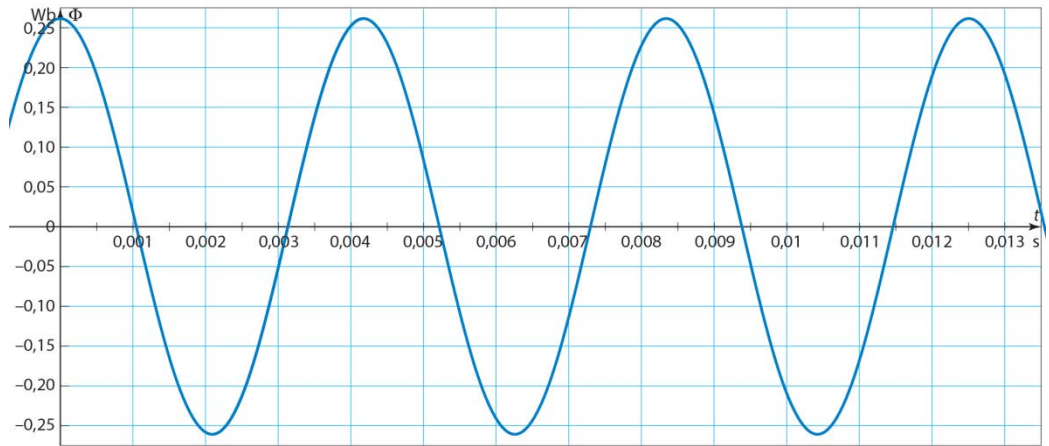
Jännite ajan funktiona on

$$e = NAB \cdot 2\pi f \sin(\omega t)$$

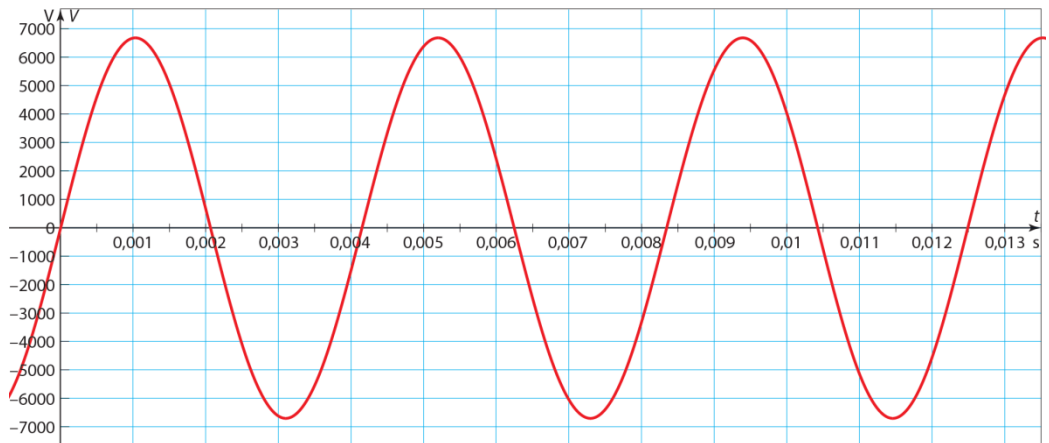
$$= 17 \cdot 0,624 \text{ m}^2 \cdot 0,42 \text{ T} \cdot 2\pi \cdot 240 \frac{1}{\text{s}} \cdot \sin\left(480\pi \cdot \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \approx 6718,52 \cdot \sin\left(1507,96 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \text{ V.}$$

c) Kuvaajat:

Magneettivuo:



Jännite:



d) Kun magneettivuo saa itseisarvoltaan suurimman arvonsa, jännite saa pienimmän arvonsa eli on nolla. Tällöin käämin silmukoiden tasot ovat kohtisuorassa magneettikenttään nähden.

Kun magneettivuo saa pienimmän arvonsa (nollan), jännite saa suurimman arvonsa. Tällöin käämin silmukoiden tasot ovat magneettikentän suuntaiset.

**13-8.** a) Kun johdinsilmukkaa pyöritetään homogeenisessa magneettikentässä, magneettivuo  $\Phi$  silmukan läpi muuttuu pyörimisen tahdissa. Pyörivään silmukkaan indusoituu induktiolain mukainen jännite  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ .

b) Kun johdinsilmukkaa pyöritetään homogeenisessa magneettikentässä niin, että kulmanopeus  $\omega$  on vakio, magneettivuo muuttuu jaksollisesti. Induktiojännite on suoraan verrannollinen magneettivuon muutosnopeuteen induktiolain mukaisesti.

