

MAA 6/9 Derivaatta / Talousmatikka

Sarja A

1. Osoita, että funktion $f(x) = e^x - x - 1$ kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on sivuamispisteen x - ja y -koordinaattien summa.

2. Määritä kertoimet a ja b niin, että funktiolle $f(x) = a \sin 2x + b \cos 4x$ pätee

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0 \text{ ja } f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1.$$

3. Nuoripari ottaa pankista 90 000 euron asuntolainan, jonka takaisinmaksuaika on 15 vuotta ja kiinteä vuosikorko 3,6 %. Laina on tasalyhennyslaina, jota lyhennetään kuukausittain niin, että kunkin lyhennyksen yhteydessä maksetaan kuukauden aikana lainapäämälle kertynyt korko. a) Kuinka suuri on ensimmäinen takaisinmaksuerä? b) Kuinka suuri on viimeinen takaisinmaksuerä? c) Kuinka paljon korkoa he maksavat yhteensä koko laina-aikana?
4. Radioaktiivisen aineen määrä pienenee aina samassa ajassa yhtä monta prosenttia. Suomalaisen saamasta säteilyannoksesta noin puolet tulee sisäilman radonista. Radonia syntyy radioaktiivisen hajoamisen seurauksena maaperässä, josta se kaasuna voi nousta ilmaan ja päästä siten rakennuksien alapohjien rei'istä huoneilmaan. Radonin isotoopin 222 puoliintumisaika on 3,825 vuorokautta. a) Kuinka monta prosenttia radonista hajoaa vuorokaudessa? b) Radonia on nyt huoneessa $3,3 \cdot 10^{-12}$ grammaa. Muodosta funktio radonin määrälle t vuorokauden kuluttua tästä hetkestä. c) Kuinka paljon radonia on jäljellä 5 vuorokauden kuluttua ja kuinka nopeasti se tällöin vähenee?
5. Funktio $f(x) = e^{x^2}$ kuvaajalle piirretään normaali muuttujan arvon a kohdalle, missä $a \neq 0$. Mitä pistettä normaalin ja y -akselin leikkauspiste lähenee, kun a lähenee nollaa?
6. Sataman veden syvyys vaihtelee jaksollisesti nousu- ja laskuveden myötä. Syvyys on suurimmillaan 4,6 m kello 2.30 ja seuraavan kerran pienimmillään 1,6 m kello 8.30. a) Määritä veden syvyyttä kuvaavan funktion $f(x) = a \sin(bt - c) + d$ lauseke, missä t on aika tunteina keskiyöstä. b) Mikä on veden syvyys kello 12.00 ja kuinka nopeasti se tällöin nousee tai laskee?

Sarja B

1. Missä funktio $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$ on kasvava ja missä vähenevä.
2. Laske $f'(\frac{\pi}{2})$, kun $f(x) = \cos 2x - \sin^2 x$.
3. Laske lukujonon 2, 6, ... kahdeskymmenes jäsen a_{20} ja summa $a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$ kun lukujono on a) aritmeettinen, b) geometrinen.
4. Osoita, että suora $y = -2x + 3$ on käyrän $y = \sqrt{4x + 18}$ normaali.
5. Määritä funktion $f(x) = \cos^2 x - 2\cos x - 3$ a) nollakohdat, b) suurin ja pienin arvo.
6. Ympyrän janteen pituus on $2a$. Piste P on janteen keskipisteen kautta kulkevan säteen jatkeella säteen etäisyydellä ympyrästä. Määritä ympyrän säde niin, että pisteen P etäisyys janteesta on mahdollisimman pieni.

Sarja C

1. Mikä funktion $f(x) = x - 10\sqrt{x}$ pienin arvo on?
2. Määritä funktion $f(x) = x + \cos 4x$ derivaattafunktion suurin ja pienin arvo.
3. Suotuisissa kasvuoloissa erään bakteeriviljelmän massa tulee joka tunti 1,7-kertaiseksi. Tällä hetkellä ($t = 0$) massa on 3,1 g. Kuinka suuri viljelmän massa on ja millä nopeudella massa kasvaa hetkellä a) $t = 2$, b) $t = 10$?
4. Kristian aikoo vaihtaa autoa ja hakee pankilta 8000 euron lainaa. Pankki tarjoaa hänelle tasaerälainaa, joka maksetaan takaisin kahdessa vuodessa. Lainan vuotuinen korko on 6,6 % koko takaisinmaksukauden ajan. Muita kuluja ei oteta huomioon. a) Määritä lainan kuukausittaisen tasaerän suuruus. b) Kuinka paljon lainaa on jäljellä silloin, kun puolet takaisinmaksuajasta on kulunut? c) Kuinka paljon korkoa Kristian maksaa yhteensä koko kahden vuoden laina-aikana?
5. Määritä funktion $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \cos x}$ suurin ja pienin arvo.
6. Säiliö on muodoltaan huippu alaspäin seisova suora ympyräkartioiden, jonka korkeus on yhtä suuri kuin pohjan säde. Säiliötä ryhdytään täyttämään vedellä, jota valutetaan säiliöön nopeudella 10 litraa sekunnissa. Millä nopeudella vedenpinta nousee a) yhden sekunnin, b) 10 sekunnin kuluttua?

