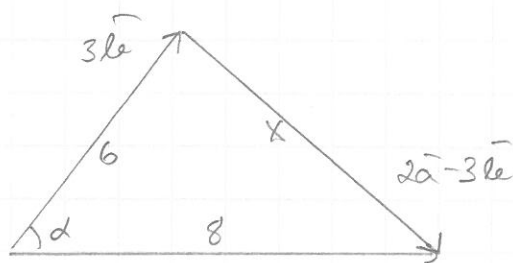
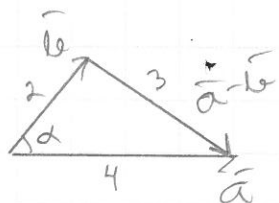


Esim. Laske  $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$  kun  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 2$  ja  $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ .

Path.



Kosinilause:

$$3^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 3^2 - 2^2 - 4^2 = -2 \cdot 2 \cdot 4 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow -11 = -16 \cos \alpha \quad | : (-16)$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{11}{16}$$

$$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{11}{16} = 34 \quad (\sqrt{\quad})$$

$$\Rightarrow x = |2\vec{a} - 3\vec{b}| = \underline{\underline{\sqrt{34}}}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4 \cdot 4^2 - 12 \cdot \frac{11}{2} + 9 \cdot 2^2 = 34 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha_{\vec{a}, \vec{b}})$$

$$\Rightarrow |2\vec{a} - 3\vec{b}| = \underline{\underline{\sqrt{34}}}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

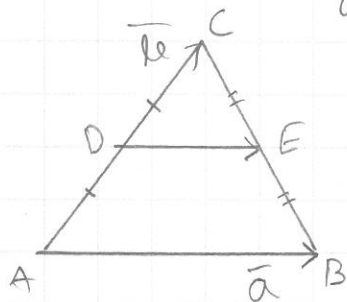
$$\Rightarrow 3^2 = 4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2$$

$$\Rightarrow 3^2 - 4^2 - 2^2 = -2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Rightarrow -11 = -2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : (-2) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{11}{2}$$

## 24. geometrisia vektoreilla

Esim.



$$\vec{AB} = \vec{a}, \quad \vec{AC} = \vec{b}$$

$$\vec{DE} = \vec{DC} + \vec{CE}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{CB}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a})$$

$$= \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

Sii: Kolmion kahden sivun keskipisteiden yhdistyksen on 3. sivun puolet ja pituudeltaan puolet siitä