Induktiolain mukaan silmukkaan indusoitunut ajasta riippuva lähdejännite on

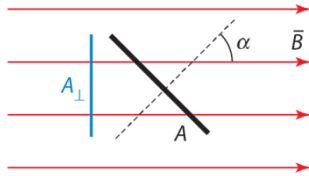
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(AB\cos\omega t)}{dt} = -\frac{ABd(\cos\omega t)}{dt} = -AB\omega(-\sin\omega t) = AB\omega\sin\omega t,$$

jossa  $B$  on magneettivuon tiheyden suuruus ja  $A$  silmukan pinta-ala.

**13-9.** a) Sauvamagneetin ympärillä on magneettikenttä. Kun magneetti pyörii, sen magneettikenttä pyörii magneetin mukana ja käämiin läpäisevä magneettivuo  $\Phi = AB$  muuttuu. Induktiolain mukaan käämiin syntyy jännite  $e = -N\frac{d\Phi}{dt}$ .

b) Käämin läpäisevä magneettivuo on

$$\Phi = A_{\perp} B = A \cos \alpha \cdot B = AB \cos \alpha = AB \cos(\omega t).$$



Käämiin indusoituva jännite on

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d(AB \cos(\omega t))}{dt} = -N(-AB\omega \sin(\omega t)) = NAB\omega \sin(\omega t).$$

Koska  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ , jännitteen huippuarvo on  $e_0 = NAB\omega$ .

Kuvaajasta

– jännitteen huippuarvo on  $|e_0| = 16,5 \text{ mV}$  ja

– viiden jakson aika on 1,06 s, joten jakson aika  $T = 0,212 \text{ s}$ .

Koska silmukka on neliön muotoinen, sen pinta-ala on  $A = (0,042 \text{ m})^2$ .

Käämin kierrosten lukumäärä on 300 ja kulmanopeus on

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{0,212 \text{ s}} = 29,6377 \frac{1}{\text{s}}.$$

Magneettivuon tiheys on käämin kohdalla vakio.

Yhtälöstä  $e_0 = NAB\omega$  magneettivuon tiheys on

$$B = \frac{e_0}{NA\omega} = \frac{0,0165 \text{ V}}{300 \cdot (0,042 \text{ m})^2 \cdot 29,6377 \frac{1}{\text{s}}} \approx 1,1 \text{ mT}.$$

c) i) Käämiin indusoituva jännite on  $e = NAB\omega \sin \alpha$ , joka saa huippuarvonsa, kun  $\sin \alpha = \pm 1$ . Tällöin kulma  $\alpha = 90^\circ$ . Kuva C vastaa tätä tilannetta.

ii) Jännite  $e$  on nolla, kun  $\sin \alpha = 0$ . Tällöin kulma  $\alpha = 0^\circ$ . Kuva A vastaa tätä tilannetta.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**14-1.** Tasavirtaa saadaan paristosta tai tasajännitelähteestä. Tasavirtapiirissä tasavirran suunta on pariston (jännitelähteen) positiiviselta navalta negatiiviselle navalle. Niin kauan kuin pariston jännite pysyy vakiona, sähkövirran suuruus on virtapiirissä vakio.

Vaihtovirtaa saadaan vaihtojännitelähteestä. Vaihtovirtapiirissä sähkövirran suuruus ja suunta vaihtelevat jaksollisesti. Generaattorilla tuotettu vaihtovirta on sinimuotoista.

**14-2. a)** Maapallolla on käytössä pääsääntöisesti kaksi erilaista vaihtosähköjärjestelmää:

110–120 V, 60 Hz (esim. Pohjois- ja Keski-Amerikka)

220–240 V, 50 Hz (valtaosa maapallon maista).

Myös verkkopistokkeet ovat erilaisia.

Joitakin maita:

Japani 110 V, 60 Hz

Ruotsi 230 V, 50 Hz

Iso-Britannia 230 V, 50 Hz

Brasilia 230 V, 50 Hz ja 110 V, 60 Hz

**b)** Tietokoneiden (muuntajien) valmistajat ovat huomioineet sen, että muuntajan käyttöjännite voi vaihdella eri puolilla maapalloa. Myös muuntajan verkkopistokkeen malli riippuu tietokoneen toimitusmaasta. Matkalle lähtiessä voi ostaa adapterisarjan, jolla laitteen voi kytkeä sähköverkkoon missä tahansa maailmassa.

c) Aggregaatti on laite, joka tuottaa vaihtojännitettä bensiini- tai dieselmoottorin avulla. Aggregaattia käytetään mm. kesämökeillä, maatiloilla ja sairaaloissa silloin kun sähköverkosta saatava jännite on syystä tai toisesta pois käytöstä.

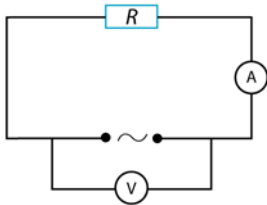
14-3. a) Vaihtojännitteen huippuarvo on  $u_0 = 4,0 \text{ V}$ .

b) Jännitteen tehollinen arvo on  $U = \frac{u_0}{\sqrt{2}} = \frac{4,0 \text{ V}}{\sqrt{2}} \approx 2,8 \text{ V}$ .

c) Kuvassa jaksonaika on  $T = 0,020 \text{ s}$ .

d) Vaihtojännitteen taajuus on  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,020 \text{ s}} = 50 \text{ Hz}$ .

