4.1 $f(x) = \begin{cases} 5-x^2 & , x<2 \\ 3-x & , x \geq 2 \end{cases}$

$f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{(5-x^2)-(3-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{4-x^2}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{(2-x)(2+x)}{-(2-x)} = \lim\limits_{x\to 2-} -(2+x) = -(2+2) = \underline{-4}$

$f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{(3-x)-(3-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{2-x}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{-(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+} (-1) = -1$

$\Rightarrow f'_-(2) \neq f'_+(2) \Rightarrow f$ <u>ei ole</u> derivoituva kohdassa 2

4.3 $4x-8=0 \Leftrightarrow x=2$ $\quad - \;/_2\; +$

$f(x) = |4x-8| = \begin{cases} 4x-8 & , x \geq 2 \\ -(4x-8) = -4x+8 & , x<2 \end{cases}$

f on jatkuva ja derivoituva ainakin kun $x \neq 2$

$f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{(-4x+8)-(4\cdot 2-8)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{-4x+8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{-4(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-} (-4) = -4$

$f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{(4x-8)-(4\cdot 2-8)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{4x-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{4(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+} 4 = 4$

$f'_-(2) \neq f'_+(2) \Rightarrow f$ ei ole derivoituva kohdassa 2

$\Rightarrow f$ <u>ei ole</u> derivoituva

4.5 $f(x) = \begin{cases} ax^2+ax-3 & , x \leq 0 \\ 4x+b & , x>0 \end{cases}$

f on derivoituva ainakin kohdissa $x \neq 0$

1° $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} (ax^2+ax-3) = a\cdot 0^2 + a\cdot 0 - 3 = -3 \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} (4x+b) = 4\cdot 0 + b = b \\ f(0) = a\cdot 0^2 + a\cdot 0 - 3 = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ on jatkuva kohdassa 0 $\Leftrightarrow b=-3$

2° $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{(ax^2+ax-3)-(-3)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{ax^2+ax}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} (ax+a) = a\cdot 0 + a = a$

$b=-3$ (1° kohta)

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{(4x+b)-(-3)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{4x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} 4 = 4$

f derivoituva kohdassa 0 $\Leftrightarrow a=4$

1° ja 2° $\Rightarrow$ $\underline{a=4,\ b=-3}$

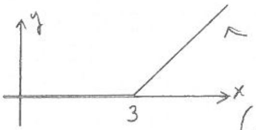
4.7 a) 1 b) 1 c) 2

4.8 $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & , x<-1 \\ x^3 & , x \geq -1 \end{cases}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1-} f(x) = (3x-1) = 3\cdot(-1)-1 = -4 \\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+} x^3 = (-1)^3 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1+} f(x) \Rightarrow f$ ei jatkuva -1:ssä

$\Rightarrow f$ ei ole derivoituva kohdassa -1

4.10 

$y = f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 3 \\ x-3 & , x>3 \end{cases}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 3+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+} (x-3) = 3-3 = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ on jatkuva kohdassa 3

$\begin{cases} f'_-(3) = \lim\limits_{x\to 3-} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3-} \dfrac{0-0}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3-} 0 = 0 \\ f'_+(3) = \lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{(x-3)-0}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3-} 1 = 1 \end{cases}$

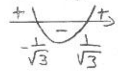
$\Rightarrow f'_-(3) \neq f'_+(3) \Rightarrow f$ ei ole derivoituva kohdassa

5.1 $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

f on jatkuva ja $n+1$ kertaa derivoituva $\mathbb{R}$:ssä

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \; |\sqrt{\ } \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$



		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
f''	+		−		+
f	∪		∩		∪

a) ylöspäin kupera välillä $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$

alaspäin — " — $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ ja $]\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$

b) käännekohdat : $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5.3 $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

f on jatkuva ja $n+1$ kertaa derivoituva $\mathbb{R}$:ssä

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow x=0$ tai $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=0$ tai $x=\pm 1$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x=0$ on maksimikohta

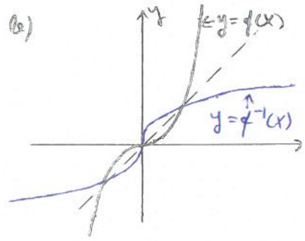
$f''(\pm 1) = 8 > 0 \Rightarrow x=-1$ ja $x=1$ ovat minimikohtia

6.1 a) $f(x) = x^3 = y \; |\sqrt[3]{\ }$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y} = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}}$

$\underline{M_f = M_{f^{-1}} = A_f = A_{f^{-1}} = \mathbb{R}}$

b) 

6.3 $f(x) = -x^2+5$, $x \geq 0$

a) f on jatkuva ja derivoituva kun $x \geq 0$

$f'(x) = -2x < 0$ kun $x > 0$

$\Rightarrow f$ on aidosti vähenevä kun $x \geq 0$

$\Rightarrow$ käänteisfunktio f^{-1} on olemassa

b) $f(x) = -x^2+5 = y \Leftrightarrow x^2 = 5-y \; |\sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow x = (\pm)\sqrt{5-y} = f^{-1}(y)$
$x \geq 0$

$\begin{cases} f(0) = 5 \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (-x^2+5) = -\infty \\ f \text{ jatkuva ja aidosti vähenevä kun } x \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A_f = M_{f^{-1}} =]-\infty, 5] \Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \sqrt{5-x}\ ,\ x \leq 5}$

6.5 $f(x) = -x^3 - x + 5$

a) $f^{-1}(3) = a \Leftrightarrow f(a) = -a^3 - a + 5 = 3 \Leftrightarrow \underline{a = f^{-1}(3) =}$

$f^{-1}(0) = b \Leftrightarrow f(b) = -b^3 - b + 5 = 0 \Leftrightarrow \underline{b = f^{-1}(0) \approx 1{,}52}$

b) $f^{-1}(c) = 0 \Leftrightarrow f(0) = -0^3 - 0 + 5 = c \Leftrightarrow \underline{c=5}$

f on aidosti monotoninen (aidosti vähenevä), joten yhtälöllä on vain yksi ratkaisu