Yleisesti: Raja-arvo $\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x)$ on lähellä lukua b kun x on lähellä lukua a

Vasemmanpuoleinen raja-arvo: $\lim_{x \to a-} f(x) = b$: x on lähellä lukua a ja $x < a$

Oikeanpuoleinen raja-arvo: $\lim_{x \to a+} f(x) = b$: x on lähellä lukua a ja $x > a$

2. Raja-arvon laskeminen

Esim. a) $\lim_{x \to 1} (3x^2 - 2) = 3 \cdot 1^2 - 2 = \underline{1}$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{3x}{x-2} = ?$ Kun x on lähellä lukua 2, on $3x$ lähellä lukua $3 \cdot 2 = 6$ ja $x - 2$ lähellä lukua $2 - 2 = 0$

$\Rightarrow$ rajalla: $\frac{6}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ raja-arvoa ei ole olemassa

$\ulcorner$ $\frac{6}{0} = \infty$ ← lähellä 0:aa mutta > 0 $\left(\frac{6{,}00001}{0{,}0001}\right.$ iso$\left.\right)$

$\frac{6}{0} = -\infty$ ← lähellä 0:aa mutta < 0 $\left(\frac{5{,}99999}{-0{,}00001} = -\text{iso}\right)$ $\lrcorner$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$, rajalla (kun $x = 2$) tilanne: $\frac{2^2-4}{2^2-2\cdot 2} = \frac{0}{0}$

tai lähellä 0:aa
äärettömän lähellä 0:aa

Tässä $\frac{0}{0}$ on epämääräinen muoto josta ei voi päätellä mitään

Sievennetään lauseke:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4 \leftarrow 2^2}{x^2 - 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = \underline{2}$$

Yleisesti: 1° Raja-arvon $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ olemassaolo kun $g(a) = 0$

i) $f(a) = 0$ (rajalla tilanne $\frac{0}{0}$) → ei voida päätellä raja-arvon olemassaolosta mitään

ii) $f(a) \neq 0$ (rajalla tilanne $\frac{b}{0}$, $b \neq 0$) → raja-arvoa ei ole olemassa

2° Raja-arvon $\lim_{x \to a} f(x)$ laskeminen