14-4. a)



b) Vaihtojännitteen taajuus on  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,020 \text{ s}} = 50 \text{ Hz}$ .

c) Teholliset arvot ovat

$$U = \frac{u_0}{\sqrt{2}} = \frac{5,7 \text{ V}}{\sqrt{2}} \approx 4,0 \text{ V ja}$$

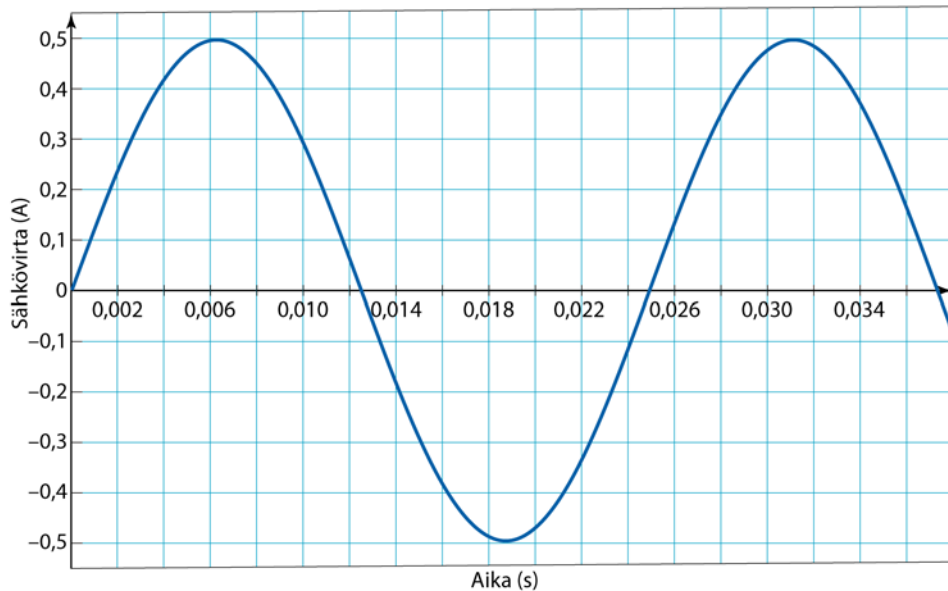
$$I = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = \frac{0,27 \text{ A}}{\sqrt{2}} \approx 0,19 \text{ A.}$$



d) Vastuksen resistanssi on  $R = \frac{u_0}{i_0} = \frac{5,7\text{ V}}{0,27\text{ A}} \approx 21\Omega$ .

Huomaa, että lukematarkkuus voi hieman vaikuttaa vastauksiin.

14-5. a) Vaihtovirran  $i = 0,495\text{ A} \cdot \sin(2\pi \cdot 40t)$  kuvaaja.



b) Vaihtovirran huippuarvo on  $i_0 = 0,495\text{ A}$  ja tehollinen arvo

$$I = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = \frac{0,495\text{ A}}{\sqrt{2}} \approx 0,35\text{ A}.$$

c) Koska vaihtovirran yhtälö on

$$i = i_0 \sin \omega t = i_0 \sin(2\pi f t) = 0,495\text{ A} \cdot \sin(2\pi \cdot 40t),$$

vaihtovirran taajuus on 40 Hz.

d) Vaihtovirran arvot saadaan joko katsomalla kuvaajasta tai laskemalla vaihtovirran yhtälöstä. Vaihtovirran arvot hetkellä  $t_1 = 23 \text{ ms}$  on  $-0,24 \text{ A}$  ja hetkellä  $t_2 = 36 \text{ ms}$   $0,18 \text{ A}$ .

14-6. a) Vaihtojännitteen tehollinen arvo on  $U = \frac{u_0}{\sqrt{2}}$ , jolloin jännitteen huippuarvo on

$$u_0 = U\sqrt{2} = 230 \text{ V} \cdot \sqrt{2} \approx 330 \text{ V}.$$

b) Laitetta ei voida kytkeä sähköverkkoon, koska sen jännitteenkesto ( $290 \text{ V}$ ) on pienempi kuin sähköverkon hetkellinen maksimijännite ( $330 \text{ V}$ ).

c) Huippuarvo on suurempi kuin tehollinen arvo. Jännitteen huippuarvo on suurin laitteeseen tai kytkentään vaikuttava jännite laitteen käytön aikana.

