c) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$
$= (\sin x)^3 + (\cos x)^3$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{suurin arvo: } 1^3 + 1^3 = 2 \\ \text{pienin arvo: } (-1)^3 + (-1)^3 = -2 \end{array} \right.$

Ei käy! jos $\sin x = 1 \Rightarrow \cos x = 0$
koska $\sin^2 x + \cos^2 = 1$

Siinillä ja kosinilla on parittomat eksponentit 3 → ei saada kätevästi peruskaavalle muutettua $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ jolloin voitaisiin käyttää apumuuttujaa

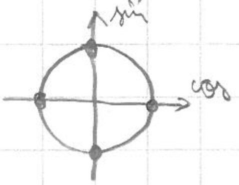
f on 2π-jaksollinen funktio → riittää tutkia väliä $[0, 2\pi]$

f on jatk. ja deriv. väl. $[0, 2\pi]$

$f'(x) = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x + 3(\cos x)^2 \cdot (-\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ tai $\cos x = 0$ tai $\sin x - \cos x = 0$



$x = n\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \cos x$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = x + n2\pi$ tai $\frac{\pi}{2} - x = -x + n2\pi$

$\Leftrightarrow -2x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi \mid :(-2)$ tai $\frac{\pi}{2} = n2\pi$ ↯

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - n\pi$

$x \in [0, 2\pi]$: $\underbrace{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi}, \underbrace{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}}$

– päätekohdat: $f(0) = (\sin 0)^3 + (\cos 0)^3 = 0^3 + 1^3 = 1$

$f(2\pi) = \ldots = 1$

– f':n 0-kohdat: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^3 = 1^3 + 0^3 = 1$

$f(\pi) = (\sin \pi)^3 + (\cos \pi)^3 = 0^3 + (-1)^3 = -1$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-1)^3 + 0^3 = -1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$

$= {}^{\sqrt{2})}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\approx 0{,}707)$

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \ldots = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\approx -0{,}707)$

$\Rightarrow$ suurin arvo: 1, pienin arvo: −1

Yleisesti: Trig. funktion suurin ja pienin arvo

1° Käytetään tietoa $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$ (esim. a)

2° Am. (esim. $t = \cos x$), jolloin tutkitaan esim. polynomifunktiota välillä $[-1, 1]$ (esim. b)

3° Tutkitaan annettua funktiota sen jakson pituisella välillä (esim. $[0, 2\pi]$) derivaatan avulla (esim. c)

19.4 $f(x) = 3\cos^2 x - 4\cos x + 1$
$= 3(\cos x)^2 - 4\cos x + 1$

suurin arvo: $3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 1 = 8$
pienintä arvoa ei näe suoraan

Am. $t = \cos x$: $g(t) = 3t^2 - 4t + 1$, $t \in [-1, 1]$