

MAA2/4 Sarjat

Sarja A

- A1. Olkoon $f(x) = \sqrt{15 - 3x}$. a) Määritä funktion f määrittelyjoukko.
b) Ratkaise yhtälö $f(x) = 3$.
- A2. Suunnikkaan $ABCD$ kärki A on pisteessä $(-14,17)$. Määritä piste B , kun suunnikkaan lävistäjävektorit ovat $\overline{AC} = 13\bar{i} + 10\bar{j}$ ja $\overline{BD} = -12\bar{i} + 9\bar{j}$.
- A3. Puolisuunnikkaan $ABCD$ sivun CD pituus on kaksi kolmasosaa sen kanssa yhdensuuntaisen sivun AB pituudesta. Piste P on sivun BC keskipiste. Ilmaise vektori \overline{DP} vektorien $\bar{a} = \overline{AB}$ ja $\bar{b} = \overline{AD}$ avulla.
- A4. Vektoreista \bar{a} ja \bar{b} tiedetään, että $\bar{a} + 2\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $2\bar{a} - \bar{b} = 4\bar{i} + \bar{j}$. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella vektoreiden \bar{a} ja \bar{b} välisen kulman suuruus.
- A5. Suunnikkaan $ABCD$ kaksi kärkeä ovat $A = (-7,3)$ ja $C = (19,1)$. Sivun AB on vektorin $\bar{i} - \bar{j}$ suuntainen ja sivu AD on vektorin $3\bar{i} + \bar{j}$ suuntainen. Määritä kärkipisteet B ja D .
- A6. Olkoon $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. a) Osoita, että funktio f on määritelty kaikilla reaaliluvuilla x ja että $0 < f(x) \leq 1$ aina. b) Keksi tämän perusteella sellainen rationaalifunktio $g(x)$, jonka määrittelyjoukko on \mathbb{R} ja jonka arvojoukko on $1^\circ]1,2]$ eli $1 < g(x) \leq 2$, $2^\circ [-1,1[$ eli $-1 \leq g(x) < 1$.

Sarja B

- B1. Suunnikkaan $ABCD$ kärjestä A lähtevät sivuvektorit ovat $\overline{AB} = -3\bar{i} + 6\bar{j}$ ja $\overline{AD} = -5\bar{i} + 9\bar{j}$. Laske suunnikkaan lävistäjien pituudet.
- B2. Määritä sellaiset reaaliluvut r ja s , että vektorit $\bar{u} = r\bar{i} + (r - s)\bar{j}$ ja $\bar{v} = \bar{i} + (s - 2)\bar{j}$ ovat a) sama vektori, b) toistensa vastavektorit.
- B3. Ratkaise yhtälö $x + \sqrt{x - 1} = 3$.
- B4. Osoita, että vektoreista $\bar{a} = \bar{i} - 5\bar{j}$, $\bar{b} = 11\bar{i} - 11\bar{j}$ ja $\bar{c} = 12\bar{i} - 16\bar{j}$ voidaan muodostaa kolmio. Laske asteen tarkkuudella tämän kolmion kulmien suuruudet.
- B5. Määritä funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{-x - 1}$ määrittelyjoukko ja nollakohdat.
- B6. Kolmion ABC kärjen A kautta kulkeva suora puolittaa kärjestä B piirretyn kolmion mediaanin (keskijanan). Missä suhteessa suora jakaa kolmion vastakkaisen sivun BC ?

Sarja C

- C1. Retkeilijä kulki ensimmäisenä päivänä reitin $\overline{OA} = 7\bar{i} - 2\bar{j}$, toisena päivänä reitin $\overline{AB} = -3\bar{i} + 9\bar{j}$ ja palasi kolmantena päivänä lyhintä tietä pisteeseen O . Kuinka pitkän matkan hän kulki kolmantena päivänä? Yksi ruutuväli vastaa yhtä kilometriä.
- C2. Suunnikkaassa $ABCD$ on $\overline{AB} = 5\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $\overline{AC} = x\bar{i} - 17\bar{j}$. Määritä sellainen vakion x arvo, että $ABCD$ on suorakulmio.
- C3. Kolmion ABC kärki A on pisteessä $(7,15)$. Kärjestä A piirretty kolmion mediaanivektori on $\overline{AM} = 6\bar{i} - 12\bar{j}$ ja kärjestä B piirretty mediaanivektori on $\overline{BN} = -18\bar{i} + 15\bar{j}$. Missä pisteissä ovat kolmion kärjet B ja C ? (Kolmion mediaanit jakautuvat leikkauspisteessään osiin, joiden pituuksien suhde kolmion kärjestä lukien on 2:1.)
- C4. Olkoon $\bar{a} = (1 - x)\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $\bar{b} = 2\bar{i} - x\bar{j}$. Määritä sellaiset vakion x arvot, että vektorit \bar{a} ja \bar{b} ovat a) yhtä pitkät, b) samansuuntaiset, c) toisiaan vastaan kohtisuorassa.
- C5. Yksikkövektoreiden \bar{a} ja \bar{b} välisen kulman suuruus on 60° . Kuinka pitkä on vektori $3\bar{a} + 4\bar{b}$?
- C6. Olkoon $f(x) = \frac{2x^2 + bx - 3}{2x - 6}$. a) Määritä vakiolle b sellainen arvo, että funktion f lauseke voidaan supistaa. b) Ratkaise yhtälö $f(x) + \frac{2-x}{x-1} = 3$, kun vakiolla b on a) kohdassa saatu arvo.

Vastaukset:

- A1.** a) $] -\infty, 5]$ ($x \leq 5$), b) $x = 2$; **A2.** $B = (-\frac{3}{2}, \frac{35}{2})$; **A3.** $\overline{DP} = \frac{5}{6}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$; **A4.** $63,4^\circ$;
A5. $B = (1, -5), D = (11, 9)$; **A6.** b) $g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ ja $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
- B1.** 17 ja $\sqrt{13}$; **B2.** $r = 1, s = \frac{3}{2}$, b) ei ratk.; **B3.** $x = 2$; **B4.** $26^\circ, 146^\circ$ ja 8° ;
B5. $] -\infty, -3]$ ($x \leq -3$); **B6.** 1:2
- C1.** 8,1 km; **C2.** $x = 17$; **C3.** $B = (23, -3), C = (3, 9)$; **C4.** a) $x = 3$, b) $x = -2$, c) $x = \frac{2}{5}$;
C5. $\sqrt{37}$; **C6.** a) $b = -5$, b) $x = \frac{3}{2}$