14-7. a) Indusoitavan jännitteen huippuarvo on

$$e_0 = NAB\omega = 1200 \cdot 150 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 1,2 \text{ T} \cdot \frac{1500}{60} \frac{1}{\text{s}} = 540 \text{ V}.$$

b) Sähkövirran huippuarvo on  $i_0 = \frac{e_0}{R} = \frac{540 \text{ V}}{20,0 \Omega} = 27 \text{ A}$ .

14-8. a) Vastuksen päiden välisen jännitteen huippuarvo on  $u_0 = Ri_0$ , jolloin vastuksen resistanssi on

$$R = \frac{u_0}{i_0} = \frac{120 \text{ V}}{1,2 \text{ A}} = 100 \Omega.$$

b) Vastuksen tuottama energia saadaan yhtälöstä  $E = Pt$ .

Vastuksen tuottama teho on  $P = UI$ , jossa  $U = \frac{u_0}{\sqrt{2}}$  on jännitteen tehollinen arvo ja  $I = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$  sähkövirran tehollinen arvo.

Vastuksen tuottama lämpömäärä on

$$E = Pt = UI t = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i_0}{\sqrt{2}} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot u_0 i_0 t = \frac{1}{2} \cdot 120 \text{ V} \cdot 1,2 \text{ A} \cdot 45 \cdot 60 \text{ s} \approx 190 \text{ kJ}.$$

c) Vastuksen hetkellinen jännitehäviö on  $u = Ri = 100 \Omega \cdot 0,90 \text{ A} = 90 \text{ V}$ .

**14-9.** a) Laitteen sähköteho on  $P = UI$  ja jännitehäviön tehollinen arvo  $U = RI$ , joten  $P = RI \cdot I = RI^2$ .

Vaihtovirran tehollinen arvo on

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{1200 \text{ W}}{24 \Omega}} = 7,07107 \text{ A} \approx 7,1 \text{ A}.$$

b) Vaihtovirran tehollinen arvo on  $I = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$ , joten vaihtovirran huippuarvo on

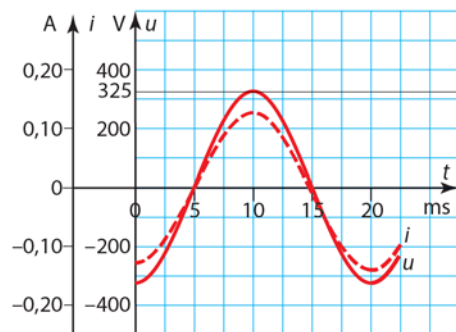
$$i_0 = I\sqrt{2} = 7,07107 \text{ A} \cdot \sqrt{2} = 10 \text{ A}.$$

$$(\text{Tai } i_0 = I\sqrt{2} = \sqrt{\frac{P}{R}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2P}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1200 \text{ W}}{24 \Omega}} = 10 \text{ A}.)$$

**14-10.** Kuvaajasta nähdään, että jännitehäviön huippuarvo on  $u_0 = 325 \text{ V}$ .

$$\text{Sähkövirran huippuarvo on } i_0 = \frac{u_0}{R} = \frac{325 \text{ V}}{2500 \Omega} = 0,13 \text{ A}.$$

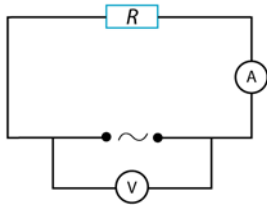
Sähkövirta vaihtelee jaksollisesti (sinimuotoisesti) arvojen  $-0,13 \text{ A}$  ja  $0,13 \text{ A}$  välillä.



Yleismittarin lukema on vaihtovirran tehollinen arvo eli

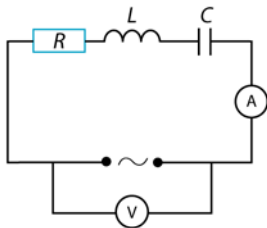
$$I = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = \frac{0,13 \text{ A}}{\sqrt{2}} \approx 92 \text{ mA}.$$

14-11. a)



b) Vastuksen resistanssi saadaan suoran 1 fysikaalisesta kulmakertoimesta. Resistanssi on  $R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{2,0 \text{ V}}{17 \text{ mA}} \approx 120 \Omega$ .

c)

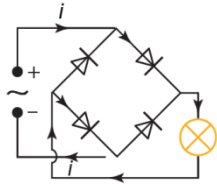


*RCL*-vaihtovirtapiirissä Ohmin laki yleistyy muotoon  $U = ZI$ . Kuvaajan 2 fysikaalinen kulmakerroin on piirin impedanssi eli

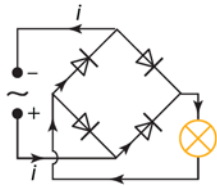
$$Z = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{2,95 \text{ V}}{10 \text{ mA}} \approx 300 \Omega.$$

