MAA12 SARJA A

A1. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2+3}$ a) suurin ja pienin arvo, b) arvojoukko.

A2. Laske epäoleellinen integraali $\int_1^\infty \frac{1}{(3x-1)^2}\,dx$.

A3. Erään televisiomallin kestoikä vuosina noudattaa normaalijakaumaa siten, että odotusarvo on 5,5 ja keskihajonta 2,8. a) Millä todennäköisyydellä tämän mallinen televisio hajoaa alle kahdessa vuodessa? b) Millä todennäköisyydellä tilatusta 12 television erästä ainakin yksi toimii vielä kymmenen vuoden kuluttua?

A4. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+nx}{1+nx^2}$. Piirrä funktion f kuvaaja.

A5. Kolmion muotoinen metsäalue rajoittuu yhdeltä sivultaan viivasuoraan tiehen. Alueen etäisimmän kohdan etäisyys tiestä on 2,0 km. Metsästä etsitään haavoittunutta riistaeläintä. Olkoon satunnaismuuttuja $\underline{x}$ eläimen etäisyys tiestä.

a) Muodosta satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio F(x), ja määritä kertymäfunktion avulla $P(0{,}3 \le \underline{x} \le 1{,}4)$.

b) Määritä satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio.

c) Laske satunnaismuuttujan $\underline{x}$ odotusarvo.

A6. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa epäyhtälön

$$(1)\ f(x) - f(y) \ge x - y$$

kaikilla arvopareilla (x,y), joissa $x > y$.

1° Osoita, että f on kasvava.

2° Osoita : Jos f on derivoituva, niin $f'(x) \ge 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

3° Muodosta esimerkki funktiosta, joka täyttää ehdon (1) ja on epäjatkuva $\mathbb{R}$:ssä.

A1. a) $\frac{3}{2}$ ja $-\frac{1}{2}$, b) $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, **A2.** $\frac{1}{6}$; **A3.** a) 0,106, b) 0,486;

A5. $F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x - \frac{1}{4}x^2, 0 < x < 2 \\ 1, x \ge 2 \end{cases}$, tn on 0,63 , b) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x, 0 < x < 2 \\ 0, x \le 0 \text{ tai } x \ge 2 \end{cases}$, c) 0,67 km

MAA12 SARJA B

B1. Määritä sellainen vakion a arvo, että funktio $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a\,, & x < 1 \\ x^2 - x - 2\,, & x \geq 1 \end{cases}$ on kaikkialla jatkuva. Ratkaise edelleen näin saadun funktion nollakohdat.

B2. Muodosta funktio, joka on kaikkialla jatkuva ja aidosti kasvava ja joka on derivoituva muualla paitsi kohdassa $x = 1$. Perustele että funktio toteuttaa vaaditut ehdot ja piirrä funktion kuvaaja.

B3. Määritä vakiot a ja b niin, että funktio $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b\,, & x \leq 1 \\ bx - 1\,, & x > 1 \end{cases}$ on kaikkialla derivoituva.

B4. Osoita, että funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + x - 4$, on käänteisfunktio. Mikä on käänteisfunktion määrittelyjoukko? Missä pisteessä käyrät $y = f(x)$ ja $y = f^{-1}(x)$ leikkaavat toisensa? Laske käänteisfunktion derivaatta $(f^{-1})'(-3)$.

B5. a) Kolmea noppaa heitetään samanaikaisesti. Millä todennäköisyydellä jokaisen nopan silmäluku on vähintään 5?
b) Kolmea noppaa heitetään samanaikaisesti 100 kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan vähintään 4 heittokerralla jokaisella kolmella nopalla silmäluku joka on vähintään 5? Ratkaise tehtävä käyttämällä 1° binomijakaumaa, 2° normaalijakaumaa.

B6. Olkoon f funktio, jolla on ominaisuus: $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y. Lisäksi f on derivoituva kohdassa 0 ja $f'(0) = 1$.
a) Määritä $f(0)$.
b) Osoita erotusosamäärää tutkimalla, että funktio f on derivoituva kaikkialla.
c) Määriä funktio f.

B1. $a = -4$, nollakohdat $-\sqrt{2}$ ja 2 ; **B3.** $a = -1, b = -2$; **B4.** $M_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, (ln 2 , ln 2), $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{3}$; **B5.** a) 0,0370, b) 1°0,509, 2° 0,543; **B6.** a) $f(0) = 0$, c) $f(x) = x^2 + x$