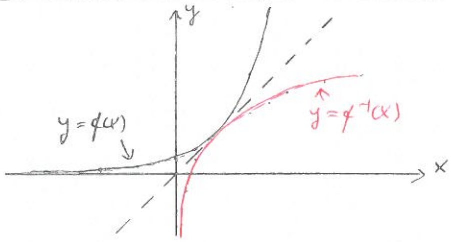
6.12 a) $f(x) = e^{x-1}$, f jatk. ja deriv. $\mathbb{R}$:ssä
$f'(x) = e^{x-1} > 0$ aina $\Rightarrow$ f aidosti kasvava $\mathbb{R}$:ssä
$\Rightarrow$ käänteisfunktio f^{-1} on olemassa
$f(x) = e^{x-1} = y \; | \ln \iff x-1 = \ln y \iff x = \ln y + 1 = f^{-1}(y)$
$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \ln x + 1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x-1} = e^{\infty} = \infty$
f aidosti kasvava ja jatkuva $\mathbb{R}$:ssä $\Big\} \Rightarrow \underline{A_f =]0,\infty[}$

c) $M_{f^{-1}} = A_f =]0,\infty[$
d) $\underline{f^{-1}:]0,\infty[\to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \ln x + 1}$
e)



6.13 $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$, f jatk. ja deriv. $\mathbb{R}$:ssä
a) $f'(x) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow$ f aidosti kasvava $\mathbb{R}$:ssä
$\Rightarrow$ käänteisfunktio f^{-1} on olemassa
b) $f(x) = \frac{2}{3}x - 4 = y \iff x = \frac{3}{2}y + 6 = f^{-1}(y)$
$A_f = M_{f^{-1}} = \mathbb{R} \Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 6,\ x \in \mathbb{R}}$
c) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\frac{2}{3}x - 4) = \frac{3}{2}(\frac{2}{3}x - 4) + 6$
$= x - 6 + 6 = x$ ✓

7.1 $f(x) = x^3 + 2x = -3 \iff x = -1$
$f'(x) = 3x^2 + 2$
$x \xrightarrow{f} -3$, $-3 \xrightarrow{f^{-1}} x$
$(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3\cdot(-1)^2 + 2} = \underline{\frac{1}{5}}$

7.3 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
a) f on jatk. ja deriv. $\mathbb{R}$:ssä
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2 > 0$
kun $x \neq 2 \Rightarrow$ f on aidosti kasvava $\mathbb{R}$:ssä
$\Rightarrow$ käänteisfunktio f^{-1} on olemassa
b) $f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 12\cdot 2 = 8 - 24 + 24 = 8$
$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{0}$ ↯ $\Rightarrow$ kohdassa 8

7.7 $f(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$
a) $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ kun $x > 0 \Rightarrow$ f aidosti kasvava
$\Rightarrow$ käänteisfunktio f^{-1} on olemassa
b) $f(x) = \ln x + x - 1 = 0 \iff x = 1 \Rightarrow f^{-1}(0) = 1$
$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{1}{1}+1} = \underline{\frac{1}{2}}$

7.10 $f(x) = x^3 + x - 8$
a) f:n ja f^{-1}:n kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen $\Rightarrow$ mahdolliset leikkauspisteet ovat suoralla $y = x$:
$\begin{cases} y = x^3 + x - 8 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^3 + x - 8 = x \iff x^3 = 8 \; | \sqrt[3]{\ }$
$\iff x = 2 \Rightarrow$ piste $\underline{(2,2)}$
b) $\begin{cases} f'(2) = 3\cdot 2^2 + 1 = 13 = k_1 = \tan\alpha \iff \alpha \approx 85{,}60° \\ (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{13} = k_2 = \tan\beta \iff \beta \approx 4{,}40° \end{cases}$
$\Rightarrow$ leikkauskulma: $|\alpha - \beta| \approx 81{,}20° \approx \underline{81°}$