14-12. Sähkövirta kulkee diodien läpi vain päästösuunnassa. Sähkövirran suunta on ylempää potentiaalista alempaan potentiaaliin eli positiivisesta navasta negatiiviseen napaan.

a) Kun ylempi napa on positiivinen, sähkövirran suunta on kohti alempaa negatiivista napaa. Sähkövirta voi kulkea lampun ja päästösuuntaan kytkettyjen diodien läpi, mutta ei estosuuntaan kytkettyjen diodien läpi. Huomaa, että lähinnä jännitelähdettä olevassa haarautumiskohdassa sähkövirta kulkee pitkin johtimen alempaa haaraa päästösuuntaan kytketyn diodin läpi kohti negatiivista napaa (ei siis kohti positiivista napaa, vaikka diodi siihenkin suuntaan on päästösuunnassa).



b) Kun alempi napa on positiivinen, sähkövirran suunta on kohti ylemmää negatiivista napaa. Sähkövirta voi kulkea lampun ja päästösuuntaan kytkettyjen diodien läpi, mutta ei estosuuntaan kytkettyjen diodien läpi. Huomaa, että lähinnä jännitelähdettä olevassa haarautumiskohdassa sähkövirta kulkee pitkin johtimen ylemmää haaraa päästösuuntaan kytketyn diodin läpi kohti negatiivista napaa (ei siis kohti positiivista napaa, vaikka diodi siihenkin suuntaan on päästösuunnassa).



## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**15-1. a)** Pistorasiaan kytketyssä muuntajassa kulkee vaihtovirta. Vaikka muuntajaa ei kuormiteta, muuntaja lämpenee hieman sydämen pyörrevirtojen ja johtimien resistanssin takia, eli muuntaja kuluttaa hieman energiaa vaikka sitä ei käytettäisikään. Voi arvioida, että yksi kotitalous säästäisi käyttämättömät muuntajat verkosta irrottamalla sähkölaskussaan tyypillisesti noin 4 snt/vuosi.

**b)** Pyörrevirrat aiheuttavat muuntajassa tehohäviötä. Pyörrevirroista johtuvia tehohäviöitä voidaan pienentää rakentamalla muuntajan rautasydän ohuista, toisistaan eristetyistä levyistä, koska silloin pyörrevirtoja syntyy vähemmän.

**c)** Jos muuntaja on ideaalinen, on voimassa yhtälö  $U_1 I_1 = U_2 I_2$ . Koska toisiopuolen jännite  $U_2$  on pienempi kuin ensiöpuolen jännite  $U_1$ , on toisiopuolen sähkövirta  $I_2$  suurempi kuin ensiöpuolen sähkövirta  $I_1$ .

**d)** Muuntajan toiminta perustuu induktioilmiöön eli toisiokäämin läpi menevän magneettikentän vuon täytyy muuttua. Ensiökäämi voi synnyttää rautasydämeen muuttuvan magneettikentän vain, jos siinä kulkee vaihtovirta. Tasavirran synnyttämä magneettikenttä on muuttumaton, joten muuntaja toimii vain vaihtojännitteellä.

**15-2.** Oikeita ovat väitteet b ja d.

**15-3.** Oletetaan muuntaja ideaaliseksi. Yhtälöstä  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$  saadaan

$$\text{ensiöpuolen jännitteeksi } U_1 = U_2 \frac{N_1}{N_2} = 80 \text{ V} \cdot \frac{200}{800} = 20 \text{ V}.$$

Toisiopuolen sähkövirta on

$$I_2 = \frac{U_2}{R} = \frac{80 \text{ V}}{160 \Omega} = 0,5 \text{ A.}$$

Ensiöpuolen sähkövirraksi saadaan yhtälön  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}$  perusteella

$$I_1 = I_2 \frac{N_2}{N_1} = 0,5 \text{ A} \cdot \frac{800}{200} = 2 \text{ A.}$$

#### 15-4. Kuinka suuri on toisiopuolen jännite?

Videolla on annettu tiedot  $N_2 = 12\,000$  r,  $N_1 = 600$  r ja  $U_1 = 230$  V.

Oletetaan muuntajan tehohäviöt pieniksi, jolloin voidaan käyttää

ideaalisen muuntajan muuntosuhteen yhtälöä  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$ . Tästä saadaan

$$\text{toisiopuolen jännitteeksi } U_2 = U_1 \frac{N_2}{N_1} = 230 \text{ V} \cdot \frac{12\,000 \text{ r}}{600 \text{ r}} = 4,6 \text{ kV.}$$

Mikä on valokaari?

Kun kahden elektrodin välillä on suuri sähkökenttä, elektrodien välissä olevan ilman molekyylit ionisoituvat vuorovaikuttaessaan kentän suurienergisten fotonien kanssa ja ilma alkaa johtaa sähköä. Ilmaan muodostuu sähköä johtava kanava, jossa ilma kuumenee voimakkaasti ja lähettää kirkasta valoa. Tätä sanotaan valokaareksi.

