3.6 $f(x) = 2\sqrt{x}$

$$\underline{f'(1)} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{1}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1} \overset{\sqrt{x}+1}{} = \lim_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \overset{(a-b)(a+b)}{} = \lim_{x\to 1}\frac{2((\sqrt{x})^2-1^2)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{x}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = \frac{2}{2} = \underline{1}$$

3.10 Olet. $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$

$f'(0)$ on olemassa

a) $\underbrace{f(x+0)}_{=f(x)} \underset{\text{olet.}}{=} f(x) + f(0) \Leftrightarrow \underline{f(0)} = f(x) - f(x) = \underline{0}$

b) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{f(x)}+f(h)-\cancel{f(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = f'(0) \Rightarrow \text{väite}$$

c) Esim. $f(x) = x \Rightarrow f(x+y) = x+y = f(x)+f(y)$

$f(x) = ax \Rightarrow f(x+y) = a(x+y) = ax+ay = f(x)+f(y)$

$f(x) = 0$

3.11 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \leftarrow f(x) \in \mathbb{R}$

$\uparrow$ f:n määrittelyjoukko

a) $x = 1$ koska $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 3$

$x = 5$ koska $\lim_{x\to 5-} f(x) = 2{,}5 \neq \lim_{x\to 5+} f(x) = 0{,}5$

$\Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x)$ ei ole olemassa

b) $x = 1$ koska f ei ole jatkuva

$x = 5$ — " —

$x = 4$ kuvaajassa on terävä piikki

c) $x = 4$ (a- ja b-kohdat)

d) ei mikään (jos ei ole jatkuva ei voi olla derivoituva)