Sarja D

- a) Talletustilin korkokanta on 1,25 %, ja korko lisätään pääomaan vuosittain tilin avaamispäivänä. Korosta pankki perii ja tilittää valtiolle 30 %:n lähdeveron. Lähdeveron pyöristyssääntöä ei oteta huomioon. Kuinka suureksi 80 000 euron talletus kasvaa viidessä vuodessa?
b) Lasku, jonka suuruus oli 800,05 € ja eräpäivä 20.6., maksettiin 3.8. Viivästyskorko on 7,0 % ja se lasketaan saksalaisella korkotavalla. i) Kuinka paljon viivästyskorkoa oli maksettava? ii) Minä päivänä viivästyskorko olisi ylittänyt 15 euroa?
- Määritä funktion $f(x) = \ln x - 2x$ suurin ja pienin arvo välillä $[\frac{1}{e}, 1]$.
- Osoita, että käyrä $y = e^x$ on kokonaan suoran $y = 2x$ yläpuolella.
- Osoita, että yhtälöllä $e^{0,002x} = -10^{-3}x + 10^3$ on tasan yksi juuri. Määritä juuren likiarvo kolmen numeron tarkkuudella.
- Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 1. Määritä kolmion kannan ja kannalle piirretyn korkeusjanan pituuksien summan suurin mahdollinen arvo.
- Osoita, että kaikilla muuttujan x arvoilla on $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$. Onko joillakin x :n arvoilla epäyhtälössä voimassa yhtäsuuruus?

Sarja E

- Määritä funktion $g(x) = \sqrt{4 - x^2} - x$ derivaattafunktion nollakohdat.
- Määritä funktion $f(x) = \sin^2 3x$ kuvaajalle muuttujan arvon $\frac{\pi}{4}$ kohdalle piirretyn tangentin ja normaalin yhtälö.
- Mikä arvo vakiolla a tulisi olla, jotta funktion $f(x) = \sqrt{x} + a$ kuvaaja sivuaisi suoraa $y = 2x$? Mikä sivuamispiste tällöin on?
- Määritä funktion $f(x) = x(\ln x)^2 - x \ln x^2$ nollakohdat ja ääriarvokohdat.
- Määritä funktion $f(x) = \cos x + \sin x \cos x$ suurin ja pienin arvo.
- Kolmiota rajaavat käyrän $y = e^x$ tangenti, negatiivinen x -akseli ja positiivinen y -akseli. Mikä kolmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

Vastaukset:

A2. $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{6}$; **A3.** a) 770 €, b) 501,5 €, c) 24 435 €; **A4.** a) 16,6 %,

b) $0,83426^t \cdot 3,3 \cdot 10^{-12}$ g, c) $1,3 \cdot 10^{-12}$ g, $0,24 \cdot 10^{-12}$ g/vrk; **A5.** $(0, \frac{3}{2})$;

A6. a) $f(t) = 1,5 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{12}\right) + 3,1$, b) 3,5 m, nousee nopeudella 0,76 m/h;

B1. f kasvava välillä $]-\infty, 2]$ ja vähenevä välillä $[2, \infty[$; **B2.** 0; **B3.** a) 78 ja 800,

b) 2 324 522 934 ja 3 486 784 400; **B5.** a) $\pi + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, b) suurin arvo: 0, pienin arvo: -4;

B6. $x = \frac{2}{\sqrt{3}}a$;

C1. -25; **C2.** suurin arvo: 5, pienin arvo: -3; **C3.** a) 9,0 g, 4,8 g/h, b) 625 g, 330 g/h;

C4. a) 356,73 €, b) 4131,61 €, c) 561,52 €; **C5.** suurin arvo: 1, pienin arvo: -1;

C6. a) 7,1 cm/s, b) 1,5 cm/s;

D1. a) 83 561,79 €, b) i) 6,69 €, ii) 27.9.; **D2.** suurin arvo: $-\ln 2 - 1$, pienin arvo: -2;

D4. 3450; **D5.** $\sqrt{5}$; **D6.** Yhtäsuuruus on voimassa kun $x = 0$;

E1. $-\sqrt{2}$; **E2.** tangentti: $y = -3x + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$, normaali: $y = \frac{1}{3}x - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}$; **E3.** $a = -\frac{1}{8}$,
sivuaamispiste: $(\frac{1}{16}, \frac{1}{8})$; **E4.** nollakohdat: 1 ja e^2 , maksimikohta: $e^{-\sqrt{2}}$, minimikohta: $e^{\sqrt{2}}$;

E5. suurin arvo: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, pienin arvo: $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$; **E6.** $\frac{2}{e}$