Miksi junanvaunun päälle kiipeäminen on kielletty?

Sähköradan ajojohtimissa on 25 kV:n jännite. Junanvaunun katolla ollessaan ihminen on sähköisesti kytkettynä maahan eli hän on nollapotentiaalissa. Ihmisen ja ajojohtimen välillä on silloin voimakas sähkökenttä, joka voi synnyttää valokaaren. Valokaaren kautta kulkee suuri sähkövirta ihmisen läpi vaunuun ja edelleen maahan. Sähkövirta on niin suuri, että se aiheuttaa useimmiten välittömän kuoleman.



**15-5. a)** Mallinnetaan muuntajaa ideaalisella muuntajalla. Koska kierrosten määrä on ensiöpuolella satakertainen toisiopuoleen verrattuna,

toisiojännite on yhtälön  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}$  perusteella sadasosa

ensiöjännitteestä ja toisiopuolen sähkövirta on satakertainen ensiöpuolen sähkövirtaan verrattuna eli  $I_2 = 100I_1$ .

**b)** Kuumennusteho on kääntäen verrannollinen resistanssiin.

Hehkulangan resistanssi on suuri, joten langan läpimenevä virta on pieni. Sähkövirta kuumentaa hehkulankaa teholla  $P = RI^2$ . Lampun hehkulanka kuumenee hehkuvaksi, mutta volframi, josta hehkulanka on valmistettu, on kuumana erittäin kovaa, toisin kuin esimerkiksi naulan valmistusaine rauta. Sen takia hehkulanka ei katkea kuumetessaan.

**15-6. a)** Mallinnetaan muuntajaa ideaalisella muuntajalla. Oikea vaihtoehto on 1) 3,3 V. Jännitteiden suhde on kääntäen verrannollinen sähkövirtojen

suhteeseen eli  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}$ , joten ensiöpuolen jännite on

$$U_1 = \frac{U_2 I_2}{I_1} = \frac{15 \text{ V} \cdot 3,5 \text{ A}}{16 \text{ A}} \approx 3,3 \text{ V}.$$

**b)** Muuntosuhde on  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{3,3 \text{ V}}{15 \text{ V}} = 0,22$ .

**15-7.** Kun vaihtojännite ja vaihtovirta ovat samassa vaiheessa, toisiopuolelle on voimassa yhtälö  $P_2 = U_2 I_2$ . Tästä saadaan toisiokäänin sähkövirran

suuruudeksi  $I_2 = \frac{P_2}{U_2}$ . Mallinnetaan muuntaja ideaalisella muuntajalla.

Ideaalisen muuntajan muuntosuhde on  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}$ , josta saadaan

ensiökämin sähkövirralle yhtälö  $I_1 = I_2 \frac{U_2}{U_1}$ . Sijoitetaan tähän  $I_2 = \frac{P_2}{U_2}$ , jolloin saadaan ensiöpuolen sähkövirraksi

$$I_1 = \frac{P_2}{U_2} \cdot \frac{U_2}{U_1} = \frac{P_2}{U_1} = \frac{11 \text{ W}}{230 \text{ V}} \approx 48 \text{ mA}.$$

**15-8.** Suomessa vaihejännitteen tehollisarvo on 230 V, joten pääjännitteen tehollinen arvo on  $\sqrt{3} \cdot 230 \text{ V}$ .

a) Teho on  $P = UI$ , joten pääjännitteeseen kytketyssä kiukaassa kulkeva tehollinen sähkövirta on

$$I_p = \frac{P}{U_p} = \frac{6,0 \cdot 10^3 \text{ W}}{\sqrt{3} \cdot 230 \text{ V}} \approx 15 \text{ A}.$$

b) Jos vastukset olisi kytketty vaihejännitteeseen, tehollinen sähkövirta olisi

$$I_v = \frac{P}{U_v} = \frac{6,0 \cdot 10^3 \text{ W}}{230 \text{ V}} \approx 26 \text{ A}.$$

