MAA6 Derivaatta

1.1 $f(x) = \dfrac{x^2-6x-7}{2x+2}$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
$-0{,}9$	$-3{,}95$	$-1{,}1$	$-4{,}05$
$-0{,}99$	$-3{,}995$	$-1{,}01$	$-4{,}005$
$-0{,}999$	$-3{,}9995$	$-1{,}001$	$-4{,}0005$
$-0{,}9999$	$-3{,}99995$	$-1{,}0001$	$-4{,}00005$

$\Rightarrow$ näyttäisi olevan: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \underline{-4}$

1.3 a) $f(-3) = 2$, $f(3) = 7$

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -3-} f(x) = 4 & \text{(vasemmanpuoleinen raja-arvo)} \\ \lim\limits_{x\to -3+} f(x) = 2 & \text{(oikean — " " —)} \end{cases}$

$\Rightarrow 4 \neq 2 \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to -3} f(x) \text{ ei ole olemassa}}$

$\underline{\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5}$

1.6 a) ✓ , b) V ($f(-2) = -4$) , c) V ($\lim\limits_{x\to -2+} f(x) = -2$)

d) V ($\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ ei ole olemassa)

e) ✓ ($\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$) , f) V ($f(5) = 2$)

2.1 a) $\lim\limits_{x\to -4} (x^2+5x+1) = (-4)^2 + 5\cdot(-4) + 1 = \underline{-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{4x-10}{x^2-5} = \dfrac{4\cdot 5-10}{5^2-5} = \dfrac{10}{20} = \underline{\dfrac{1}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2-6x}{3} = \dfrac{4\cdot 0^2 - 6\cdot 0}{3} = \dfrac{0}{3} = \underline{0}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6x-10}{x^2-2x} = \dfrac{6\cdot 2-10}{2^2-2\cdot 2} = \dfrac{2}{0}$ ↯ $\Rightarrow$ <u>raja-arvoa ei ole olemassa</u>

2.3 a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{3x+3} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x+1)}{3(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{3} = \dfrac{-1}{3} = \underline{-\dfrac{1}{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2-6x}{x^2(x-3)} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x(x-3)}{x^2(x-3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{0}$ ↯ $\Rightarrow$ <u>ei raja-arvoa</u>

2.8 a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{3x^2-6x}{5x} \cdot \dfrac{10}{x^2-4} \right) \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x(x-2)\cdot 10}{5x(x-2)(x+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3\cdot 2}{x+2} = \dfrac{3\cdot 2}{2+2} = \dfrac{6}{4} = \underline{\dfrac{3}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{4}{1-x^2} - \dfrac{2}{1+x} \right) \overset{(\frac{4}{0}-\frac{2}{0})}{=} \lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{4}{(1-x)(1+x)} - \dfrac{2}{1+x} \right)$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4-2(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2+2x}{(1-x)(1+x)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2(1+x)}{(1-x)(1+x)}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2}{1-x} = \dfrac{2}{1-(-1)} = \dfrac{2}{2} = \underline{1}$

2.10 b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-3x+a}{x-4}$

Rajallo (kun $x=4$) nimittäjä $= 0$, joten raja-arvo voi olla olemassa vain jos myös osoittaja $= 0$

$x = 4$: $4^2 - 3\cdot 4 + a = 0 \Leftrightarrow 4 + a = 0 \Leftrightarrow \underline{a = -4}$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$ (nolla.kohta)

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-3x-4}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x+1)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} (x+1) = 4+1 = \underline{5}$

2.13 a) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{16x^2-4}{2x-1} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4(4x^2-1)}{2x-1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4((2x)^2-1^2)}{2x-1}$

$= \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4(2x-1)(2x+1)}{2x-1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} 4(2x+1) = 4(2\cdot\tfrac{1}{2}+1) = \underline{8}$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} \dfrac{4x^2+12x+9}{\underset{(2x)^2}{4x^2} \underset{3^2}{-9}} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} \dfrac{(2x+3)^2}{(2x-3)(2x+3)} = \lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} \dfrac{2x+3}{2x-3} = \dfrac{2\cdot(-\frac{3}{2})+3}{2\cdot(-\frac{3}{2})-3} = \dfrac{0}{-6} = \underline{0}$