7.13 $f(x) = (x^2+1)e^x$, f on jatk. ja deriv. $\mathbb{R}$:ssä
a) $f'(x) = 2x e^x + (x^2+1)e^x = e^x(x^2 + 2x + 1)$
$= \underbrace{e^x}_{>0} \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} > 0$ kun $x \neq -1$
$\Rightarrow$ f aidosti kasvava $\mathbb{R}$:ssä
$\Rightarrow$ käänteisfunktio f^{-1} on olemassa
b) $f(x) = (x^2+1)e^x = 1 \iff x = 0$
$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0\cdot(0+1)^2} = \frac{1}{1} = \underline{1}$
c) $f(-1) = ((-1)^2 + 1)e^{-1} = 2e^{-1}$
$\Rightarrow (f^{-1})'(2e^{-1}) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{0}$ ↯ $\Rightarrow$ kohdassa: $2e^{-1} = \frac{2}{e}$

8.1 a) $\frac{4x}{1-2x} \overset{(\frac{\infty}{-\infty})}{=} \frac{4x}{x(\frac{1}{x} - 2)} = \frac{4}{\frac{1}{x} - 2} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{4}{0-2} = \frac{4}{-2} = \underline{-2}$
b) $\frac{3x^2 - 7}{6x} \overset{(\frac{\infty}{-\infty})}{=} \frac{x(3x-7)}{6x} = \frac{3x-7}{6} \xrightarrow{x\to-\infty} \frac{3\cdot(-\infty)-7}{6} = \frac{-\infty}{6} = -\infty$
$\Rightarrow$ ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo $-\infty$

8.3 a) $5x^3 - x^2 \overset{(\infty-\infty)}{=} x^3(5 - \frac{1}{x}) \xrightarrow{x\to\infty} \infty^3\cdot(5-0) = \infty \cdot 5 = \infty$
$\Rightarrow$ ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo ∞
b) $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{x}{\underbrace{|x|}_{>0}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$
$= \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{1} = \underline{1}$

8.5 a) $\underbrace{(\frac{5}{6})}_{0 \leq \ <1}^x \xrightarrow{x\to\infty} \underline{0}$
b) $\frac{3^x - 8}{2^x} = \frac{3^x}{2^x} - \frac{8}{2^x} = \underbrace{(\frac{3}{2})}_{>1}^x - \frac{8}{2^x} \xrightarrow{x\to\infty} \infty - 0 = \infty$
$\Rightarrow$ ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo ∞

8.8 a) $7 - \sqrt{x} \xrightarrow{x\to\infty} 7 - \infty = -\infty$
$\Rightarrow$ ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo $-\infty$
b) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}})}{2\sqrt{x}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}}}{2} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1-0}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$

8.18 a) $f(x) = \frac{\cos x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos x}_{-1 \leq \ \leq 1} \xrightarrow{x\to 0} \underline{0}$
b) $f(x) = \underbrace{x^2}_{\to\infty} \underbrace{\cos x}_{-1\leq \ \leq 1}$ ei raja-arvoa, ei edes epäoleellisena, f:n kuvaaja heilahtelee käyrien $y = x^2$ ja $y = -x^2$ välissä

8.23 a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - x) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} (2x - x) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} (x - 2x) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} (-x) = -\infty$
b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{x}\cdot x) \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$
$\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{x}\cdot x^2) \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{x^2}\cdot x) \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

9.1 $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$
f jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä
$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x + 21 = 0 \iff x = \begin{cases} -1 \\ \frac{7}{4} \\ 3 \end{cases}$ (laskimella)

f'	−	+	−	+
f	↘	↗	↘	↗

-1 min, $\frac{7}{4}$ max, 3 min

$f'(-2) = -75 < 0$, $f'(0) = 21 > 0$
$f'(2) = -3 < 0$, $f'(4) = 45 > 0$

$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -32 \\ f(3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ pienin arvo: -32