c) Kodin sähkötaulua tarkastelemalla selviää, kuinka suuri sähkövirta voi korkeintaan kulkea missäkin piirissä tai laitteessa. Sähkökiukaat kytketään sähköverkkoon kolmivaiheisesti eli kiuas saa sähkövirran kolmen sulakkeen tai suojarleen kautta, joista kukin sallii korkeintaan 16 A:n sähkövirran.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 16-1.** a) WWW eli World Wide Web on internetin palvelumuoto, hypertekstijärjestelmä. Hypertekstiä luetaan selaimella (Crome, Explorer, Firefox, Safari, jne.), joka hakee web-sivuja eli hypertekstillä laadittuja dokumentteja.
- b) http eli Hypertext Transfer Protocol. Selaimet ja WWW-palvelimet käyttävät http:tä tiedonsiirtoon, eli sen avulla selain lähettää pyynnön jollekin palvelimelle, joka vastaa lähettämällä kuvia, ohjelmia, ääntä jne.
- c) IP eli Internet Protocol huolehtii verkossa kulkevien tietoliikennepakettien toimittamisesta perille eli reitittämisestä. Jokaisella internetiin yhdistetyllä laitteella on oma IP-osoitteensa.
- d) WLAN eli Wireless Local Area Network on langaton lähiverkkotekniikka, jolla erilaiset verkkolaitteet voidaan yhdistää toisiinsa ilman kaapeleita. WLANissa tiedonsiirto tapahtuu korkeataajuisilla radioaalloilla. Kannettavat tietokoneet ja monet matkapuhelinmallit käyttävät WLANia internet-yhteyden luomiseen. Tämä vaatii, että lähietäisyydellä on kiinteään tietoliikenneyhteyteen modeemin välityksellä liitetty tukiasema.
- e) Bluetooth on tekniikka matkapuhelimien ja kannettavien tietokoneiden lähietäisyydellä radioaalloilla tapahtuvaan langattomaan kommunikointiin. Se on saanut nimensä viikinkikuningas Harald Sinihampaasta. Sen tunnusmerkki on vanha riimukirjoitusmerkki.

**16-2.** a) Suomen ensimmäinen radiolähetys tapahtui vuonna 1921, jolloin valtioneuvosto myönsi Nuoren Voiman Liiton Radioyhdistykselle oikeuden kokeilutarkoituksessa rakennettavien asemien käyttöön. Vuonna 1923 lähetettiin ensimmäinen julkinen ”gramofonikonsertti” Helsingissä. Vuonna 1924 Suomessa toimi noin kymmenen radioasemaa, joista osa rahoitti toimintaansa mainostuloilla.

Yhtiön O.Y. Suomen Yleisradio – A.B. Finlands Rundradio perustava kokous pidettiin Helsingissä 29.5.1926, ja yhtiö lähetti ensimmäisen ohjelmansa 9.9.1926. Tuota päivää pidetään maamme säännöllisen yleisradiotoiminnan syntymäpäivänä.

b) Suomen ensimmäinen julkinen televisiolähetys lähetettiin Teknillisen korkeakoulun sähkölaboratoriosta vuonna 1955.

c) Internet sai alkunsa vuonna 1969 Yhdysvaltain sotilashallinnon Pentagonin aloitteesta. Internetin kasvu alkoi maailmalla vuonna 1984.

d) Suomen ensimmäinen NMT-puhelu soitettiin Tampereella 1977. Ensimmäinen gsm-puhelu soitettiin vuonna 1991.

e) Suomessa tekstiviesti tuli käyttöön vuoden 1994 aikana, mutta ensin vain verkosta puhelimeen päin. Vuonna 1995 saattoi myös puhelimesta näppäillä tekstiviestejä.

f) Multimediaviestien (mms) eli kuvaa ja ääntä sisältävien viestien lähetys matkapuhelinverkossa alkoi vuonna 2002. Unkarissa avattiin 19.4.2002 maailman ensimmäiset kaupalliset mms-palvelut kuluttajille. Suomessa mms-viestien kaupallinen palvelutarjonta alkoi hieman tämän jälkeen.

g) Suomen ensimmäinen videopuhelu 3G-verkossa soitettiin 19.11.2002.

**16-3.** Sähkömagneettisen värähtelypiirin ominaistaaajuus on

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,0100\text{H} \cdot 2,0 \cdot 10^{-9}\text{F}}} \approx 36\text{kHz}.$$

**16-4.** Värähtelypiirin ominaistaaajuus on  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ , josta saadaan kapasitanssille arvo

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L f_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 15 \cdot 10^{-3}\text{H} \cdot \left(97,7 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}\right)^2} \approx 0,18\text{fF}.$$

**16-5.** a) Taajuus on

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l} = \frac{2,99792 \cdot 10^8\text{m/s}}{2 \cdot 1,00\text{m}} \approx 150\text{MHz}.$$

b) Nopeus on  $v = \frac{s}{t}$ , joten aika on

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1000 \cdot 10^3\text{m}}{2,99792 \cdot 10^8\text{m/s}} \approx 3,3\text{ms}.$$

**16-6.** Piirin ominaisvärähtelytaajuus on  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ .

Vastaanotettava aallonpituus on

$$\lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{c}{\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} = 2\pi c\sqrt{LC}.$$