3.1 a) $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = -\dfrac{3}{2} \neq \lim\limits_{x\to -1+} f(x) = 3 \Rightarrow$ <u>f ei ole jatkuva -1:ssä</u>

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2 \Rightarrow$ <u>f on jatkuva</u> kohdassa 0

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -1 \neq f(3) = -2 \Rightarrow$ <u>f ei ole jatkuva</u> kohdassa 3

3.3 $f(x) = \dfrac{3x^2+12x}{x+4}$, $x \neq -4$

f jatkuva kohdassa -4

$\Leftrightarrow f(4) = \lim\limits_{x\to -4} f(x) = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3x^2+12x}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3x(x+4)}{x+4}$

$= \lim\limits_{x\to -4} 3x = 3\cdot(-4) = \underline{-12}$

3.4 f jatkuva kohdassa $-6 \Leftrightarrow \underline{f(-6)} = \lim\limits_{x\to -6} f(x) = \underline{-2}$

f — " " — 3 $\Leftrightarrow \underline{f(3)} = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \underline{4}$

3.5 a) $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 4 \neq f(1) = 2 \Rightarrow$ <u>f ei ole</u> vasemmalta jatkuva 1:ssä

b) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 2 = f(1) \Rightarrow$ <u>f on</u> oikealta jatkuva 1:ssä

c) <u>f ei ole</u> jatkuva välillä $[-2,1]$ koska f ei ole vasemmalta jatkuva kohdassa 1

d) <u>f on</u> jatkuva välillä $[-2,1[$

e) $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = 3 = f(3) \Rightarrow f$ vasemmalta jatkuva 3:ssa

$\Rightarrow$ <u>f on</u> jatkuva välillä $[1,3]$

3.8 $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x+2}$, $x \neq -2$

a) f on rationaalifunktiona jatkuva määrittelyjoukossaan ($x \neq -2$) $\Rightarrow$ <u>f on jatkuva</u>

b) f ei ole määritelty kohdassa $x = -2 \Rightarrow$ <u>f ei ole jatkuva $\mathbb{R}$:ssä</u>

3.9 $f(x) = \dfrac{ax^2+8x}{x-2}$, $x \neq 2$

b) f on jatkuva kohdassa $2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ on olemassa. Koska nimittäjä $\to 0$ myös osoittaja $\to 0$ (rajalla oltava tilanne $\frac{0}{0}$; jos olisi esim. $\frac{5}{0} = \pm\infty$ ei raja-arvoa olisi olemassa)

$x = 2$: $a\cdot 2^2 + 8\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 4a + 16 = 0 \Leftrightarrow \underline{a = -4}$

「TAI: Jotta raja-arvo voisi olla olemassa täytyy $x-2$ supistua pois $\to x-2$ on osoittajan tekijä $\to x=2$ on 0-kohta」

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-4x^2+8x}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-4x(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (-4x)$

$= -4\cdot 2 = -8$

f jatkuva kohdassa $2 \Leftrightarrow \underline{f(2)} = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \underline{-8}$

3.15 a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ $f(2)$ ei ole määritelty

$\Rightarrow$ <u>f ei ole</u> jatkuva välillä $[-2,3]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\underbrace{x^2}_{\geq 0}+2} - \dfrac{x^2}{x+3}$, $x \neq -3$

f on määritelty välillä $[-2,3] \Rightarrow$ <u>f on jatkuva</u> väl. $[-2,3]$

4.1 $f(x) = x^2 - 3$, a) $f'(-2) = \underline{-4}$, b) $f'(1) = \underline{2}$

4.5 a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = \pm 2}$

b) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \underline{x \leq -2 \text{ tai } x \geq 2}$

4.8 a) $f(0) \approx \underline{-2{,}5}$ b) $f(3) = \underline{0}$

c) $f'(-4) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2-(-5)}{-3-(-5)} = \dfrac{7}{2} = \underline{3{,}5}$

d) $f'(1) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2-(-5)}{5-(-2)} = \dfrac{7}{7} = \underline{1}$