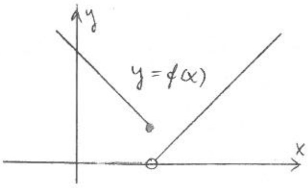
MAA12 Analyysi ja jatkuva jakauma

1.1 $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x\le 2\\ x-2, & x>2\end{cases}$

a) $f(1) = -1+3 = 2$
$f(2) = -2+3 = 1$
$f(3) = 3-2 = 1$

b)



1.3 a) $|x+4|$

0-kohdat: $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ $\quad - \;\; -4 \;\; +$

$\Rightarrow |x+4| = \begin{cases} x+4, & x\ge -4\\ -(x+4)=-x-4, & x<-4\end{cases}$

b) $|5-3x|$

0-kohdat: $5-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$ $\quad + \;\; \frac{5}{3} \;\; -$

$\Rightarrow |5-3x| = \begin{cases} 5-3x, & x\le \frac{5}{3}\\ -(5-3x)=3x-5, & x>\frac{5}{3}\end{cases}$

1.5 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 1\\ x^2-4x+2, & x>1\end{cases}$

1° $x\le 1$: $f(x)=2x+1=2 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ✓

2° $x>1$: $f(x)=x^2-4x+2=2 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases}0 & ✗\\ 4 & ✓\end{cases}$

1° ja 2°: $x=\frac{1}{2}$ tai $x=4$

1.7 $0<x\le 40$: $f(x)=15+3x$

$x>40$: $f(x)=15+3\cdot 40+5(x-40)=5x-65$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}3x+15, & 0<x\le 40\\ 5x-65, & x>40\end{cases}$

a) $0<x\le 40$: $f(x)=3x+15=96 \Leftrightarrow x=27$ ✓ $\Rightarrow$ 27 kg

b) $0<x\le 40$: $f(x)=3x+15=150 \Leftrightarrow x=45$ ✗

$x>40$: $f(x)=5x-65=150 \Leftrightarrow x=43 \Rightarrow$ 43 kg

2.1 a) 1) $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = 2 \Rightarrow$ kaikki raja-arvot on olemassa

2) $f(1)$ ei ole olemassa $\Rightarrow$ ei ole jatkuva millään tavalla

b) $\lim_{x\to 1-} g(x) = 2 \ne g(1) \Rightarrow$ 1) on, 2) ei ole

$\lim_{x\to 1+} g(x) = 3 = g(1) \Rightarrow$ 1) on, 2) on

$\lim_{x\to 1-} g(x) \ne \lim_{x\to 1+} g(x) \Rightarrow$ 1) $\lim_{x\to 1} g(x)$ ei ole olemassa
2) ei ole

c) $\lim_{x\to 1-} h(x) = \lim_{x\to 1+} h(x) = h(1) = 2 \Rightarrow$ 1) on, 2) on

d) $\lim_{x\to 1-} i(x) = \lim_{x\to 1+} i(x) = 2 \ne i(1)$
$\Rightarrow$ 1) raja-arvot ovat olemassa
2) ei ole jatkuva millään tavalla

2.3 $f(x)=\begin{cases}x^2+3, & x<0\\ -5x+3, & x\ge 0\end{cases}$

f on jatkuva ainakin kohdissa $x\ne 0$ (palat jatkuvia)

$\begin{cases}\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(x^2+3) = 0^2+3 = 3\\ \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(-5x+3) = -5\cdot 0+3 = 3\end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 3 \Rightarrow f$ on jatkuva kohdassa 0

$\Rightarrow f$ on jatkuva kaikkialla

2.5 a) $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$

$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-}(-x) = -0 = 0\\ \lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} x = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

b) $f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{-x}{x}=-1, & x<0\\ \frac{x}{x}=1, & x>0\end{cases}$

$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-}(-1) = -1\\ \lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} 1 = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ ei ole olemassa

c) $f(x)=\frac{x^2}{|x|}=\begin{cases}\frac{x^2}{-x}=-x, & x<0\\ \frac{x^2}{x}=x, & x>0\end{cases}$

$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-}(-x) = -0 = 0\\ \lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} x = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

2.11 a) on raja-arvo ja on jatkuva kohdassa 0 $(\lim_{x\to 0} f(x) = f(0))$

b) — " — , ei ole jatkuva — " — 2
$(\lim_{x\to 2} f(x) = 2 \ne f(2) = 3)$

c) ei ole raja-arvoa, ei ole jatkuva kohdassa 4
$(\lim_{x\to 4-} f(x) = 1 \ne \lim_{x\to 4+} f(x) = 2)$

2.16 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le -1\\ ax^2+bx, & -1<x\le 8\\ 10, & x>8\end{cases}$

f on jatkuva ainakin kun $x\ne -1$ ja $x\ne 8$

1° $\begin{cases}\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-}(x+2) = -1+2 = 1\\ \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+}(ax^2+bx) = a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1) = a-b\\ f(-1) = -1+2 = 1\end{cases}$

f jatkuva kohdassa $x=-1 \Leftrightarrow a-b=1$

2° $\begin{cases}\lim_{x\to 8-} f(x) = \lim_{x\to 8-}(ax^2+bx) = a\cdot 8^2+b\cdot 8 = 64a+8b\\ \lim_{x\to 8+} f(x) = \lim_{x\to 8+} 10 = 10\\ f(8) = a\cdot 8^2+b\cdot 8 = 64a+8b\end{cases}$

f jatkuva kohdassa 8 $\Leftrightarrow 64a+8b=10$

1° ja 2°: f jatkuva $\Leftrightarrow \begin{cases}a-b=1 & |\cdot 8\\ 64a+8b=10\end{cases}$

$72a = 18 \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow b = a-1 = \frac{1}{4}-1 = -\frac{3}{4}$

3.1 a) on $\quad$ b) on $\quad$ c) ei (terävä piikki)
d) ei (ei jatkuva) $\quad$ e) ei (ei jatkuva)

3.3 $f(x)=x^2$

$f'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3^2}{x-3} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$

$= \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6$

TAI: $f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$

$\overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 6+h = 6+0 =$

3.7 a) tosi $\quad$ b) tosi $\quad$ c) epätosi (terävä piik
d) tosi $\quad$ e) tosi $\quad$ f) tosi
g) tosi $\quad$ h) epätosi $\quad$ i) epätosi

3.16 $f(x)=x|x|$

$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}|x| = |0| = 0$

TAI: $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0}|h| = |0| = 0$