Lyhin aallonpituus on

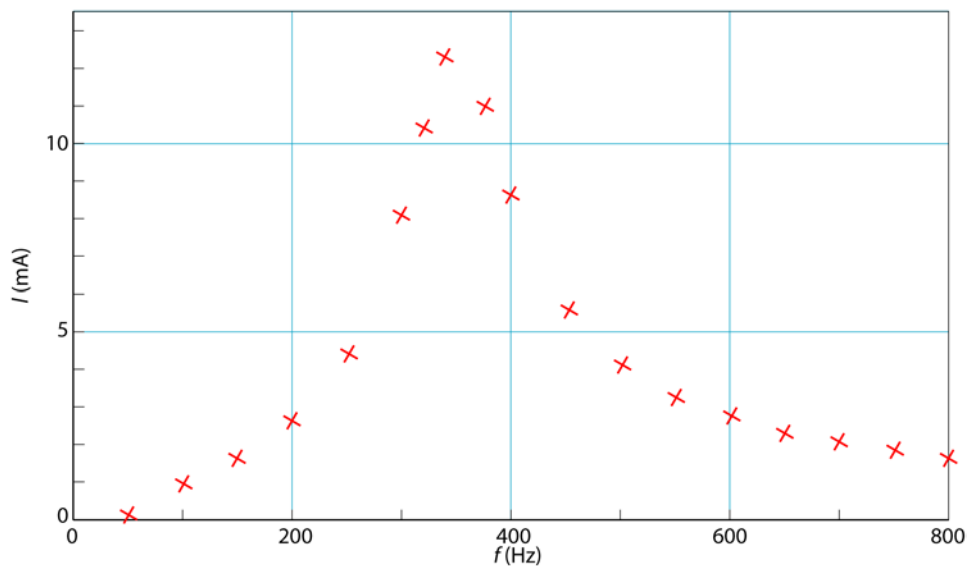
$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{LC} = 2\pi \cdot 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot \sqrt{0,80 \text{ mH} \cdot 2,0 \text{ pF}} \approx 75 \text{ m}.$$

Pisin aallonpituus on

$$\lambda_2 = 2\pi c\sqrt{LC_2} = 2\pi \cdot 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot \sqrt{0,80 \text{ mH} \cdot 50,0 \text{ pF}} \approx 380 \text{ m}.$$

Aallonpituudet ovat välillä 75–380 m.

- 16-7. a)** Taulukossa olevat mittaustulokset viedään mittausohjelmaan ja esitetään  $f, I$ -koordinaatistossa.



b) Resonanssitaajuuden kohdalla sähkövirta on suurin. Kuvaajasta nähdään, että resonanssitaajuus on noin 350 Hz.

**16-8.** a) Jos käytetään puoliaaltoantennia, antennin pituus on  $l = \frac{1}{2}\lambda$ , jossa

$$\lambda = \frac{c}{f}. \text{ Pituus on } 900 \text{ MHz:n taajuudelle}$$

$$l = \frac{c}{2f} = \frac{2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 900 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}} = 16,66551 \text{ cm} \approx 17 \text{ cm}$$

ja 2100 MHz:n taajuudelle

$$l = \frac{c}{2f} = \frac{2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 2100 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}} = 7,13979 \text{ cm} \approx 7,1 \text{ cm}.$$

PIFA-antennit ovat yleensä neljännesaaltoantenneja, jolloin vaadittavat pituudet ovat 8,3 cm ja 3,6 cm.

b) Puhelimet toimivat tavallisesti useilla eri taajuuksilla, ja monia niistä voi käyttää molemmilla UMTS-taajuuksilla. UMTS-taajuus 900 MHz on Suomen ulkopuolella verrattain harvinainen, joten jotkin puhelimet eivät toimi sillä taajuudella.

**16-9.** Jagiantennissa on suoraan tankoon kiinnitetty poikkisuuntaisia piikkejä. Jagiantenni on suunta-antenni, jota käytetään etenkin television antennilähetysten vastaanottamiseen ja lähettämiseen. Vastaanottoantenni suunnataan lähettinantennia kohti, jolloin se ottaa vastaan vain lähettimen suunnasta tulevaa säteilyä. Tällä varmistetaan se, että muista suunnista tulevat aallot eivät aiheuta häiriöitä televisiokuvaan.

Antenni koostuu erimittaisista dipoleista. Kunkin dipolin edessä on yksi tai useampi suuntaaja, joka on noin 5 % lyhyempi kuin dipoli, ja takana yksi tai useampi heijastaja, joka on noin 5 % pitempi kuin dipoli. Antennin erilaisilla ratkaisuilla vaikutetaan kaistanleveyteen, signaalin vahvistukseen tai vastaanottokeilan laajuuteen.

**16-10.** Tiivistelmään pitää sisältyä ainakin seuraavat asiat:

- a) Kantoaalto on vakiotaajuinen ja -amplitudinen sähkömagneettinen aalto, jota esimerkiksi radioasema lähettää.
- b) Kantoaallon moduloinnilla kantoaalto saadaan välittämään tietoa.
- c) Modulointi suoritetaan muuttelemalla kantoaallon taajuutta tai amplitudia.